JOURNAL
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

OU

BULLETIN DU TRAVAIL

FAIT

A CETTE ÉCOLE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION ET ADMINISTRATION DE CET ÉTABLISSEMENT.

TROISIÈME CAHIER.

MESSIDOR, THERMIDOR ET FRUCTIDOR, AN III.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE LA RÉPUBLIQUE.

PRAIRIAL, AN IV.

Et se trouve chez les C.ens REGENT et BERNARD, libraires, quai des Augustins, n.° 37.

AVERTISSEMENT.

L'EXPÉRIENCE d'une année, et quelques dispositions de la loi du 30 vendémiaire dernier, relative aux écoles de services publics, ont fait sentir la nécessité de modifier en quelques points le régime intérieur de l'école polytechnique. Une nouvelle rédaction de l'organisation de cette école a été faite, et a eu l'approbation du ministre de l'intérieur et du directoire exécutif. Le conseil de l'école a cru qu'il serait utile de faire connaître cette organisation au public, d'autant plus que celle d'après laquelle on s'était guidé jusqu'alors, a été peu répandue. Les changemens prescrits dans l'établissement sont déjà exécutés, ou vont l'être incessamment, et une économie considérable résultera du nouvel ordre introduit dans l'administration.

Errata du deuxième Cahier.

Page 192, ligne 22 : les places nécessaires, *lisez* les plantes nécessaires.

Organisation

ORGANISATION
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TITRE PREMIER.

Objets qui seront enseignés à l'École polytechnique.

Mode de l'Enseignement.

ARTICLE PREMIER.

LES connaissances qui seront données aux élèves de l'école polytechnique, seront de deux genres : les unes relatives aux mathématiques, les autres à la physique.

II.

Les mathématiques comprendront l'analyse
Et la description graphique des objets.

III.

On enseignera l'usage de l'analyse, et on l'appliquera successivement

1.° A la géométrie des trois dimensions ;
2.° A la mécanique des solides et des fluides ;
3.° Au calcul de l'effet des machines.

I V.

La description graphique des objets comprendra
La géométrie descriptive,
Et l'art du dessin.

V.

La géométrie descriptive aura trois parties principales;
La stéréotomie,
Les travaux civils,
La fortification.

V I.

La stéréotomie donnera les règles générales et les méthodes de la géométrie descriptive;
Elle en fera successivement l'application,
A la coupe des pierres,
A la charpenterie,
Aux ombres des corps,
A la perspective linéaire et aérienne,
Au lever des cartes et plans,
Au nivellement,
Aux machines simples,
Aux principales machines composées.

V I I.

Relativement aux travaux civils, on enseignera tout ce qui concerne
Le tracé, la construction et l'entretien des chaussées, des ponts, des canaux et des ports;
La conduite des travaux des mines;
L'architecture proprement dite, ou la construction, la distribution et la décoration des édifices particuliers ou nationaux;
L'ordonnance des fêtes publiques.

VIII.

La fortification sera considérée sous les rapports les plus étendus.

On apprendra les méthodes de fortifier

Les postes, les places et les frontières ;

De les attaquer et de les défendre.

IX.

L'art du dessin s'apprendra principalement en copiant

La bosse

Et la nature ;

Et on se familiarisera avec les règles du goût dans les ouvrages de composition.

X.

L'étude de la physique s'appliquera aux phénomènes généraux de la nature, et aux phénomènes particuliers, qui sont plus spécialement l'objet de la chimie.

XI.

La physique générale sera traitée séparément dans tous les développemens que comporte son objet.

A l'occasion des propriétés les plus remarquables des corps, on fera connaître les arts mécaniques fondés principalement sur ces propriétés.

On fera aussi connaître la structure, la force des animaux, leur emploi dans les machines.

On y joindra des principes sur la salubrité des lieux et édifices publics et privés.

XII.

La physique particulière, ou chimie, aura trois branches, dans chacune desquelles on donnera des applications aux arts qui emploient des matières de différens genres, et spécialement à ceux qui ont plus de rapport aux travaux publics.

La première branche comprendra les substances salines ;

La deuxième, les matières organiques, végétales ou animales;

La troisième, les minéraux.

XIII.

L'enseignement de toutes les connaissances énoncées dans les articles qui précèdent, se fera par les moyens suivans:

Les instituteurs professeront aux élèves réunis, des cours sur les différentes parties de l'instruction.

Ils feront en leur présence les opérations et expériences nécessaires pour l'intelligence des cours.

Les élèves exécuteront eux-mêmes, dans des salles et des laboratoires particuliers, toute la série du travail propre à rendre leur instruction complète.

Il leur sera fourni, à cet effet, les écrits, livres et dessins nécessaires.

Enfin, ils iront au-dehors faire les opérations et observations que ne comporte pas le local de l'école.

Chacun de ces objets sera indiqué plus particulièrement dans le titre suivant.

TITRE II.

Distribution du Temps.

ARTICLE PREMIER.

Le cours entier des études de l'école polytechnique sera de trois années.

Les objets de l'enseignement seront répartis ainsi qu'il suit:

II.

Année de Stéréotomie.

Les principes généraux de l'analyse, et son application à la géométrie des trois dimensions;

On y joindra les élémens de statique pour préparer l'étude de l'année suivante ;

La stéréotomie ;

Le cours de physique générale ;

La première branche de la physique particulière, ou chimie, appliquée aux substances salines.

Quant à l'étude du dessin, elle aura lieu pendant les trois années ; mais elle ne sera pas divisée par rapport à la succession des années ; elle le sera par rapport à la force des élèves.

I I I.

Années des Travaux civils.

Application de l'analyse à la mécanique des solides et fluides ;

Les travaux civils, non compris les ports ;

L'architecture proprement dite ;

Le cours de zootechnie et de salubrité ;

La deuxième branche de la chimie, concernant les matières organiques, végétales et animales ;

Le dessin, d'après ce qui est dit à l'article précédent.

I V.

Année de Fortification.

Application de l'analyse au calcul de l'effet des machines ;

La fortification ;

Les ports maritimes et édifices qui en dépendent ;

La visite des ateliers les plus intéressans des arts mécaniques et chimiques ;

La troisième branche de chimie, comprenant les minéraux ;

Le dessin, comme il est annoncé à l'article II.

V.

Dans chaque décade, les trois premiers jours, et les trois qui

suivent le quintidi, seront consacrés aux objets qui dépendent des mathématiques.

Le quartidi et le nonidi seront destinés à la chimie.

Le quintidi matin sera donné à la leçon de physique générale; à celle de la zootechnie et salubrité, et à la visite des ateliers des arts hors de l'école.

Il y aura repos le reste de cette journée et le décadi.

V I.

Pour les jours consacrés aux mathématiques, les instituteurs de géométrie descriptive donneront à leurs divisions respectives une leçon depuis huit heures du matin jusqu'à neuf au plus.

A la suite de cette leçon, les élèves se retireront, par brigades de vingt, dans des salles particulières, où ils exécuteront, jusques à deux heures après midi, les opérations graphiques dépendant de l'enseignement qu'ils suivent.

A deux heures, les élèves sortiront pour dîner.

Ils reviendront à cinq heures, pour suivre jusques à huit les leçons d'analyse et de dessin, de cette manière:

Une des trois divisions des élèves recevra chaque jour alternativement la leçon d'analyse correspondant à l'année à laquelle cette division est attachée. Pendant ce même temps, les deux autres divisions s'occuperont du dessin.

V I I.

Pour les jours destinés à la chimie, les leçons de cette science remplaceront, aux mêmes heures, les leçons de géométrie descriptive, et seront données aux trois divisions par leurs instituteurs respectifs.

A neuf heures, les élèves se retireront pareillement, par brigades de vingt, dans les laboratoires particuliers, où ils exécuteront les opérations qui leur auront été expliquées par leurs instituteurs; ils

y consacreront la journée entière, et au besoin le lendemain, qui se trouve en tout ou en partie jour de repos.

L'interruption, par rapport à l'heure du dîner, aura lieu cependant comme à l'ordinaire.

V I I I.

A l'égard des jours où il y aura des opérations à faire hors du local de l'école, l'emploi en sera déterminé par un règlement particulier.

TITRE III.

Des Élèves.

ARTICLE PREMIER.

LES élèves seront partagés en trois grandes divisions, dont chacune suivra le cours d'études d'une année, et passera successivement au cours des années suivantes.

Ils sortiront de l'école conformément à ce qui est prescrit par la loi du 15 *fructidor an 2*, concernant l'école polytechnique, et par celle du 30 vendémiaire an 4, relative aux écoles de services publics. Le mode de sortie, de remplacement et de passage aux divers degrés d'instruction, sera déterminé par des règlemens postérieurs.

I I.

Indépendamment des trois grandes divisions des élèves, ils seront partagés en brigades de vingt chacune, pour exécuter dans les mêmes salles ou laboratoires, les opérations de mathématiques ou de chimie, sous la surveillance de leurs instituteurs respectifs.

Ces brigades seront composées des mêmes élèves, pendant chaque année des études.

TITRE IV.

Des Agens, et de leurs fonctions.

ARTICLE PREMIER.

Les agens de l'école polytechnique seront de plusieurs espèces, savoir :

Un directeur,
Des instituteurs,
Des administrateurs,
Des conservateurs,
Des artistes,
Des chefs de brigade,
Des aides de laboratoire,
Des commis,
Des garçons de bureau, hommes de service, ouvriers, &c.

II.

Le directeur aura la surveillance générale de l'école ; il s'occupera sans cesse des moyens d'atteindre le but de l'institution de cet établissement, qui est la plus grande instruction des élèves.

Il s'informera de leurs progrès, de l'état auquel ils se destinent, et recueillera tous les renseignemens propres à éclairer le Gouvernement sur les fonctions qu'il serait convenable de leur confier un jour.

Il veillera particulièrement à l'exécution de tout ce qui a rapport à l'admission des élèves, à leur sortie de l'école, à leur passage d'une division à l'autre, et aux examens qu'ils doivent subir.

Il proposera la liste des chefs de brigade à nommer ou à changer, d'après les témoignages constatés de leurs conduite et capacité.

Le

Le directeur se fera remettre régulièrement les états de situation et comptes rendus de toutes les parties du service de l'école qui doivent en fournir ; il en formera des états généraux qu'il adressera au ministre de l'intérieur.

Il lui rendra compte extraordinairement toutes les fois qu'il sera nécessaire, et transmettra à l'école tout ce qui viendra du ministre.

Enfin il donnera aux élèves, artistes, conservateurs, et autres agens de l'école, les témoignages de satisfaction que leurs travaux méritent ; il leur donnera aussi, au besoin, les avertissemens que leur conduite morale et leur défaut d'assiduité paraîtront devoir exiger, et les guidera dans l'exercice de leurs fonctions.

I I I.

Il y aura un instituteur pour chaque partie de l'analyse, un pour l'architecture, un instituteur et un adjoint pour chacune des parties suivantes, savoir :

La stéréotomie,

Les travaux civils,

La fortification,

La physique générale ;

Et pour chacune des trois branches de la chimie.

Le dessin sera enseigné par un instituteur et trois maîtres de dessin particuliers.

I V.

L'un des instituteurs ou adjoints précédemment désignés pourra être en même temps médecin de l'école, et en cette qualité il donnera ses soins aux élèves et agens de l'établissement qui voudront y avoir recours.

V.

Les administrateurs seront au nombre de trois ; ils se partageront toutes les fonctions relatives à la surveillance de la police de l'école,

aux approvisionnemens et fournitures, à la comptabilité et à la tenue des bureaux.

La détermination précise de leurs fonctions respectives aura lieu par un règlement particulier.

Ils se suppléeront les uns les autres au besoin.

V I.

Il y aura trois substituts pour aider dans ses fonctions l'administrateur chargé spécialement de la surveillance des élèves.

Chaque substitut sera attaché à une des trois grandes divisions annuelles des élèves.

V I I.

Il y aura, sous l'administrateur chargé des approvisionnemens, un préposé pour les achats des matières de toutes sortes à faire au dehors, et un préposé pour la garde des objets mis en magasin, ainsi que pour la distribution des fournitures nécessaires aux agens de l'école et à chaque partie du service.

Cette distribution se fera d'après un règlement particulier, pour prévenir toute dilapidation.

V I I I.

Le bureau des écritures sera composé d'un nombre de commis suffisant pour préparer la correspondance du directeur avec les ministres, avec les parens des élèves ou autres citoyens; dresser les états généraux de situation, transcrire les états ou comptes rendus particuliers, enfin faire toutes les écritures nécessaires à l'enseignement et à l'administration de l'école.

I X.

Il y aura un conservateur du cabinet des modèles : ses fonctions seront de veiller à l'exécution et à l'entretien des modèles et dessins, de coupe de pierres, de charpente, d'édifices et de machines, qui auront été jugés utiles à l'instruction des élèves.

Il leur fera remarquer ce que les modèles présentent d'intéressant, et leur communiquera les mémoires qui en contiendront les explications.

X.

Le conservateur du cabinet des modèles aura un adjoint, chargé particulièrement de la conservation, distribution et entretien des modèles et dessins pour l'instruction journalière.

X I.

Il y aura un préparateur de chimie, dont les fonctions seront de pourvoir à ce que les instrumens, ustensiles et matières nécessaires chaque jour aux opérations des élèves ou des instituteurs, se trouvent en bon état sous leurs mains.

Le préparateur fera rentrer en magasin ceux de ces objets qu'il sera utile de retirer des laboratoires; il recueillera les produits des travaux des élèves, et les portera à la perfection convenable par de nouvelles opérations, si cela est nécessaire.

Il emploiera à cet effet les aides de laboratoire dans les temps où ils ne sont pas occupés à d'autres objets de travail obligé.

X I I.

Il y aura un conservateur de la bibliothèque, qui en surveillera le service à l'égard des élèves, des instituteurs et des autres agens de l'école, conformément au règlement qui sera fait sur cet objet.

X I I I.

Les artistes attachés à l'école, seront

Un menuisier et un serrurier pour la confection et l'entretien des modèles de tout genre,

Un modeleur en plâtre,

Un artiste pour les instrumens de mathématiques et de physique,

Un artiste pour les instrumens de verre.

Ces artistes seront surveillés habituellement, savoir, les trois

premiers par le conservateur des modèles, et les deux autres par celui de la physique. Ces conservateurs leur prescriront du travail, d'après les demandes des instituteurs, à raison des besoins des diverses parties de l'enseignement, et des sommes qui seront disponibles pour chaque objet.

Ces artistes pourront avoir des compagnons pour les aider, mais dont le travail ne sera jamais payé que sur la quantité d'ouvrage fait.

X I V.

Un appareilleur, et un charpentier exercé dans l'art du trait, seront appelés à l'école pendant le temps où les élèves doivent s'instruire dans leur art. Ces deux artistes seront sous la direction de l'instituteur de stéréotomie.

X V.

Chacun des instituteurs de géométrie descriptive aura un dessinateur pour les ouvrages qu'il aura à préparer pour l'instruction de l'école.

X V I.

Chaque division des élèves aura pour la chimie, un instructeur chimiste qui fera les préparations nécessaires pour le cours de l'instituteur, s'entendra avec le préparateur général, afin de mettre en état ce qui doit servir chaque jour au travail des élèves; dirigera et surveillera ceux-ci dans leurs opérations; enfin aidera l'instituteur dans les recherches auxquelles il pourra se livrer.

X V I I.

A chaque brigade de vingt élèves sera attaché un chef de brigade, dont les fonctions seront principalement

De tenir chaque jour le rôle des élèves de leurs brigades présens aux cours,

De se trouver avec eux dans les salles et laboratoires particuliers;

D'aplanir aux élèves les difficultés qu'ils éprouveraient dans leurs opérations, en leur donnant les explications nécessaires.

Ces chefs de brigade seront choisis parmi les élèves les plus instruits qui auront achevé leur temps à l'école : ils exerceront ces fonctions pendant trois années, en suivant les mêmes élèves chaque année, après lequel temps ils quitteront l'école et seront remplacés par d'autres.

Pour suppléer ceux qui, par des circonstances, ne pourraient remplir leurs fonctions, il y aura cinq chefs de brigade en excédant du nombre des brigades des élèves.

Enfin ils seront sous l'autorité du directeur et des administrateurs de l'école, et sous celle des instituteurs en ce qui regarde l'instruction.

X V I I I.

Il y aura à l'école dix aides de laboratoire pour travailler aux préparations de chimie et de physique sous la direction des instructeurs-artistes, du préparateur général et des instituteurs.

Ces aides de laboratoire seront des jeunes gens qui trouveront dans ce service un moyen d'instruction.

Ils ne seront choisis que sur des preuves d'intelligence et de bonne conduite.

L'emploi de leur temps sera réglé de manière qu'il leur reste quelques heures pour l'étude des mathématiques.

X I X.

Pour entretenir la propreté dans les salles de brigade, prendre soin des modèles courans et préparer les fournitures nécessaires aux élèves dans le travail de la géométrie descriptive, il y aura un garçon de bureau chargé de ces fonctions dans trois salles.

Quant aux autres garçons de bureau, portiers, ouvriers, &c. qu'exige le service de la maison, le nombre en sera déterminé par un règlement particulier, et à raison des besoins.

X X.

Le directeur, les instituteurs et leurs adjoints, et les administrateurs,

formeront un conseil qui dirigera l'instruction et l'administration de l'école.

Il y sera attaché un secrétaire pour rédiger le procès-verbal des séances.

XXI.

Par rapport à l'instruction, le conseil s'occupera du mode de l'enseignement, du perfectionnement des sciences et des arts qui en sont l'objet;

De l'emploi du temps, du choix des ouvrages et modèles les plus propres à assurer les progrès des élèves.

Il approuvera les règlemens qui lui seront soumis, et statuera sur les propositions particulières concernant ces objets.

XXII.

Pour ce qui concerne l'administration, le conseil entendra les rapports sur cette matière, examinera les propositions d'amélioration et d'économie à introduire dans le régime de l'école; approuvera les règlemens de police proposés, et déterminera les dépenses extraordinaires à demander au ministre, ainsi que les mesures à soumettre à son approbation.

Enfin il prononcera sur les plaintes qui seraient portées contre les élèves et autres agens; et si elles sont assez graves pour exiger plus qu'un avertissement aux personnes, il en référera au ministre.

XXIII.

Le conseil sera présidé par le directeur ou, à son défaut, par son suppléant.

Le directeur fera part à l'assemblée de tout ce qui sera intéressant sur la situation de l'école dans ses diverses parties; il l'informera également des ordres ou dépêches venus du ministre; il provoquera la décision du conseil à l'égard des objets sur lesquels il sera nécessaire

de le faire prononcer, enfin il veillera à l'exécution de tout ce que le conseil aura délibéré.

XXIV.

Les places des membres du conseil qui viendront à vaquer, ne pourront être remplies que par des citoyens proposés par le conseil, et agréés par le ministre de l'intérieur.

Le directeur devra être en outre confirmé par le Directoire exécutif.

Quant à ce qui est des autres agens attachés à l'école, la présentation en sera faite au conseil par ceux de ses membres dont les agens doivent dépendre immédiatement. Le conseil les agréera s'il le juge convenable.

XXV.

Le conseil s'assemblera au moins deux fois par décade, et ses membres s'inscriront chaque fois sur une feuille de présence.

Les délibérations seront transcrites sur un registre qui sera tenu par le secrétaire du conseil.

Ces délibérations et le procès-verbal de chaque séance seront signés par le directeur et le secrétaire.

XXVI.

Il sera publié chaque mois un journal, dont l'objet sera de faire connaître la marche de l'enseignement de l'école, ainsi que les travaux des élèves, ceux des instituteurs, et des autres agens qui coopèrent à l'instruction.

Le secrétaire du conseil recueillera les matériaux qui doivent composer ce journal, et leur donnera, au besoin, la forme convenable: il mettra tous ses soins à tenir cette besogne constamment au courant.

XXVII.

A la fin de l'année le directeur rendra au ministre un compte

général des travaux de l'école, de sa situation, de ses dépenses, des progrès des élèves : il fera en même temps la demande des fonds pour l'année suivante, en désignant celle nécessaire pour chacun des articles principaux, d'après la délibération qui en aura été prise préalablement par le conseil.

Pour minute arrêtée par le conseil de l'école polytechnique, en sa séance du 7 ventôse, an 4.e de la République française. *Signé* CATOIRE, *président;* PEYRARD, *secrétaire.*

Vu par le Ministre de l'intérieur : *Signé* BENEZECH.

Approuvé par le Directoire exécutif, le trente ventôse, an quatrième de la République.

Pour expédition conforme :
Signé LETOURNEUR, *président.*

Par le Directoire exécutif : *le secrétaire général,* signé LAGARDE.

Pour copie conforme :

Le Ministre de l'intérieur :

Signé BENEZECH.

État nominatif des principaux Agens de l'École polytechnique, conformément à son organisation actuelle.

Directeur annuel.

C.ens DESHAUTSCHAMPS.

Instituteurs d'Analyse mathématique.

FERRY.
PRONY.
LAGRANGE.

Instituteurs de Géométrie descriptive.

MONGE........... pour la Stéréotomie.
HACHETTE....... Adjoint.
LAMBLARDIE..... pour les Travaux civils.
.... Adjoint.
BALTARD.......... pour l'Architecture.
CATOIRE......... pour la Fortification.
SAY................ Adjoint.

Instituteur de Dessin.

NEVEU.

Instituteurs de Physique.

HASSENFRATZ.
BARRUEL......... Adjoint.

Instituteurs de Chimie.

FOURCROY........ pour les Substances salines.
VAUQUELIN...... Adjoint.
BERTHOLLET..... pour les Substances végétales et animales.
CHAUSSIER....... Adjoint, chargé en même temps du cours de Zootechnie et de Salubrité, et Médecin de l'École.
GUYTON.......... pour les Minéraux.
PELLETIER....... Adjoint.

Administrateurs.

C.ens LEBRUN.......... pour la police de l'enseignement et la surveillance des Élèves.

LECAMUS........ pour les approvisionnemens et le service intérieur de la maison.

LERMINA......... pour la comptabilité et la direction des bureaux.

Secrétaire du Conseil, Rédacteur du Journal de l'École.

HALMA.

Substituts de l'Administrateur de la police (1).

LEPÈRE........... pour la division de Stéréotomie.

DURAND.......... pour celle des Travaux civils.

FOURRIER........ pour celle de la Fortification.

Conservateurs.

LOMET.......... chargé de la galerie des Modèles, Dessins et Gravures.

SAVART........... Adjoint, ayant la distribution journalière des Modèles dans les salles des Élèves.

PEYRARD......... pour la Bibliothèque.

Instructeurs - chimistes.

RAIMOND......... pour la partie des Sels.

WELTER.......... pour celle des matières organiques, végétales et animales.

BONJOUR......... pour les Minéraux.

Préparateur général de Chimie.

BOUILLON-LAGRANGE.

Maîtres externes de Dessin.

MERIMÉE.

LEMIRE.

BOSIO.

---

(1) Ces trois substituts coopèrent aussi à plusieurs parties de l'enseignement. On conçoit que le grand nombre des Élèves (qui est de 360), la variété de leurs facultés naturelles et les différentes professions auxquelles ils se destinent, exigent l'emploi de beaucoup de moyens pour assurer leur instruction.

JOURNAL

JOURNAL
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

SUITE DES LEÇONS D'ANALYSE DE PRONY.

CONSIDÉRATIONS

Sur les principes de la méthode inverse des Différences.

N.° XIV.

La théorie exposée dans les séances précédentes, apprend à trouver les *différences* de divers ordres d'une fonction ou d'une équation donnée; je vais passer au problème inverse qui a pour objet l'*intégration*, c'est-à-dire, les méthodes au moyen desquelles on déduit d'une fonction ou d'une équation différentielle d'un certain ordre, soit la fonction ou équation primitive, soit une fonction ou une équation d'un ordre inférieur. Cette branche d'analyse, qu'on nomme *méthode inverse des différences*, présente des difficultés très-supérieures à celles qu'on rencontre dans la *méthode directe*, dont j'ai entretenu jusqu'à présent les élèves.

Soit Q une fonction de z, x, y, t, &c. et de leurs différences, $Q = 0$ sera une équation différentielle, qui, si elle satisfait à certaines conditions, doit comporter une relation entre les variables, dans laquelle n'entre point leurs différences, à l'exception de celles de ces différences qui sont constantes et considérées comme des quantités données. Or z étant regardé comme une fonction de x, y, t, &c. si ces dernières variables

sont indépendantes, ou que l'équation $Q = o$ existe seule, il est nécessaire qu'on puisse toujours ramener la question à considérer Δz comme la seule différence variable qui peut être *totale* ou *partielle*, et Δx, Δy, Δt, &c. comme des différences constantes; et en effet, si Δx, Δy, &c. étaient variables, il faudrait, pour que l'équation $Q = o$ eût un sens susceptible d'interprétation, qu'on connût la loi de leurs variations, qui serait donnée par des équations particulières; tout cela est une conséquence évidente de ce que j'ai dit précédemment sur l'indépendance des variables, et les équations particulières serviront, comme je le ferai voir par la suite, à ramener l'intégration au cas d'une seule différence variable. Ce cas étant donc le seul auquel s'appliquent réellement les méthodes d'intégration, l'équation $Q = o$ peut être l'équivalente de $f(z, x, y, \&c. \Delta z, \Delta^2 z, \&c. \Delta x, \Delta t, \&c.) = o$, dans laquelle exprimant, au moyen de l'équation (1) du *n.° VII*, les incrémens Δz, $\Delta^2 z$, $\Delta^3 z$, &c. en valeurs des quantités variées z, z', z'', &c. on aura pour représenter une équation différentielle quelconque,

$$f(z, z', z'', \&c. \; x, y, t, \&c. \; \Delta x, \Delta y, \Delta t, \&c.) = o;$$

dans laquelle les variations de z peuvent se rapporter ou à toutes les variables, ou à une, deux, &c. seulement Δx, Δy, Δt, &c. étant des différences constantes.

Si cette équation ne contient que z et x, ou si on a

$$f(z, z', z'', \&c. \; x, \Delta x) = o$$

(dans laquelle x peut ne pas paraître ou n'être que le numéro indéterminé d'un des z), on pourra toujours calculer la série des z au moyen de la seule équation différentielle, pourvu qu'on connaisse, ou qu'on se donne d'avance, un nombre de termes de cette série égal au nombre qui indique l'ordre de l'équation.

Si l'équation contient plus de deux variables, on pourra encore, sans intégrer, calculer les tables à double, triple, &c. entrée des valeurs de z, z', z'', &c.; mais alors, au lieu des termes constans, il faut en général connaître des fonctions qui sont ou données par l'état de la question, ou arbitraires.

Ces constantes et ces fonctions arbitraires qu'on est obligé d'employer

pour calculer la série des z par le moyen de l'équation différentielle, doivent par conséquent se retrouver dans l'équation intégrale, qui n'est autre chose que le terme général de cette série; et l'on peut poser pour principe sans exception, que toutes les fois qu'une équation contenant un nombre n de constantes ou de fonctions arbitraires, sera satisfaite ou vérifiée par une équation différentielle de l'ordre n, la première sera l'intégrale complète de la seconde.

Je n'insisterai pas beaucoup sur ces notions un peu abstraites, qui ne seront bien senties par les élèves que lorsque j'en viendrai aux applications; néanmoins je puis, dans ce moment même, leur faire concevoir très-nettement le rôle que jouent les constantes dans la première espèce d'équation dont je les entretiendrai. Ces équations, qui sont d'un grand usage, offrent des cas particuliers de celle $f(z, z', z'', \&c.\ x, \Delta x) = 0$, qui donnent

$$z^{(n)} - n\, z^{(n-1)} + \frac{n.n-1}{1.2}\, z^{(n-2)} - \&c. \ldots \pm z = X,$$

le deuxième membre X étant une fonction quelconque de x. On voit sur-le-champ que cette équation (*n.º VII*) équivaut à

$$\Delta^n z = X.$$

L'*intégration* des équations de cette espèce, qui ne renferment qu'un seul ordre de la différence variable, se nomme, particulièrement, *intégration des fonctions*, la désignation d'*intégration des équations différentielles* étant spécialement attribuée au cas général $Q = 0$; or la fonction X de l'équation $\Delta^{(n)} z = X$ peut être considérée comme appartenant à la n.^e ligne horizontale du tableau des différences (*n.º VII*), c'est-à-dire, qu'au moyen des substitutions indiquées dans ce numéro, on aura les valeurs successives $\Delta^{(n)} z = X_0$; $\Delta^{(n)} z' = X_{,}$; $\Delta^{(n)} z'' = X_{,,}$, &c., $\Delta^{(n)} z^{(k)} = X_{(k)}$, X étant le terme général de la série qui compose cette n.^e ligne. Maintenant la première intégration de $\Delta^{(n)} z = X$ consiste à trouver $\Delta^{(n-1)} z$, ou, ce qui revient au même, à pouvoir former la $(n-1)$^e ligne du tableau, qui est $\Delta^{(n-1)} z = X^0$, $\Delta^{(n-1)} z' = X'$, $\Delta^{(n-1)} z'' = X''$, &c. . . $\Delta^{(n-1)} z^{(k)} = X^{(k)}$, on a donc les deux lignes

$$\begin{matrix} X^0 & X' & X'' & X''' \ldots X^{(k)} \\ X_0 & X_{,} & X_{,,} & X_{,,,} \ldots X_{(k)} \end{matrix}$$

dont l'inférieure donnée par l'état de la question, doit servir à trouver la supérieure; or, d'après la génération du tableau, pour déduire $X^{(k)}$ de $X_{(k)}$ il faut chercher une fonction de x, &c., et de sa différence, telle que si on y substitue, pour cette variable, cette variable plus sa différence, et qu'on retranche de la fonction variée la fonction primitive, il reste la fonction $X_{(k)}$; c'est la notion de l'intégrale première d'une fonction, qui dérive immédiatement de la génération des différences.

Cette notion ne suppose autre chose dans la détermination de la série X°, X', X'', &c., sinon qu'un terme quelconque soustrait de celui qui est à sa droite donne le terme qui est au-dessous de lui; mais supposons qu'on ait trouvé une série qui satisfasse à cette condition, il est évident qu'elle y satisfera encore, si à chacun de ses termes on ajoute une quantité constante, c'est-à-dire, que si les deux lignes ci-dessus remplissent les conditions demandées, les deux suivantes les rempliront aussi, savoir;

$$X^{\circ} + A; \quad X' + A; \quad X'' + A; \quad \&c. \ldots X^{(k)} + A$$
$$X_{\circ} \qquad X_{\prime} \qquad X_{\prime\prime} \qquad \&c. \ldots X_{(k)},$$

A étant une quantité constante arbitraire.

Il suit de-là que lorsque la n.^e ligne du tableau est donnée, et qu'on en veut déduire la $(n-1)^e$ ligne, les différens termes de cette $(n-1)^e$ ligne sont susceptibles d'un nombre indéfini de valeurs qui toutes satisfont à la condition demandée, et que pour leur donner la signification la plus étendue dont ils soient susceptibles, il faut introduire une constante arbitraire, circonstance qui distingue essentiellement le problème inverse des différences du problème direct précédemment résolu.

On prouve par le même raisonnement que le passage de la $(n-1)^e$ à la $(n-2)^e$ ligne, exige aussi une constante arbitraire B; donc pour conclure la $(n-2)^e$ de la n.^e avec toute la généralité que comporte la question, il faut introduire deux constantes arbitraires.

En général, pour conclure la $(n-m)^e$ de la n.^e ligne, il faut introduire un nombre m de constantes arbitraires, sans quoi on n'aurait que des solutions particulières de la question; or, d'après la manière dont je viens d'envisager l'équation $\Delta^{(n)} z = X$, relativement aux lignes horizontales du tableau, les déterminations des $(n-1)^e$, $(n-2)^e$,

$(n-3)^e$, &c. donnent, respectivement, les 1.ere, 2.e, 3.e, &c. intégrales de cette équation, d'où on voit que la m.^{e} intégrale exige un nombre m de constantes arbitraires.

La n.^{e} ligne ou série considérée comme servant de base à la recherche des lignes ou séries supérieures est *génératrice* par rapport à ces dernières; on peut donc, dans tous les cas, considérer la série X_0, X_I, X_{II}, &c. comme représentant les termes de la ligne AB du tableau général des différences, et les intégrales successives de X comme se rapportant aux lignes des Δ^{-1}, Δ^{-2}, Δ^{-3}, &c. et écrire

$$\Delta^{(n)} z \text{ ou } \Delta^0 \; (\Delta^{(n)} z) = \Delta^0 \; X$$
$$\Delta^{(n-1)} z \text{ ou } \Delta^{-1} \; (\Delta^{(n)} z) = \Delta^{-1} X$$
$$\Delta^{(n-2)} z \text{ ou } \Delta^{-2} \; (\Delta^{(n)} z) = \Delta^{-2} X$$
$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$
$$\Delta^{(n-m)} z \text{ ou } \Delta^{-m} \{ \Delta^{(n)} z \} = \Delta^{(-m)} X.$$

Les géomètres sont convenus de substituer à la notation Δ^0, Δ^{-1}, Δ^{-2}, &c. $\Delta^{(-m)}$ les signes Σ^0, Σ^1, Σ^2, &c. $\Sigma^{(m)}$, en sorte que les expressions précédentes se changent en

$$\Delta^{(n)} z \text{ ou } \Sigma^0 \; \{ \Delta^{(n)} z \} = \Sigma^0 \; X$$
$$\Delta^{(n-1)} z \text{ ou } \Sigma^1 \; \{ \Delta^{(n)} z \} = \Sigma^1 \; X$$
$$\Delta^{(n-2)} z \text{ ou } \Sigma^2 \; \{ \Delta^{(n)} z \} = \Sigma^2 \; X$$
$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$
$$\Delta^{(n-m)} z \text{ ou } \Sigma^{(m)} \; (\Delta^n z) = \Sigma^{(m)} X.$$

On voit pourquoi j'ai dit (*n.° VII*) que les lignes supérieures à la ligne AB du tableau contenaient des termes arbitraires.

J'ai dit que l'introduction des constantes arbitraires servait à donner aux intégrales toute l'étendue de signification dont elles sont susceptibles; cependant cette proposition n'est vraie, sans exception, que pour le calcul intégral ordinaire; et dans la partie de la méthode inverse des différences que je vais traiter, les équations, même à deux variables, ne sont complétées, dans le sens le plus général, que par des fonctions variables révolutives; mais, en ce moment, la considération de ces fonctions surchargerait trop l'attention des élèves, et je me réserve de leur exposer la théorie qui s'y rapporte, lorsque le cours sera un peu plus avancé.

Distinction entre les intégrales *et les* sommes *des Fonctions. Intégration et sommation des Puissances d'une variable.*

N.° XV. L'INTÉGRATION des fonctions et la sommation des suites ont entre elles des rapports intimes, tels que lorsqu'on ne s'est pas fait une idée nette de ces deux opérations, on les confond souvent l'une avec l'autre; cette erreur peut être entretenue par la lecture de plusieurs traités où les mots *somme* et *intégrale* sont employés comme synonymes : il est à propos, avant d'entrer dans de plus grands détails sur la méthode inverse des différences, d'établir la notion précise du rapport entre la *sommation* et l'*intégration* des fonctions.

En substituant, comme je l'ai fait précédemment, le signe Σ au signe Δ^{-1}, le tableau général des différences fournit les deux suites

$$\Sigma z^{0} \quad \Sigma z' \quad \Sigma z'' \quad \Sigma z''', \text{ \&c. } \ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma z^{(n)}$$

$$z^{0} \quad z' \quad z'' \quad z''', \text{ \&c. } \ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma z^{(n)}$$

et on a

$$\Sigma z^{0} = \Sigma z^{0}$$

$$\Sigma z' = \Sigma z^{0} + z^{0}$$

$$\Sigma z'' = \Sigma z' + z' = \Sigma z^{0} + z^{0} + z'$$

$$\Sigma z''' = \Sigma z'' + z'' = \Sigma z^{0} + z^{0} + z' + z''$$

&c. &c. &c.

$$\Sigma z^{(n)} = \Sigma z^{(n-1)} + z^{(n-1)} = \Sigma z^{0} + z^{0} + z' + z'' + \text{\&c.} \ldots + z^{(n-1)}.$$

Nommant $S.z^{(n)}$ la somme des termes z^{0}, z', z'', &c. . . . . . $z^{(n-1)}$, $z^{(n)}$, et observant, d'après ce qui est dit dans la feuille précédente, que Σz^{0} est une quantité arbitraire qu'on peut désigner par un signe quelconque

$$\Sigma z^{(n)} + A = S.z^{(n)} - z^{(n)}, \text{ d'où } Sz^{(n)} = \Sigma z^{(n)} + z^{(n)} + A.$$

$z^{(n)}$ est le terme général de la série, dont $Sz^{(n)}$ est le terme *sommatoire*; depuis et y compris z^{0} jusqu'à $z^{(n)}$ inclusivement; l'équation précédente offre donc la relation entre l'*intégrale* première, le terme *sommatoire* et le

terme *général*; A étant la valeur de l'intégrale lorsque $z^{(n)}$ devient z^{0}, ou servant, comme on le verra bientôt, à en déterminer une des limites.

La quantité $z^{(n)}$ est la différence entre $Sz^{(n-1)}$ et $Sz^{(n)}$, ce qui fournit l'égalité

$$z^{(n)} = \Delta . Sz^{(n-1)},$$

ou comme $z^{n} = \Sigma z^{(n+1)} - \Sigma z^{(n)} = \Delta . \Sigma z^{(n)}$, l'équation précédente peut s'écrire ainsi

$$\Delta . \Sigma z^{n} = \Delta Sz^{(n-1)}.$$

Le terme $z^{(n)}$ peut être, en même temps, considéré comme la différence du terme $\Sigma z^{(n)}$ et comme l'intégrale de $\Delta z^{(n)}$, on a donc la synonymie $\Delta . \Sigma z^{(n)} = \Sigma . \Delta z^{(n)}$; lorsqu'il s'agit des *sommes*, on a

$$\Delta . Sz^{(n)} = z^{(n+1)} = z^{0} + \Delta z^{0} + \Delta z' + \Delta z'' + \ldots + \Delta z^{(n)}$$
$$S . \Delta z^{n} = \Delta z^{0} + \Delta z' + \Delta z'' + \ldots + \Delta z^{(n)},$$

d'où on conclut

$$\Delta . Sz^{(n)} = S . \Delta z^{(n)} + z^{0}.$$

Ces notions suffisent pour établir la distinction entre les *intégrales* et les *sommes* et faire voir comment elles sont données, réciproquement, les unes par les autres; les applications qui vont suivre aideront beaucoup pour la parfaite intelligence des principes généraux.

De l'intégration des puissances d'une variable.

Avant de passer à des intégrations effectives, j'observe 1.° que A étant une constante et Z une quantité variable, les expressions $\Sigma . AZ$ ou $A \Sigma Z$ sont identiques; 2.° que $\Sigma (Z + X + Y + \&c.) = \Sigma Z + \Sigma X + \Sigma Y +$, &c., ces propriétés devant être les mêmes pour les quantités affectées du signe Σ et pour celles affectées du signe Δ, vu la génération commune du tableau des différences, dont elles font toutes partie. Cela posé, il sera toujours facile d'intégrer les puissances successives x^{0}, x^{1}, x^{2}, x^{3}, &c., car je vais faire voir que l'intégrale d'une d'entre elles est toujours donnée par celles qui précèdent; en effet, j'ai démontré que

$$\Delta x^{n+1} = (n + 1) x^{n} \Delta x + \frac{(n+1)n}{1.2} x^{n-1} \Delta x^{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} x^{n-2} \Delta x^{3} + \ldots + \Delta x^{n+1};$$

on déduit de-là

$$\Sigma x^n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)\Delta x} - \left\{ \frac{n \Delta x}{1.2} \Sigma x^{n-1} + \frac{n.n-1.\Delta x^2}{1.2.3} \right.$$

$$\left. \Sigma x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\Sigma . \Delta x^n}{n+1} \right\};$$

ainsi connaissant Σx^{n-1}, Σx^{n-2}, &c. on aura Σx^n.

Le premier terme du deuxième membre de cette équation, n'ayant pas le signe d'intégration, on peut, en substituant dans la valeur de Σx^n les suivantes qui sont données par la même formule,

$$\Sigma x^{n-1} = \frac{x^n}{n \Delta x} - \left\{ \frac{(n-1)\Delta x}{1.2} \Sigma x^{n-2} + \right.$$

$$\left. \frac{(n-1)(n-2)\Delta x^2}{1.2.3} \Sigma x^{n-3} + \ldots + \frac{\Sigma \Delta x^{n-1}}{n} \right\}$$

$$\Sigma x^{n-2} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)\Delta x} - \left\{ \frac{(n-2)\Delta x}{1.2} \Sigma x^{n-3} + \right.$$

$$\left. \frac{(n-2)(n-3)\Delta x^2}{1.2.3} \Sigma x^{n-4} + \ldots + \frac{\Sigma \Delta x^{n-2}}{n-2} \right\}$$

$$\Sigma x^{n-3} = \frac{x^{n-2}}{(n-'')\Delta x} - \left\{ \frac{(n-3)\Delta x}{1.2} \Sigma x^{n-4} + \right.$$

$$\left. \frac{(n-3)(n-4)\Delta x^2}{1.2.3} \Sigma x^{n-5} + \ldots + \frac{\Sigma \Delta x^{n-3}}{n-3} \right\}$$

&c. &c.

obtenir la valeur de Σz^n avec autant de termes qu'on voudra, dégagés du signe d'intégration, et trouver la loi des coëfficiens; cette recherche serait prématurée en ce moment. La formule générale appliquée aux exposans 0, 1, 2, &c. donne

pour $n = 0 \ldots \Sigma x^0 = \frac{x}{\Delta x}$, d'où $\Sigma a = \frac{a x}{\Delta x}$;

$$n = 1 \ldots \Sigma x^1 = \frac{x^2}{2 \Delta x} - \tfrac{1}{2} x;$$

$$n = 2 \ldots \Sigma x^2 = \frac{x^3}{3 \Delta x} - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{6} x \Delta x;$$

$$n = 3 \ldots \Sigma x^3 = \frac{x^4}{4 \Delta x} - \tfrac{1}{2} x^3 + \tfrac{1}{4} x^2 \Delta x;$$

$n = 4 \ldots$

$$n = 4 \ldots \Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\Delta x} - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\Delta x - \tfrac{1}{30}x\Delta x^3;$$

$$n = 5 \ldots \Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\Delta x} - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4\Delta x + \tfrac{1}{12}x^2\Delta x^3;$$

$$n = 6 \ldots \Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\Delta x} - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5\Delta x - \tfrac{1}{6}x^3\Delta x^3 \tfrac{1}{42}x\Delta x^5;$$

&c. &c.

De la détermination et de l'usage des Constantes arbitraires.

Chacune des intégrales précédentes doit, pour avoir toute la généralité dont elle est susceptible, renfermer une constante arbitraire, et il est temps de faire comprendre l'usage et la détermination de cette constante. Je prends pour exemple Σx; la solution, pour être complète, exige qu'on écrive $\Sigma x = \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{1}{2}x + A$; maintenant la série des Σx étant liée à celle des x, par la seule condition que $\Sigma x^{(n+1)} - \Sigma x^{(n)} = x^{(n)}$ (n désigne ici un accent), je puis, sans déroger à cette condition, faire correspondre à une certaine valeur de Σx une hypothèse quelconque pour x (hypothèse qui est toujours déterminée dans chaque cas particulier qu'on a en vue), pourvu que les valeurs précédentes et suivantes y satisfassent. Je suppose, par exemple, que le premier terme de la série des Σx est o, et que le premier terme correspondant de celle des x est 10, substituant ces deux valeurs simultanées dans l'équation $\Sigma x = \frac{x^2}{2\Delta x} - {}^{1}x + A$, j'en tirerai $A = 5 - \frac{50}{\Delta x}$, et l'intégrale deviendra

$$\Sigma x = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 50}{\Delta x} - \frac{1}{2}x + 5$$

dans l'hypothèse des deux séries correspondantes.

Numéros des termes.	1	2	3	4	5	6.....	..........$n+1$
valeurs de { $\Sigma x = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 50}{\Delta x} + \frac{x}{2} + 5$	o	10	$20 + \Delta x$	$30 + 3\Delta x$	$40 + 3\Delta x$	$50 + 10\Delta x$	$n\{10 + \frac{1}{2}(x-1)\Delta x\}$
valeurs de { x	10	$10 + \Delta x$	$10 + 2\Delta x$	$10 + 3\Delta x$	$10 + 4\Delta x$	$10 + 5\Delta x$	...$10 + n\Delta x$

Pour sentir de plus en plus l'utilité de la détermination précédente,

soit proposé de trouver le terme sommatoire de la série inférieure, on aura, d'après la relation précédemment établie entre les *sommes* et les *intégrales*,

$$Sx = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 50}{\Delta x} + \frac{1}{2}x + 5 = \frac{x(x+\Delta x) - 10(10-\Delta x)}{1.2\Delta x},$$

terme sommatoire d'une progression arithmétique, dont les termes extrêmes sont 10 et x, et la différence un nombre quelconque Δx.

On fera un raisonnement absolument semblable sur chacune des intégrales ci-dessus.

De la sommation des Puissances des nombres.

On peut déterminer la constante arbitraire de manière que Σx^n et x soient zéro en même temps; on trouve dans ce cas $A = 0$, et les intégrales ci-dessus se rapportent aux séries des puissances d'une suite de nombres croissant par intervalles égaux à Δx; dans ce cas on obtient bien simplement l'expression de la somme de ces puissances, car comme le second terme de la valeur de Σx^n est $-\frac{1}{2}x^n$, et que pour avoir Sx^n il faut ajouter x^n à Σx^n, il suffit pour transformer l'*intégrale* en *somme* de changer le signe du deuxième terme de l'intégrale; on aura donc pour la sommation des puissances d'une suite de nombres procédant par intervalles égaux à Δx,

$$Sx^0 = \frac{x}{\Delta x} + 1,$$

1.ere puiss... $Sx^1 = \frac{x^2}{2\Delta x} + \frac{1}{2}x;$

Quarrés.... $Sx^2 = \frac{x^3}{3\Delta x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\,\Delta x;$

Cubes..... $Sx^3 = \frac{x^4}{4\Delta x} + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2\Delta x;$

4.es puiss... $Sx^4 = \frac{x^5}{5\Delta x} + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\Delta x - \frac{1}{30}x\,\Delta x^3;$

5.es puiss... $Sx^5 = \frac{x^6}{6\Delta x} + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4\Delta x - \frac{1}{12}x^2\Delta x^3;$

6.es puiss... $Sx^6 = \frac{x^7}{7\Delta x} + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5\Delta x - \frac{1}{2}x^3\Delta x^3 + \frac{1}{42}x\,\Delta x^5;$

&c. &c. &c.

Je ferai encore quelques applications de la méthode inverse des différences aux sommations.

INTÉGRATION ET SOMMATION

Des Fonctions composées de Facteurs en progression arithmétique, avec une application aux Séries des nombres figurés.

N.° XVI.

L'INTÉGRATION et la sommation des puissances isolées d'une variable fournissent le moyen d'intégrer et de sommer toute fonction rationnelle de x, qui n'a pas de diviseur variable; mais on peut, dans beaucoup de cas, employer des expédiens plus abrégés que celui d'opérer partiellement sur chaque terme; les différenciations qui terminent le numéro VIII nous en fournissent un exemple, et je vais d'abord en entretenir les élèves, avant de leur donner une méthode générale d'intégrer les fonctions rationnelles.

D'après le numéro cité, on a

$$\Delta.\{(x+a)\,(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots[x+a+m.\Delta x]\}=(m+1)\Delta x\,\{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots[x+a+m.\Delta x]\}.$$

On déduit de-là

$$(1)\ldots\Sigma\{(x+a+\Delta x)\,x+a+2\Delta x)\ldots[x+a+m.\Delta x]\}=\frac{1}{(m+1)\Delta x}\{(x+a)\,(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots[x+a+m.\Delta x]\}+A.$$

Pareillement de

$$\Delta.\left\{\frac{(x+a)\,(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots[x+a+m.\Delta x]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots m}\right\}$$

$$=\frac{\{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots[x+a+m\Delta x]\}\,(m+1)\,\Delta x}{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}$$

on conclut

$$(2)\ldots\Sigma\left\{\frac{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots\ldots[x+a+m.\Delta x]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}\right\}$$

$$=\frac{(x+a)\,(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots(x+a+m.\Delta x)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(m+1)\Delta x}+B.$$

Les fractions, dont les dénominateurs sont des produits pareils aux précédens, donnent

$$\Delta\left\{\frac{a}{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots[x+a+(m-1)\,.\,\Delta x]}\right\}$$

$$=\frac{-a\,.\,(m-1)\,.\,\Delta x}{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\,\Delta x)\ldots\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)},$$

d'où on déduit

$$(3)\ldots\Sigma\,\frac{a}{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)}$$

$$=\frac{-1}{(m-1)\,.\,\Delta x}\,.\,\frac{a}{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots[x+a+(m-1)\,.\,\Delta x]}+C;$$

et en multipliant les deux membres par $1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots m$.

$$(4)\,\Sigma\,.\,\frac{a\,(1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots m)}{[\,(x+a+\Delta x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)\,]}$$

$$=\frac{-1}{(m-1)\,.\,\Delta x}\,.\,\frac{a\,(1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots m)}{(x+a+\Delta x)\ldots\ldots\ldots[x+a+(m-1)\,.\,\Delta x]}+D.$$

Pour trouver les sommes des fonctions dont je viens de donner les intégrales, il faut, conformément à ce qui a été démontré dans la séance précédente, ajouter à chaque intégrale la quantité intégrée, ce qui donne

Pour l'équation (1),

$$(5)\ldots S\,.\,\{(x+a+\Delta x)\;(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots\ldots[x+a+m\,.\,\Delta x]\}$$

$$=\left(\frac{1}{(m+1)\,.\,\Delta x}\right)\{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots[x+a+(m+1)\,.\,\Delta x]\}+A;$$

Pour l'équation (2),

$$(6)\ldots S\,.\left\{\frac{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots m}\right\}$$

$$=\frac{\{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots[x+a+(m+1)\,.\,\Delta x]\}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots m\,.\,(m+1)\,\Delta x}+B;$$

Pour l'équation (3),

$$(7)\ldots S\,.\,\frac{a}{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)}$$

$$=\frac{-a}{(m+1)\,.\,\Delta x\{(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)\}}+C;$$

Pour l'équation (4),

$$(8)\ldots S.\ \frac{\alpha\,(1.2.3\ldots\ldots m)}{\{(x+a+\Delta x)\ldots\ldots\ldots\ldots(x+a+m\,\Delta x)\}}$$

$$=\frac{-\alpha\,(1.2.3\ldots\ldots m)}{(m-1).\Delta x\,\{(x+a+2\,\Delta x)\ldots\ldots(x+a+m\,\Delta x)\}}+D.$$

Les constantes des équations (1) et (2), (3) et (4) peuvent se déterminer par la condition que les intégrales sont nulles lorsque $x=0$, ce qui donne

équations (1) et (5) . . . $A=-\frac{a\,(a+\Delta x)\,(a+2\,\Delta x)\ldots\ldots(a+m\,.\,\Delta x)}{(m+1)\,\Delta x}$;

équations (2) et (6) . . . $B=-\frac{a\,(a+\Delta x)\,(a+2\,\Delta x)\ldots\ldots(a+m.\Delta x)}{1.2.3\ldots\ldots(m+1).\Delta x}$;

équations (3) et (7) . . . . . $C=\frac{1}{(m=1)\Delta x}\cdot\frac{\alpha}{(a+\Delta x)\,(a+2\Delta x)\ldots[a+(m-1).\Delta x]}$;

équations (4) et (8) . . . . . $D=\frac{1}{(m-1)\Delta x}\cdot\frac{a\,(1.2.3\ldots\ldots m)}{(a+\Delta x)\,(a+2\Delta x)\ldots[a+(m-1).\Delta x]}$.

Application aux nombres figurés.

Les séries des nombres figurés sont un cas particulier des fonctions que je viens d'intégrer et de sommer ; elles sont données par l'équation (2) en faisant $a=0$ et $\Delta\,x=1$, ce qui donne $A=0$, $B=0$, et on a

Terme général $\frac{(x+1)\,(x+2)\,(x+3)\ldots\ldots\ldots[x+m]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}$;

Terme intégral $\frac{x\,(x+1)\,(x+2)\ldots\ldots\ldots(x+m)}{1.2.3\ldots\ldots(m+1)}$,

Terme sommatoire $\frac{(x+1)\,(x+2)\,(x+3)\ldots\ldots(x+m+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m+1)}$.

On voit que les nombres figurés d'un *ordre* quelconque (l'*ordre* est désigné par le nombre des facteurs) sont intégrés et sommés par ceux d'un ordre immédiatement supérieur ; ainsi les nombres *triangulaires* sont

intégrés et sommés par les nombres *pyramidaux*, comme on le voit par la table suivante déduite des formules que je viens de donner.

Valeurs de x..............	0	1	2	3	4	5	&c.
Terme sommat. $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}$	1	4	10	20	35	56	&c. nomb. pyramidaux.
Terme général.. $\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}$.......	1	3	6	10	15	21	&c. nomb. triangul.[res]
Terme intégral. $\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}$......	0	1	4	10	20	35	&c. nomb. pyramidaux.

Les termes sommatoire et intégral donnent la même série, à la position près des nombres, qui dans le terme intégral sont avancés d'un rang.

Les équations (4) et (8) renferment, comme cas particuliers, les séries composées de fractions dont les dénominateurs sont la suite des nombres figurés; pour les obtenir il faut faire a $= 0$ et $\Delta x = 1$; il en résultera

$$D = \frac{\alpha m}{m-1},$$

et on aura

$$\text{Terme général.} \ldots = \frac{\alpha(1.2.3\ldots\ldots\ldots m)}{\{(x+1)(x+2)\ldots\ldots\ldots(x+m)\}},$$

$$\text{Terme intégral.} \ldots = \frac{\alpha m}{m-1} - \frac{\alpha(1.2.3\ldots m):(m-1)}{(x+1)(x+2)\ldots[x+(m-1)]},$$

$$\text{Terme sommatoire.} \,.\, \frac{\alpha m}{m-1} - \frac{\alpha(1.2.3\ldots m):(m-1)}{(x+2)(x+3)\ldots(x+m)}.$$

Soient, pour exemple, les nombres triangulaires et pyramidaux; en substituant pour x les valeurs successives 0, 1, 2, &c., et faisant $\alpha = 1$, on aura

	Valeurs de x	0	1	2	3	4	&c.
Nombres triangul.	terme intég. $\frac{2}{1} - \frac{1.2}{x+1}$	0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	&c.
	terme gén. $\frac{1.2}{(x+1)(x+2)}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	&c.
	terme som. $\frac{2}{1} - \frac{1.2}{x+2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	&c.
Nomb. pyramidaux.	terme intég. $\frac{3}{2} - \frac{1.3}{(x+1)(x+2)}$	0	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{7}{5}$	&c.
	terme gén. $\frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	&c.
	terme som. $\frac{3}{2} - \frac{1.3}{(x+2)(x+3)}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{30}{21}$	&c.

Il est bon d'observer que plus x augmente, et plus les termes intégral et sommatoire s'approchent d'être égaux à $\frac{m}{m-1}$; ils peuvent, dans tous les cas, en donnant la valeur convenable à x, différer de cette limite $\frac{m}{m-1}$ d'une quantité aussi petite qu'on voudra, mais ils seront toujours au-dessous : on peut donc poser les inégalités suivantes, qui ont lieu quel que soit le nombre des termes des séries dont je viens de traiter :

$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} +$ &c. $< \frac{2}{1}$; terme général $\frac{1.2}{(x+1)(x+2)}$;

$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} +$ &c. $< \frac{3}{2}$; terme général $\frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

$\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} +$ &c. $< \frac{4}{5}$; terme général $\frac{1.2.3.4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$;

$\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} +$ &c. $< \frac{5}{4}$; terme général $\frac{1.2.3.4.5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$.

&c. &c.

Les nombres *figurés* sont ainsi nommés, parce que les trois premiers ordres de ces nombres se déduisent de quelques considérations sur les figures géométriques dont je donnerai une explication sommaire; on a

beaucoup écrit sur leurs propriétés qui peuvent aisément se déduire des formules précédentes ; on trouve leurs termes généraux dans les coëfficiens du binome de Newton.

La suite $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$..... $\frac{1}{x+1}$, la première de celles qui se rapportent à la formule générale des fractions qui ont les nombres figurés pour dénominateurs, donne pour la constante arbitraire D, la valeur $\frac{1}{0}$, et échappe aux formules précédentes de sommation et d'intégration. J'expliquerai dans la suite cette espèce de paradoxe ; cette série qui est représentée par les ordonnées équidistantes menées aux asymptotes de l'hyperbole équilatère, est remarquable en ce qu'elle donne tous les *harmoniques* qui résonnent avec le son fondamental $\frac{1}{1}$; je reviendrai sur cette propriété quand je traiterai de la mécanique du son.

Je parlerai dans la séance prochaine des intégrales et des sommes, dans le cas où les facteurs en progression arithmétique ne croissent pas par degrés égaux à la différence de la variable.

APPLICATION DE LA MÉTHODE

Des Coëfficiens indéterminés à l'intégration des Fonctions rationnelles.

N.° XVII. La méthode des coëfficiens indéterminés, dont nous sommes redevables à Descartes, est une des découvertes les plus ingénieuses et les plus fécondes de l'analyse ; une partie des élèves connaît déjà son usage dans plusieurs problèmes importans, celui entr'autres de la méthode inverse des séries : je ne veux point laisser échapper la première occasion que j'ai d'en faire une application utile. Le but que je me propose dans cette application, est de ramener toute fonction rationnelle de x, sans diviseur variable, à une forme qu'on puisse, intuitivement, différencier ou intégrer; et les fonctions composées de facteurs en progression arithmétique, dont j'ai donné les différentielles et les intégrales, *n.*^{os} *VIII et XIV*, sont très-propres à remplir cette condition.

Soit

Soit une fonction rationnelle

$$\mathrm{a}\,x^{\alpha} + b\,x^{\beta} + c\,x^{\gamma} + \&c.$$

dont α soit le plus grand exposant, et qui offre par conséquent un polynome de la dimension α ; on sait, par ce qui précède, que l'intégrale première de cette fonction sera un polynome de l'ordre $\alpha + 1$, et cette considération fournit l'équation

$$\begin{aligned}(1)\ldots\Sigma\{\mathrm{a}\,x^{\alpha} + b\,x^{\beta} + c\,x^{\gamma} + \&c.\} = {} & A(x+\Delta x)\ (x+2\Delta x)\ (x+3\Delta x)\ldots\ldots[x+(\alpha+1)\Delta x] \\ & + B(x+\Delta x)\ (x+2\Delta x)\ (x+3\Delta x)\ldots\ldots\ldots(\alpha+\alpha\Delta x) \\ & + C(x+\Delta x)\ (x+2\Delta x)\ (x+3\Delta x)\ldots\ldots[x+(\alpha-1).\Delta x] \\ & + D(x+\Delta x)\ (x+2\Delta x)\ (x+3\Delta x)\ldots\ldots[x+(\alpha-2).\Delta x] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + P(x+\Delta x)\ (x+2\Delta x) \\ & + Q(x+\Delta x) \\ & + G\end{aligned}$$

A, B, C, &c. sont des coëfficiens indéterminés, et G est la constante arbitraire qui complète l'intégrale ; différenciant les deux membres de l'équation précédente, on a

$$\begin{aligned}(2)\ldots\mathrm{a}\,x^{\alpha} + b\,x^{\beta} + c\,x^{\gamma} + \&c. = {} & A\,(\alpha+1)\Delta x\{(x+2\Delta x)\ (x+3\Delta x)\ldots[x+(\alpha+1).\Delta x] \\ & + B\,\alpha\Delta x\qquad\{(x+2\Delta x)\ (x+3\Delta x)\ldots(x+\alpha\Delta x) \\ & + C\,(\alpha-1)\Delta x\{(x+2\Delta x)\ (x+3\Delta x)\ldots[x+(\alpha-1)\Delta.x] \\ & + D(\alpha-2)\Delta x\{(x+2\Delta x)\ (x+3\Delta x)\ldots[x+(\alpha-2)\Delta.x] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + 2\,P\Delta x\,(x+2\Delta x) \\ & + Q\Delta x\end{aligned}$$

Effectuant les produits indiqués, faisant passer tous les termes dans un seul membre, ordonnant par rapport aux puissances de x, et égalant séparément à zéro la somme des coëfficiens de chacune de ces puissances, on aura autant d'équations que d'inconnues A, B, C..........Q, qu'on pourra par conséquent déterminer en valeurs de Δx, a, b, c, &c.; et ces valeurs étant substituées dans l'équation (1), l'intégrale $\Sigma\ \{\mathrm{a}\,x^{\alpha} + b\,x^{\beta} + c\,x^{\gamma} + \&c.\}$ sera exprimée en quantités toutes connues.

L'intégration d'un polynome élevé à une puissance telle que $\{\alpha\,x^{\alpha} + b\,x^{\beta} + \&c.\}^{k}$ n'aurait pas plus de difficulté, en développant cette puissance.

La méthode précédente nous offre un moyen de différencier et d'intégrer les produits composés de facteurs en progression arithmétique dont la différence n'est point égale à la variation de x. Soit un semblable produit

$$(x+a)(x+a+b)(x+a+2b)\ldots(x+a+mb)$$

Je fais

$$\begin{aligned}(x+a)(x+a+b)\ldots(x+a+mb) = {} & A(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(m+1).\Delta x] \\ & + B(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots(x+m\Delta x) \\ & + C(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(m-1).\Delta x] \\ & + D(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(m-1).\Delta x] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & + P(x+\Delta x)(x+2\Delta x) \\ & + Q(x+\Delta x) \\ & + R\end{aligned}$$

Je détermine les coëfficiens A, B, C, &c. de la manière indiquée ci-dessus, et d'après la forme donnée à la valeur de $(x+a)(x+a+b)$&c. on peut, à vue, différencier ou intégrer cette valeur par la méthode du *n.° VIII*, ou par celle du *n.° XIV*.

Cas d'intégrabilité des fonctions rationnelles.

L'INTÉGRATION des fonctions rationnelles qui ont des diviseurs variables, suppose généralement qu'elles sont décomposées en fractions partielles ; cette décomposition est une opération importante de l'analyse à laquelle je consacrerai une séance ; mais pour fixer encore un instant l'attention des élèves sur l'usage des coëfficiens indéterminés, je vais, provisoirement, leur indiquer comment on peut s'en servir pour décomposer une fraction.

Soit la fraction $\dfrac{a+bx+cx^2+\ldots\ldots+qx^m}{(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots(x-\alpha^{(m)})}$

qu'on veut réduire en fractions partielles, je fais

$$\frac{a+bx+cx^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+qx^m}{(x-\alpha)(x-\alpha')\ldots\ldots\ldots\ldots(x-\alpha^{(m)})}, = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{x-\alpha'}$$

$$+ \frac{C}{x-\alpha''} + \ldots\ldots + \frac{Q}{x-\alpha^{(m)}}$$

J'additionne les fractions du 2.e membre, au moyen de quoi le dénominateur peut disparaître dans les deux membres, et l'équation devient de la forme

$$a + bx + cx^2, \&c. = AX + BX' + CX'', \&c.$$

dans laquelle on a

$$X = (x - a')\ (x - a'') \ldots\ldots\ldots (x - a^{(m)})$$
$$X' = (x - a)\ (x - a'') \ldots\ldots\ldots (x - a^{(m)})$$
$$X'' = (x - a)\ (x - a')\ (x - a''') \ldots\ldots (x - a^{(m)})$$

....

....

$$X^{(m)} = (x - a)\ (x - a') \ldots\ldots (x - a^{(m-1)})$$

Je fais passer tous les termes d'un seul côté, j'effectue tous les produits, et après avoir ordonné par rapport à x, j'égale séparément à zéro les coëfficiens de chacune des puissances de x, ce qui, comme précédemment, me donne autant d'équations que d'inconnues A, B, C, &c.

Il y a des moyens plus abrégés d'avoir immédiatement l'un quelconque des numérateurs A, B, C, &c. Je les exposerai aux élèves, lorsque je reviendrai sur cette matière pour la traiter avec plus de détail.

Supposant donc qu'une fraction rationnelle soit décomposée en fractions simples, on ne pourra point obtenir l'intégrale algébrique de chacune d'elles en particulier; mais on parviendra à les intégrer par couple toutes les fois qu'il sera possible d'obtenir des agrégations binaires de la forme

$$\frac{\mu}{x + k + \Delta x} - \frac{\mu}{x + k};$$

car il est évident que cette expression est la valeur de la différence de $\frac{\mu}{x+k}$, et qu'ainsi on a

$$\Sigma \left\{ \frac{\mu}{x + k + \Delta x} - \frac{\mu}{x + k} \right\} = \frac{\mu}{x + k} + G.$$

Je donnerai sur le tableau des exemples d'intégrations qui s'effectuent par cette méthode.

SOMMATION DES PRODUITS *1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, &c. &c. d'une suite de quantités croissant par intervalles égaux.*

N.° XVIII. La solution générale du problème énoncé dans le titre de ce numéro, n'est pas sans difficulté lorsqu'on veut y parvenir par la marche ordinaire; mais au moyen d'une considération très-simple, dont un mémoire de Lagrange m'a suggéré l'idée (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, *année 1771*), on obtient aisément des formules très-élégantes. J'aurai bientôt occasion d'en faire usage dans un exemple que je donnerai de l'intégration des équations en différences partielles.

Soit une suite de quantités croissant par intervalles égaux

$$a + \Delta x;\; a + 2\Delta x;\; a + 3\Delta x; \ldots \ldots a + (m - 1) . \Delta x$$

dont il s'agit de trouver les produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, &c.
je nomme respectivement ces produits . . A', A'', A''', ... $A^{(m-1)}$,
et j'observe qu'une équation en x, du degré $m - 1$, dont les racines seraient $-(a + \Delta x)$, $-(a + 2\Delta x)$ . . . . $-[a + (m - 1) . \Delta x]$ aurait pour coëfficiens successifs les quantités A', A'', A''' . . . . $A^{(m-1)}$.
De plus cette équation, qui serait de la forme

$$x^{m-1} + A' x^{m-2} + A'' x^{m-3} + \ldots \ldots + A^{(m-1)},$$

devrait, d'après la théorie connue, être le résultat des produits

$$(x + a + \Delta x)\; (x + a + 2\Delta x)\; (x + a + 3\Delta x) \ldots \ldots \ldots [x + a + (m - 1) . \Delta x];$$

on aurait donc l'équation identique

$$(1) \ldots \ldots x^{m-1} + A' x^{m-2} + A'' x^{m-3} + \ldots \ldots \ldots \ldots + A^{(m-1)} = (x + a + \Delta x)\; (x + a + 2\Delta x)\; (x + a + 3\Delta x) \ldots . [x + a + (m - 1) . \Delta x].$$

Cette équation subsistera encore si je mets dans chaque membre $x + \Delta x$ au lieu de x, et j'aurai pour équation variée,

$$(2) \ldots (x + \Delta x)^{m-1} + A' (x + \Delta x)^{m-2} + A'' (x + \Delta x)^{m-3} + \ldots + A^{(m-1)} = (x + a + 2\Delta x)\; (x + a + 3\Delta x) \ldots (x + a + m\Delta x).$$

Multipliant l'équation (1) par $x+\mathrm{a}+m\,\Delta\,x$, et l'équation (2) par $x+\mathrm{a}+\Delta\,x$, les deuxièmes membres des équations produits seront les mêmes, et j'aurai entre les premiers membres l'égalité

$$(x+\mathrm{a}+m\,\Delta\,x)\ \{x^{m-1}+A'\,x^{m-2}+A''\,x^{m-3}+\ldots\ldots+A^{(m-1)}\}=$$
$$(x+\mathrm{a}+\Delta\,x)\ \{(x+\Delta\,x)^{m-1}+A'\,(x+\Delta\,x)^{m-2}+A''\,(x+\Delta\,x)^{m-3}+\ldots+A^{(m-1)}\}$$

qui peut prendre la forme

$$x^m+\left\{\begin{array}{l}A'\\+\mathrm{a}\\+m\,\Delta\,x\end{array}\right\}x^{m-1}+\left\{\begin{array}{l}A''\\+A'\,\mathrm{a}\\+A'\,m\,\Delta\,x\end{array}\right\}x^{m-2}+\left\{\begin{array}{l}A'''\\+A''\,\mathrm{a}\\+A''\,m\,\Delta\,x\end{array}\right\}x^{m-3}+\ldots+\left\{\begin{array}{l}A^{(m-1)}\\+A^{(m-2)}\,\mathrm{a}\\+A^{(m-2)}\,m\,\Delta\,x\end{array}\right\}x+A^{(m-1)}(\mathrm{a}+m\Delta x)=$$

$$(x+\Delta\,x)^m+\left\{\begin{array}{l}A'\\+\mathrm{a}\end{array}\right\}(x+\Delta\,x)^{m-1}+\left\{\begin{array}{l}A''\\+A'\,\mathrm{a}\end{array}\right\}(x+\Delta\,x)^{m-2}+\left\{\begin{array}{l}A'''\\+A''\,\mathrm{a}\end{array}\right\}(x+\Delta x)^{m-3}\ldots+\left\{\begin{array}{l}A^{(m-1)}\\+A^{(m-2)}\end{array}\right\}(x+\Delta x)+A^{(m-1)}\mathrm{a}$$

$$=x^m+m.x^{m-1}\Delta\,x+\frac{m.m-1}{1.2}.x^{m-2}(\Delta x)^2+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}.\ x^{m-3}\ (\Delta x)^3+\ldots\ldots+(\Delta x)^m$$
$$+\left\{\begin{array}{l}A'\\+\mathrm{a}\end{array}\right\}x^{m-1}+\left\{\begin{array}{l}A'\\+\mathrm{a}\end{array}\right\}(m-1).x^{m-2}.(\Delta x)+\left\{\begin{array}{l}A'\\+\mathrm{a}\end{array}\right\}.\ \frac{m-1.m-2}{1.2}x^{m-3}\,(\Delta\,x)^2+\ldots+(A'+\mathrm{a}).(\Delta x)^{m-1}$$
$$+\left\{\begin{array}{l}A''\\+A'\mathrm{a}\end{array}\right\}.\ x^{m-2}\quad+\left\{\begin{array}{l}A''\\+A'\mathrm{a}\end{array}\right\}\ (m-2)\ x^{m-3}\ (\Delta\,x)\quad+\ldots+(A''+A'\mathrm{a}).(\Delta x)^{m-2}$$
$$+\left\{\begin{array}{l}A'''\\+A''\,\mathrm{a}\end{array}\right\}.\quad x^{m-3}\quad+\ldots+(A'''+A''\mathrm{a}).(\Delta x)^{m-3}$$

&c.

L'équation étant identique, c'est-à-dire, ne présentant respectivement, dans l'un et l'autre membre, que des quantités identiques sous des formes différentes, les coèfficiens des mêmes puissances de x doivent être égaux de part et d'autre, ce qui fournit les équations

$$1 = 1$$

$$m\,\Delta x + a + A' = m\,\Delta x + a + A'$$

$$A'\,m\,\Delta x + A'\,a + A'' = \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}\,\Delta x^3 + (A' + a)\,(m-1)\,\Delta x + A'\,a + A''$$

$$A''\,m\,\Delta x + A''\,a + A''' = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\Delta x^2 + (A' + a)\,\frac{(m-1)\,(m-2)}{1 \cdot 2}\,\Delta x^2 + (A'' + A'\,a)\,(m-2)\,\Delta x + A''\,a + A'''$$

$$A'''\,m\,\Delta x + A''\,a + A^{IV} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\,\Delta x^4 + (A' + a)\,\frac{(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\Delta x^3 + (A'' + A'\,a)\,\frac{(m-2)\,(m-3)}{1 \cdot 2}\,\Delta x^2 + (A''' + A''\,a)\,(m-3)\,\Delta x + A'''\,a + A^{IV}$$

&c. &c.

équations dont la loi est évidente et qui donnent

$$1 \quad A' = (m-1)\,a + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \cdot \Delta x$$

$$2 \quad A'' = (m-2)\,A'\,a + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2}\,(A' + a)\,\Delta x + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,(\Delta x)^2$$

$$3 \quad A''' = (m-3)\,A''\,a + \frac{m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2}\,(A'' + A'\,a)\,\Delta x + \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,(A' + a)\,(\Delta x)^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\,(\Delta x)^3$$

$$4 \quad A^{IV} = (m-4)\,A'''\,a + \frac{m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2}\,(A''' + A''\,a)\,\Delta x + \frac{m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,(A'' + A'a)\,(\Delta x)^2 + \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\,(A' + a)\,\Delta x^3 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\,(\Delta x)^4$$

&c &c.

valeurs dont la loi est pareillement intuitive. Si on fait a $=$ o et $\Delta x = 1$, les équations précédentes donneront les produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, &c. des nombres naturels depuis 1 jusqu'à $m - 1$; c'est le cas du mémoire de Lagrange ci-dessus cité, et au moyen des substitutions que je viens d'indiquer, on aura des formules identiques avec les siennes; savoir :

$$1\ A' = \frac{m . m - 1}{1 . 2}$$

$$2\ A'' = \frac{m - 1 . m - 2}{1 . 2} A' + \frac{m . m - 1 . m - 2}{1 . 2 . 3}$$

$$3\ A''' = \frac{m - 2 . m - 3}{1 . 2} A'' + \frac{m - 1 . m - 2 . m - 3}{1 . 2 . 3} A' + \frac{m . m - 1 . m - 2 . m - 3}{1 . 2 . 3 . 4}$$

$$4\ A^{\text{IV}} = \frac{m - 3 . m - 4}{1 . 2} A''' + \frac{m - 2 . m - 3 . m - 4}{1 . 2 . 3} A'' + \frac{m - 1 . m - 2 . m - 3 . m - 4}{1 . 2 . 3 . 4} A' + \frac{m . m - 1 . m - 2 . m - 3 . m - 4}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}$$

&c. &c.

Si on suppose, ainsi que l'exemple que j'ai annoncé l'exigera, que la série des nombres naturels commence au nombre 2, on aura a $= 1$, $\Delta x = 1$; $x = a + (m - 1) . \Delta x = m$; ce qui, toutes substitutions et réductions faites, donnera

$$A' = \frac{x^2 + x - 2}{1 . 2}$$

$$A'' = \frac{3 x^4 + 2 x^3 - 15 x^2 - 14 x + 24}{2 . 3 . 4}$$

$$A''' = \frac{3 x^6 - x^5 - 9 x^4 - 3 x^3 + 32 x^2 + 28 x - 48}{2 . 4 . 6}$$

&c.

INTÉGRALES ET SOMMES DE DIFFÉRENS ORDRES.

N.° XIX. Les applications de la méthode inverse des différences que j'ai présentées aux élèves, jusqu'à présent, ont eu pour objet la solution de cette question: *Étant donné le terme général d'une série, trouver le terme général d'une autre série dont la donnée contiendrait les différences premières;* mais d'après la théorie exposée dans le *n.° XIV*, fondée sur la génération des différences de tous les ordres, *n.° VII*, on voit que ce n'est là qu'une partie du problème de l'intégration des fonctions, qui, pris dans toute son étendue, consiste à trouver les termes généraux d'un nombre quelconque de séries, dont la proposée contienne respectivement les différences 1.ere, 2.e, 3.e, &c., et qui soient par conséquent aussi différences les unes des autres. Cette génération a été établie dans le *n.° 1.er*, où j'ai montré la nécessité d'introduire un nombre de constantes arbitraires égal au quantième de l'intégrale, et où j'ai donné la notation par laquelle on désigne les intégrales successives.

Je vais d'abord expliquer de quelle manière les diverses constantes entrent dans l'intégrale finale. Soit la première intégrale d'une fonction de x

$$\Sigma(\varphi x) = F^{(1)}(x) + A',$$

on aura pour les intégrales suivantes

$$\Sigma^2(\varphi x) = \Sigma\{F^{(1)}(x) + A'\} + A'' = F^{(2)}(x) + \Sigma A' + A''$$
$$\Sigma^{(3)}(\varphi x) = F^{(3)}(x) + \Sigma^2 A' + \Sigma A'' + A'''$$
$$\Sigma^{(4)}(\varphi x) = F^{(4)}(x) + \Sigma^3 A' + \Sigma^2 A'' + \Sigma A''' + A^{\text{IV}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma^{(n)}(\varphi x) = F^{(n)}(x) + \Sigma^{(n-1)}A' + \Sigma^{(n-2)}A'' + \Sigma^{(n-3)}A''' + \ldots + A^{(n)}.$$

J'observe maintenant que $A' = \Sigma\, 0$, et que tous les termes affectés du signe d'intégration et ajoutés à $F^{(n)}(x)$ dans le 2.e membre, ne sont autre chose que l'intégrale $\Sigma^{(n)}\, 0$ rendue complète, c'est-à-dire, dans laquelle on a successivement introduit toutes les constantes nécessaires; de-là

de-là dérive l'expression suivante, de l'intégrale complète, de l'ordre n, d'une fonction de x,

$$\Sigma^{(n)}\,(\varphi x) = F^{(n)}\,(x) + \Sigma^{(n)}\,o,$$

$F^{(n)}\,(x)$ dérivant des n intégrations de φx, sans ajouter de constantes qui sont toutes comprises dans le terme $\Sigma^{(n)}\,o$.

On voit par ce qui précède que la partie de l'intégrale finale qui renferme les constantes arbitraires est une fonction rationnelle de x, sans diviseurs variables, de la dimension $n - 1$, c'est-à-dire, qu'on a en général

$$\Sigma^{n}\,(\varphi x) = F^{(n)}\,(x) + \alpha' x^{n-1} + \alpha'' x^{n-2} + \alpha''' x^{n-3} + \ldots + \alpha^{(n)},$$

équation dans laquelle un nombre n de différenciations fera disparaître toutes les quantités ajoutées à $F^{(n)}\,(x)$ dans le 2.e membre.

Les constantes $\alpha', \alpha'' \ldots \alpha^{(n)}$ doivent se déterminer par un nombre n de conditions particulières auxquelles la question dont il s'agit exige qu'on satisfasse; je traiterai bientôt de cet objet.

J'ai donné, n.° VIII, les différentielles de tous les ordres, et n.° XVI, l'intégrale et la somme premières de certaines fonctions algébriques composées de produits dont les facteurs croissent en progression arithmétique; voici les expressions de leurs intégrales d'un ordre quelconque,

$$\Sigma^{(n)}\,\{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)\}$$

$$= \frac{[x+a-(n-1)].\Delta x]\,[x+a-(n+2).\Delta x]\ldots(x+a)\,(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots(x+a+m\Delta x)}{\{(m+1)\,(m+2)\,(m+3)\ldots\ldots(m+n)\}\,(\Delta x)^{n}} + \Sigma^{(n)}\,o.$$

$$\Sigma^{(n)}.\,\frac{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)}{1.2.3\ldots\ldots m}$$

$$= \frac{[x+a-(n-1).\Delta x]\,[x+a-(n-2).\Delta x]\ldots(x+a)\,(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots(x+a+m\Delta x)}{\{1.2.3\ldots\ldots m\,(m+1)\,(m+2)\,(m+3)\ldots\ldots(m+n)\}\,(\Delta x)^{n}} + \Sigma^{(n)}.\,o.$$

$$\Sigma^{(n)}.\,\frac{\alpha}{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)}$$

$$= \frac{\pm\alpha : \{(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots\ldots(m-n)\}\,(\Delta x)^{n}}{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\,(x+a+3\Delta x)\ldots\ldots[x+a+(m-n).\Delta x]} + \Sigma^{(n)}.\,o.$$

$$\Sigma^{(n)}\,\frac{\alpha\,(1.2.3\ldots\ldots m)}{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)}$$

$$= \frac{\pm\alpha\,(1.2.3\ldots m) : \{(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots\ldots(m-n)\}\,(\Delta x)^{n}}{(x+a+\Delta x)\,(x+a+2\Delta x)\,(x+a+3\Delta x)\ldots\ldots[x+a+(m-n).\Delta x]} + \Sigma^{(n)}\,o.$$

Les signes + et − ont lieu respectivement, lorsque n est pair ou impair.

Les expressions des sommes de l'ordre n sont

$$S^{(n)}.\left\{(x+a+\Delta x)(x+a+2\Delta x)(x+a+3\Delta x)\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)\right\}$$

$$=\frac{[x+a-(a-2).\Delta x][x+a-(n-3)\Delta x]\ldots[x+a][x+a+\Delta x]\ldots[x+a+(m+1)\Delta x]}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)\ldots\ldots(m+n)\Delta x^{n}}+\Sigma^{(n)}.0$$

$$S.^{(n)}\left\{\frac{(x+a+\Delta x)(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)}{1.2.3\ldots\ldots m}\right\}$$

$$=\frac{[+a-(n-2)\Delta x][x+a-(n-3.\Delta x]\ldots\ldots[x+a]\ldots\ldots[x+a+(m+1)\Delta x]}{1.2.3.4\ldots\ldots m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n)\Delta x^{n}}+\Sigma^{(n)}.0$$

$$S.^{(n)}\left\{\frac{\alpha}{(x+a+\Delta x)(x+a+2\Delta x)\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)}\right\}$$

$$=\frac{\pm\alpha:(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n)\Delta x^{n}.}{[x+a+2\Delta x][x+a+3\Delta x]\ldots[x-a+(m-n)\Delta x].\left\{x+a+[m-(n-1)]\Delta x\right\}}+\Sigma^{(n)}.0$$

$$S.^{(n)}\left\{\frac{\alpha(1.2.3\ldots\ldots m)}{(x+a+\Delta x).(x+a+2\Delta)\ldots\ldots(x+a+m\Delta x)}\right\}$$

$$=\frac{\pm\alpha(1.2.3\ldots\ldots m):(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n)\Delta x^{n}.}{[x+a+2\Delta x][x+a+3\Delta x]\ldots[x+a+(m-n)\Delta x]\left\{x+a+[m-(n-1)]\Delta x\right\}}+\Sigma^{(n)}.0$$

Les signes $+$ et $-$ ont lieu respectivement, lorsque n est pair ou impair.

Il est aisé d'apercevoir, à l'inspection des formules précédentes, que les intégrales et les sommes n^{es} des nombres figurés de l'ordre n donnent des nombres figurés de l'ordre $m+n$, et que les intégrales et les sommes de même quantième des fractions qui ont ces nombres pour dénominateurs donnent des fractions qui ont au dénominateur des nombres figurés de l'ordre $m-n$; la propriété inverse a lieu pour les différentielles de l'ordre n.

J'ai fait voir, *n.° XVII*, comment on ramène toute fonction rationnelle de x, sans diviseur variable, à la forme d'un produit dont les facteurs croissent par intervalles égaux à Δx, et cette méthode fournit un moyen très-commode d'avoir l'intégrale ou la somme, d'un ordre quelconque, d'une pareille fonction; c'est même sous ce point de vue général qu'elle doit véritablement abréger le calcul; car, lorsqu'il ne s'agit que des intégrales et des sommes premières, il peut souvent arriver qu'on ne gagne rien à faire changer de forme à la fonction.

Je ne dois point omettre ici un cas des fonctions transcendantes, qui donne une expression fort simple pour les intégrales et les sommes de

tous les ordres; c'est celui de la quantité exponentielle a^x; on a vu, *n.° IX*, qu'en faisant

$$A = \frac{\Delta x \log. a}{1} + \frac{(\Delta x)^2 \log.^2 a}{1.2} + \frac{(\Delta x)^3 \log.^3 a}{1.2.3} + \&c.$$

on avait

$$\Delta^{(n)} a^x = A^n a^x,$$

et on déduit facilement de cette équation

$$\Sigma^{(n)} a^x = \frac{a^x}{A^n} + \Sigma^{(n)}. \ o.$$

Je n'entrerai pas dans de plus grands détails sur cette matière, les applications précédentes étant très-propres à remplir mon objet principal, qui est de donner aux élèves le véritable esprit des méthodes directe et inverse des différences, en leur faisant apercevoir la chaîne, non interrompue, qui lie les opérations de ces deux méthodes.

TRANSFORMATIONS RÉCIPROQUES

Des Transcendantes imaginaires en Transcendantes réelles ; Forme générale des Facteurs doubles qui donnent les imaginaires ; Détermination des Facteurs de $x^\mu \pm \varrho^\mu$; Théorème de Côtes, &c.

La théorie que je vais exposer sert de base aux recherches les plus profondes et les plus curieuses de l'analyse ; les ouvrages classiques ordinaires n'offrent sur ce qui y est relatif que des notions assez imparfaites. Ce motif et l'importance de la matière m'engagent à la traiter avec quelques détails avant de parler des équations différentielles, dont elle est un préliminaire indispensable. N.° XX.

Si on fait le produit des quantités $\cos. A \pm \sin. A \sqrt{(-1)}$ & $\cos. A' \pm \sin. A' \sqrt{(-1)}$, et qu'on ait égard aux formules que j'ai démontrées

n.° XI, qui donnent les valeurs du sinus et du cosinus de la somme de deux arcs, on trouvera

$$(1) \ldots\ldots [\text{cos.}\, A \pm \text{sin.}\, A \sqrt{(-1)}]\, [\text{cos.}\, A' \pm \text{sin.}\, A' \sqrt{(-1)}] = \text{cos.}\, (A + A') \pm \text{sin.}\, (A \pm A') \sqrt{(-1)}.$$

Multipliant les deux membres de cette équation par $\text{cos.}\, A'' \pm \text{sin.}\, A'' \sqrt{(-1)}$, il vient

$$[\text{cos.}\, A \pm \text{sin.}\, A \sqrt{(-1)}]\, [\text{cos.}\, A' \pm \text{sin.}\, A' \sqrt{(-1)}]\, [\text{cos.}\, A'' \pm \text{sin.}\, A'' \sqrt{(-1)}] = \{\text{cos.}\, (A + A') \pm \text{sin.}\, (A + A') \sqrt{(-1)}\}\, [\text{cos.}\, A'' \pm \text{sin.}\, A'' \sqrt{(-1)}].$$

Le deuxième membre de cette équation doit, d'après la propriété énoncée par l'équation (1), se réduire à $\text{cos.}\, (A + A' + A'') \pm \text{sin.}\, (A + A' + A'') \sqrt{(-1)}$, en considérant $A + A'$ comme le premier arc, et A'' comme le deuxième arc; d'où

$$[\text{cos.}\, A \pm \text{sin.}\, A \sqrt{(-1)}]\, [\text{cos.}\, A' \pm \text{sin.}\, A' \sqrt{(-1)}]\, [\text{cos.}\, A'' \pm \text{sin.}\, A'' \sqrt{(-1)}] = \text{cos.}\, (A + A' + A'') \pm \text{sin.}\, (A + A' + A'') \sqrt{(-1)}.$$

Multipliant les deux membres de cette équation par $\text{cos.}\, A''' \pm \text{sin.}\, A''' \sqrt{(-1)}$, et faisant encore au deuxième membre de l'équation produit l'application de la propriété énoncée par l'équation (1), on aura

$$[\text{cos.}\, A \pm \text{sin.}\, A \sqrt{(-1)}]\, [\text{cos.}\, A' \pm \text{sin.}\, A' \sqrt{(-1)}]\, [\text{cos.}\, A'' \pm \text{sin.}\, A'' \sqrt{(-1)}]\, [\text{cos.}\, A''' \pm \text{sin.}\, A''' \sqrt{(-1)}] = \text{cos.}\, (A + A' + A'' + A''') \pm \text{sin.}\, (A + A' + A'' + A''') \sqrt{(-1)};$$

en suivant la même marche, on trouvera généralement

$$(2) \ldots\ldots [\text{cos.}\, A \pm \text{sin.}\, A \sqrt{(-1)}]\, [\text{cos.}\, A' \pm \text{sin.}\, A' \sqrt{(-1)}] \ldots [\text{cos.}\, A^{(n-1)} \pm \text{sin.}\, A^{(n-1)} \sqrt{(-1)}] = \text{cos.}\, (A + A' + A'' + \ldots + A^{(n-1)}) \pm \text{sin.}\, (A + A' + A'' + \ldots + A^{(n-1)}) \sqrt{(-1)}.$$

Supposons maintenant tous les arcs A, A', A'', &c. égaux, et l'équation (2) deviendra

$$(3) \ldots [\text{cos.}\, A \pm \text{sin.}\, A \sqrt{(-1)}]^n = \text{cos.}\, (n A) \pm \text{sin.}\, (n A) \sqrt{(-1)},$$

ce qui fournit un des théorèmes les plus beaux et les plus importans de l'analyse.

L'ambiguité des signes fournit les deux équations partielles

$$[\text{cof. } A + \text{fin. } A \sqrt{(-1)}]^n = \text{cof. }(nA) + \text{fin. }(nA)\sqrt{(-1)}$$
$$[\text{cof. } A - \text{fin. } A \sqrt{(-1)}]^n = \text{cof. }(nA) - \text{fin. }(nA)\sqrt{(-1)}$$

qui ajoutées et soustraites l'une de l'autre, donnent

$$(4) \ldots \text{cof. }(nA) = \frac{[\text{cof. } A + \text{fin. } A\sqrt{(-1)}]^n + [\text{cof. } A - \text{fin. } A\sqrt{(-1)}]^n}{2}$$

$$(5) \ldots \text{fin. }(nA) = \frac{[\text{cof. } A + \text{fin. } A\sqrt{(-1)}]^n - [\text{cof. } A - \text{fin. } A\sqrt{(-1)}]^n}{2\sqrt{(-1)}}$$

J'observe que si on développe les puissances n des binomes, les quantités affectées d'imaginaires disparaîtront, et on aura pour évaluer cof. (nA) et fin. (nA) précisément les mêmes formules que j'ai données dans le *n.° XI*; on peut donc démontrer ces formules en faisant usage des imaginaires, et c'est aussi la méthode qu'ont employée Euler et d'autres auteurs.

Je fais $nA = z$, et je suppose n et A variables chacun en particulier, mais de manière que le produit nA ou z reste toujours le même; cette valeur de nA me donne

$$(6) \ldots \text{cof. } z = \frac{[\text{cof. }\frac{z}{n} + \text{fin. }\frac{z}{n}\sqrt{(-1)}]^n + [\text{cof. }\frac{z}{n} - \text{fin. }\frac{z}{n}\sqrt{-(1)}]^n}{2}$$

$$(7) \ldots \text{fin. } z = \frac{[\text{cof. }\frac{z}{n} + \text{fin. }\frac{z}{n}\sqrt{(-1)}]^n - \text{cof. }\frac{z}{n} - \text{fin. }\frac{z}{n}\sqrt{(-1)}]^n}{2 \cdot \sqrt{(-1)}}$$

Je remarque maintenant qu'à mesure que A diminue et n augmente, ces équations s'approchent de devenir

$$(8) \ldots \text{cof. } z = \frac{[1 + \frac{z\sqrt{(-1)}}{n}]^n + [1 - \frac{z\sqrt{(-1)}}{n}]^n}{2}$$

$$(9) \ldots \text{fin. } z = \frac{[1 + \frac{z}{n}\sqrt{(-1)}]^n - [1 - \frac{z}{n}\sqrt{(-1)}]^n}{2\sqrt{(-1)}}$$

D'un autre côté, j'ai démontré précédemment, n°. x, que y et $y^{(n)}$ étant deux ordonnées à la logarithmique, séparées par l'intervalle $n \Delta x = \delta x$, A la base du système, et M' la sous-sécante qui correspond à Δx, on avait $\frac{y^{(n)}}{y} = (1 + \frac{\Delta x}{M'})^n$; si on fait $y = 1$, auquel cas $\delta x = \log. y^{(n)}$ et $y^{(n)} = A^{\delta x}$, *(voyez le n.° cité)*, il vient $A^{\delta x} = (1 + \frac{1}{M'} \cdot \frac{\delta x}{n})^n$; or, le système étant celui des logarithmes hyperboliques, à mesure que n augmente, la sous-sécante M' s'approche d'être la sous-tangente, $M = 1$, c'est-à-dire que l'équation précédente tend à devenir

$$(10) \ldots A^{\delta x} = (1 + \frac{\delta x}{n})^n$$

ou, comme l'incrément δx peut être positif ou négatif,

$$(11) \ldots A^{\pm \delta x} = (1 \pm \frac{\delta x}{n})^n.$$

La quantité $z \sqrt{(-1)}$ représente, dans les équations (1) et (9), le δx de ces dernières, d'où il suit que dans les équations (6) et (7) la limite de toutes les diminutions de A et des augmentations de n, $n\,A$ ou z restant le même, donne les équations (8) et (9), qui, comparées à celles (10) et (11), et en écrivant e au lieu de A conformément à l'usage habituel des géomètres, se changent en

$$(12) \ldots \text{cos. } z = \frac{e^{z\sqrt{(-1)}} + e^{-z\sqrt{(-1)}}}{2}$$

$$(13) \ldots \text{sin. } z = \frac{e^{z\sqrt{(-1)}} - e^{-z\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}.$$

Théorèmes dont l'usage est très-fréquent dans l'analyse, au moyen desquels on exprime en sinus et cosinus réels les exponentielles imaginaires.

Les équations (12) et (13) donnent par des additions et soustractions

$$(14) \ldots e^{z\sqrt{(-1)}} = \text{cos. } z + \text{sin. } z \sqrt{(-1)}$$

$$(15) \ldots e^{-z\sqrt{(-1)}} = \text{cos. } z - \text{sin. } z \sqrt{(-1)}$$

$\pm z\sqrt{(-1)}$ est le logarithme hyperbolique de $e^{\pm z\sqrt{(-1)}}$; prenant donc les logarithmes de chaque membre, on a

$$(16)\ldots z = \frac{\log.\,[\,\text{cos}.\,z + \text{sin}.\,z\,\sqrt{(-1)}\,]}{\sqrt{(-1)}}$$

$$(17)\ldots z = \frac{-\log.\,[\,\text{cos}.\,z - \text{sin}.\,z\,\sqrt{(-1)}\,]}{\sqrt{(-1)}}$$

Additionnant les deux équations et observant que la différence de deux logarithmes est le logarithme du quotient :

$$(18)\ldots z = \frac{1}{2\sqrt{(-1)}}\,.\,\log.\left\{\frac{\text{cos}.\,z + \text{sin}.\,z\,\sqrt{(-1)}}{\text{cos}.\,z - \text{sin}.\,z\,\sqrt{(-1)}}\right\}$$

Équation au moyen de laquelle on exprime les logarithmes imaginaires en arcs de cercles réels.

De la forme générale des facteurs doubles dont la résolution en facteurs simples donne des quantités imaginaires.

SOIT en général le facteur double,

$$xx + px + q$$

Ce trinome est le produit des facteurs simples

$$x + \tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{4}pp - q)}$$
$$x + \tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}pp - q)}$$

qui seront réels, 1.° lorsque q sera négatif; 2.° lorsqu'on aura $\frac{1}{2}pp > q$; mais lorsque q étant positif on a $\frac{1}{4}pp < q$, les facteurs sont imaginaires.

Ce dernier cas peut être représenté généralement en donnant au facteur double la forme

$$xx - 2k\rho x + \rho\rho \ldots \left\{\begin{array}{l}\rho \text{ est une quantité réelle quelconque} \\ k < 1\end{array}\right.$$

dont les facteurs

$$x - \rho\,\{k + \sqrt{(k^2 - 1)}\}$$
$$x - \rho\,\{k - \sqrt{(k^2 - 1)}\}$$

sont nécessairement imaginaires, puisque $k^2 - 1$ est une quantité négative.

Puisque le nombre k est plus petit que l'unité, on peut toujours le représenter par le sinus ou le cosinus d'un certain arc. Soit donc

$$k = \text{cos.}\ \varphi$$

on aura pour le facteur double

$$xx - 2\varrho x \text{ cos. } \varphi + \varrho\varrho$$

dont les facteurs simples seront, en observant que $\text{cos.}^2 \varphi - 1 = -\text{sin.}^2 \varphi$,

$$x - \varrho\{\text{cos.}\,\varphi + \text{sin.}\,\varphi\sqrt{(-1)}\}$$
$$x - \varrho\{\text{cos.}\,\varphi - \text{sin.}\,\varphi\sqrt{(-1)}\}$$

Lorsque $\varphi = 0$, on a $\text{cos.}\,\varphi = 1$, $\text{sin.}\,\varphi = 0$, les facteurs deviennent..... $\begin{cases} x - \varrho \\ x - \varrho \end{cases}$

Lorsque $\varphi = \frac{1}{4}$ circonf. on a $\text{cos.}\,\varphi = 0$, $\text{sin.}\,\varphi = 1$, les facteurs deviennent $\begin{cases} x + \varrho\sqrt{(-1)} \\ x - \varrho\sqrt{(-1)} \end{cases}$

Lorsque $\varphi = \frac{1}{2}$ circonf. on a $\text{cos.}\,\varphi = -1$, $\text{sin.}\,\varphi = 0$, les facteurs deviennent $\begin{cases} x + \varrho \\ x + \varrho \end{cases}$

Pour déterminer les quantités qui doivent représenter ϱ et φ dans un trinome $x^2 + \alpha x + \beta$, à facteurs imaginaires, on aura les équations

$$\varrho = \sqrt{(\beta)}\,;\ \text{cos.}\,\varphi = \frac{-\alpha}{2\sqrt{(\beta)}}.$$

En général, lorsque φ est égal à un multiple de la demi-circonférence, on a $\text{cos.}\,\varphi = \pm 1$ et le facteur double $xx - 2\varrho x \text{ cos. } \varphi + \varrho\varrho$ devient un quarré parfait $x^2 \pm 2\varrho x + \varrho\varrho$ dont la racine est $x \pm \varrho$.

De la détermination des Facteurs du Binome $x^\mu \pm \varrho^\mu$.

JE crois qu'il est indispensable de mettre sous les yeux des élèves une des applications les plus intéressantes de la théorie que je viens d'exposer, qui consiste dans la recherche des facteurs du binome $x^\mu \pm \varrho^\mu$, dont on fait un usage fréquent dans l'analyse.

Je prends d'abord le cas où les deux termes sont positifs; la détermination des facteurs se réduisant à trouver les racines d'une équation, il faut supposer

$$x^\mu + \varrho^\mu = 0$$

Je résous ensuite l'équation $xx - 2\varrho x \text{ cos. } \varphi + \varrho\varrho = 0$, en considérant le trinome $xx - 2\varrho x \text{ cos. } \varphi + \varrho\varrho$ comme un des facteurs doubles

doubles de $x^\mu + \varrho^\mu$, φ devant être déterminé d'après cette hypothèse, et j'ai

$$x = \varrho \cos. \varphi \pm \varrho \sin. \varphi \sqrt{(-1)},$$

d'où par l'équation (3) je conclus

$$x^\mu = \varrho^\mu \cos. (\mu \varphi) \pm \varrho^\mu \sin. (\mu \varphi) \sqrt{(-1)}.$$

Substituant cette valeur dans $x^\mu + \varrho^\mu = 0$, il vient après la division par ϱ^μ

$$\cos. (\mu \varphi) \pm \sin. (\mu \varphi) \sqrt{(-1)} + 1 = 0,$$

équation qui donne $\{\cos. (\mu \varphi) + 1\}^2 = - \sin.^2 (\mu \varphi)$, d'où on a, en observant que $\cos.^2 (\mu \varphi) + \sin.^2 (\mu \varphi) = 1$,

$$\cos. (\mu \varphi) + 1 = 0, \text{ ou } \cos. (\mu \varphi) = -1,$$

et par conséquent . . . . $\sin. (\mu \varphi) = 0$.

Ainsi pour que $x x - 2 \varrho x \cos. \varphi + \varrho \varrho$ soit réellement, comme je l'ai supposé, un facteur double de $x^\mu + \varrho^\mu$, il faut donner à φ une valeur telle qu'il en résulte $\cos. (\mu \varphi) = -1$; or π étant la demi-circonférence et ω un nombre entier, on a, pour toutes les valeurs de ω, $\cos. \{(2\omega + 1)\pi\} = -1$; d'où $\cos. (\mu \varphi) = \cos. \{(2\omega + 1)\pi\}$ et $\varphi = \frac{2 + 1}{\mu} . \pi$, ce qui comprend tous les arcs de numéro impair d'une demi-circonférence, divisée en un nombre μ de parties. Tous les facteurs doubles de $x^\mu + \varrho^\mu$ seront donc compris dans la forme générale

$$x x - 2 \varrho x \cos. \left\{\frac{2\omega + 1}{\mu} . \pi\right\} + \varrho \varrho$$

dont les facteurs simples imaginaires sont $x - \varrho \cos. \left(\frac{2\omega + 1}{\mu} . \pi\right) - \varrho \sin. \left(\frac{2\omega + 1}{\mu} . \pi\right) \sqrt{(-1)}$, $x - \varrho \cos. \left(\frac{2\omega + 1}{\mu} . \pi\right) + \varrho \sin. \left(\frac{2\omega + 1}{\mu} . \pi\right) \sqrt{(-1)}$,

c'est-à-dire, qu'en donnant à ω les valeurs successives 0, 1, 2, 3, &c., les facteurs doubles seront

$$xx - 2x\rho \,.\, \text{cos.} \left(\frac{1}{\mu} \,.\, \pi\right) + \rho\rho,$$

$$xx - 2x\rho \,.\, \text{cos.} \left(\frac{3}{\mu} \,.\, \pi\right) + \rho\rho,$$

$$xx - 2x\rho \,.\, \text{cos.} \left(\frac{5}{\mu} \,.\, \pi\right) + \rho\rho,$$

&c.

les numérateurs de la fraction $\frac{2\omega + 1}{\mu}$ étant la suite des nombres impairs. J'observe, 1.° que toutes les valeurs de $2\omega + 1$ plus grandes que μ, ne donnent pour $\frac{2\omega + 1}{\mu} \,.\, \pi$ que des co-sinus qui sont, dans la deuxième demi-circonférence, les répliques de ceux donnés, dans la première, par les valeurs de $\frac{2\omega + 1}{\mu}$ plus petites que μ; on voit en effet, sur-le-champ, que $\text{cos.} \left(\frac{\mu + 1}{\mu} \,.\, \pi\right)$ est le même que $\text{cos.} \left(\frac{\mu - 1}{\mu} \,.\, \pi\right)$; $\text{cos.} \left(\frac{\mu + 2}{\mu} \,.\, \pi\right)$ le même que $\text{cos.} \left(\frac{\mu - 2}{\mu} \,.\, \pi\right)$ &c., jusqu'à $\text{cos.} \left(\frac{2\mu - 1}{\mu} \,.\, \pi\right)$ qui répète $\text{cos.} \left(\frac{1}{\mu}\, \pi\right)$; ainsi il est inutile de pousser les substitutions au-delà de $2\omega + 1 = \mu$; 2.° que lorsque μ est un nombre impair, on arrivera à une valeur $2\omega + 1 = \mu$; alors on aura $\text{cos.} \left\{\frac{2\omega + 1}{\mu} \,.\, \pi\right\} = \text{cos.}\, \pi = -1$; et le trinome $xx - 2\rho x\, \text{cos.} \left\{\frac{2\omega + 1}{\mu} \,.\, \pi\right\} + \rho\rho$ devient un quarré parfait $xx + 2\rho x + \rho\rho$, qui ne doit pas être compté parmi les facteurs doubles, mais qui donne un facteur simple réel $x + \rho$; ce cas semble limiter la généralité du résultat; mais je ferai bientôt voir comment on peut le comprendre dans un énoncé qui n'a aucune exception.

Le cas de $x^\mu - \rho^\mu$ se résoudra en suivant une marche parfaitement semblable à la précédente, et on trouvera que ce binome a pour facteur

double $xx - 2\varrho x \cos. \varphi + \varrho\varrho$, avec la condition que φ soit tel qu'il en résulte $\cos. (\mu\varphi) = +1$. Or π et ω désignant les mêmes choses que ci-dessus, on a $\cos. (2\omega\pi) = 1$, ou $\cos. (\mu\varphi) = \cos. (2\omega\pi)$ et $\varphi = \frac{2\omega}{\mu} . \pi$.

Les facteurs doubles de $x^\mu - \varrho^\mu$ seront donc compris dans la forme générale

$$xx - 2\varrho x \cos. \frac{2\omega}{\mu} . \pi + \varrho\varrho,$$

dont les facteurs simples imaginaires sont

$$x - \varrho \cos. (\frac{2\omega}{\mu} . \pi) + \varrho \sin. (\frac{2\omega}{\mu} . \pi) \sqrt{(-1)},$$

$$x - \varrho \cos. (\frac{2\omega}{\mu} \pi) - \varrho \sin. (\frac{2\omega}{\mu}) \sqrt{(-1)},$$

c'est-à-dire qu'en donnant à ω les valeurs successives 0, 1, 2, 3, &c., les facteurs doubles seront

$$xx - 2\varrho x \cos. 0\pi + \varrho\varrho, \text{ ou } (x - \varrho)^2,$$

$$xx - 2\varrho x \cos. (\frac{2}{\mu} . \pi) + \varrho\varrho,$$

$$xx - 2\varrho x \cos. (\frac{4}{\mu} . \pi) + \varrho\varrho,$$

&c.

en mettant aux numérateurs de $\frac{2\omega}{\mu}$ la suite des nombres pairs.

On voit que dans toutes les hypothèses pour μ, $x^\mu - \varrho^\mu$ aura toujours un facteur simple $x - \varrho$ correspondant à $\omega = 0$; de plus, lorsque μ sera un nombre pair, on arrivera à une valeur $2\omega = \mu$; alors on aura $\cos. (\frac{2\omega}{\mu} . \pi) = \cos. \pi = -1$; le trinome $xx - 2\varrho x \cos.$

$(\frac{2\omega}{\mu}.\pi) + \varrho\varrho$ deviendra un quarré parfait $xx + 2\varrho x + \varrho\varrho$, et $x^\mu - \varrho^\mu$ aura $x + \varrho$ pour facteur simple, en observant, comme je l'ai fait ci-dessus, que dans le cas où $xx - 2\varrho x \text{ cof. } (\frac{2\omega}{\mu}\pi) + \varrho\varrho$ est un quarré parfait, ce trinome ne doit point être compté pour un facteur double, mais seulement sa racine pour un facteur simple. De plus, il est inutile de pousser les substitutions au-delà de $2\omega = \mu$, par les mêmes raisons données précédemment.

La forme $x^\mu - \varrho^\mu$ donne lieu à une espèce de paradoxe très-remarquable dont je dois parler ici. Si on suppose $\varrho = 1$, l'équation $x^\mu - 1 = 0$ donnera $x = \sqrt[\mu]{(1)}$; on déduira donc les formules précédentes, dans cette hypothèse, toutes les racines de l'unité, de l'ordre μ, et on voit que quel que soit le nombre μ, on pourra toujours donner à l'unité un nombre égal de racines, savoir; si μ est pair, deux racines réelles $+1$ et -1, avec $\mu - 2$ racines imaginaires, et si μ est impair, une racine réelle $+1$ avec $\mu - 1$ racines imaginaires.

Si dans l'équation $x = \varrho \text{ cof. } \varphi \pm \varrho \text{ fin. } \varphi \sqrt{(-1)}$, qui donne les facteurs du trinome $x^2 - 2\varrho x \text{ cof. } \varphi + \varrho^2 = 0$, on fait d'abord $\varphi = \frac{2\omega}{\mu}\pi$ et ensuite $\varrho = 1$; on aura pour les valeurs des racines μ.es de l'unité, la forme générale $x = \text{cof. } (\frac{2\omega}{\mu}\pi) \pm \text{fin. } (\frac{2\omega}{\mu}\pi) \sqrt{(-1)}$ qui, d'après l'équation (3), peut se transformer en $x = \{\text{cof. } \frac{\pi}{\mu} \pm \text{fin. } \frac{\pi}{\mu} \sqrt{(-1)}\}^{2\omega}$, et en faisant $\omega = 0$, $\omega = 1$, $\omega = 2$, &c., donne les racines μ.es successives de l'unité,

$$x = 1;$$

$$x = [\text{cof. } \frac{\pi}{\mu} \pm \text{fin. } \frac{\pi}{\mu} \sqrt{(-1)}]^2 = K;$$

$$x = [\text{cof. } \frac{\pi}{\mu} \pm \text{fin. } \frac{\pi}{\mu} \sqrt{(-1)}]^4 = K^2;$$

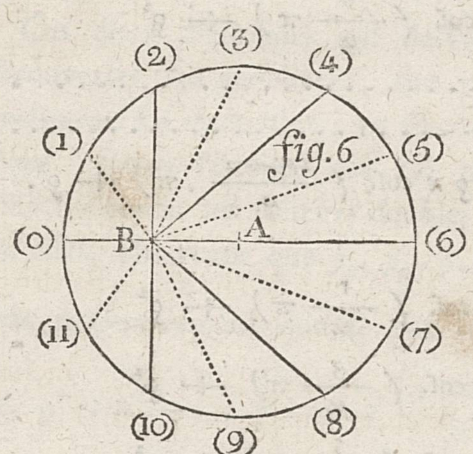
$$x = [\text{cof. } \frac{\pi}{\mu} \pm \text{fin. } \frac{\pi}{\mu} \sqrt{(-1)}]^6 = K^3;$$

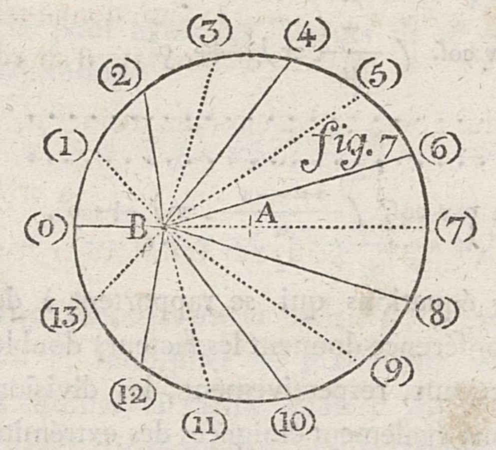
&c.

ainsi celle qui suit l'arc zéro étant donnée, toutes les autres s'en déduiront par l'élévation aux puissances.

Théorème de Côtes.

L'expression $x^2 - 2\varrho x \cos.\varphi + \varrho\varrho$ est susceptible d'une construction trop remarquable par les conséquences qu'on en tire, pour l'omettre ici; soit, *fig. 6 et 7*, un arc de cercle (o) (1) décrit du rayon A (o); et d'un point B, pris sur ce rayon, menons la ligne B (1); soient de plus





valeur angulaire de l'arc (o) (1) $= \varphi$

rayon A (o) $= \varrho$

$AB = x$

B (1) $= y$

on trouvera aisément que

$y = \sqrt{[(\varrho \cos.\varphi - x)^2 + \varrho^2 \sin.^2 \varphi]}$,

d'où on déduit, en faisant attention que $\cos.^2\varphi + \sin.^2 = 1$,

$$y^2 = x^2 - 2\varrho x \cos.\varphi + \varrho^2.$$

Je suppose maintenant que la circonférence (o) (1) (2), &c. est divisée en un nombre 2μ de parties, et je désigne par y_0, $y_{,}$, $y_{,,}$, $y_{,,,}$, &c. $y_{(\mu)}$ les lignes B (o), B (1), B (2), &c. menées aux points de division, j'aurai, en nommant π la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon, et substituant pour φ les valeurs $\frac{0}{\mu}\pi$, $\frac{1}{\mu}\pi$, $\frac{2}{\mu}\pi$, $\frac{3}{\mu}\pi$, &c. les deux suites d'équations.

Divisions paires.

$$\left\{\begin{array}{l}
y_0^2 = x^2 - 2\rho x \cos.\left(\frac{0}{\mu}\pi\right) + \rho^2 \\
y_{II}^2 = x^2 - 2\rho x \cos.\left(\frac{2}{\mu}\pi\right) + \rho^2 \\
y_{IV}^2 = x^2 - 2\rho x \cos.\left(\frac{4}{\mu}\pi\right) + \rho^2 \\
y_{VI}^2 = x^2 - 2\rho x \cos.\left(\frac{6}{\mu}\pi\right) + \rho^2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^2_{(2\mu-2)} = x^2 - 2\rho x \cos.\left(\frac{2\mu-2}{\mu}.\pi\right) + \rho^2.
\end{array}\right.$$

Divisions impaires.

$$\left\{\begin{array}{l}
y_I^2 = x^2 - 2\rho x \cos.\left(\frac{1}{\mu}\pi\right) + \rho^2 \\
y_{III}^2 = x^2 - 2\rho x \cos.\left(\frac{3}{\mu}\pi\right) + \rho^2 \\
y_V^2 = x^2 - 2\rho x \cos.\left(\frac{5}{\mu}\pi\right) + \rho^2 \\
y_{VII} = x^2 - 2\rho x \cos.\left(\frac{7}{\mu}\pi\right) + \rho^2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^2_{(2\mu-1)} = x^2 - 2\rho x \cos.\left(\frac{2\mu-1}{\mu}.\pi\right) + \rho^2.
\end{array}\right.$$

Observons, 1.° que celles de ces équations qui se rapportent à des points pris dans la première demi-circonférence donnent les facteurs doubles de $x^\mu - \rho^\mu$ et de $x^\mu + \rho^\mu$, en prenant, respectivement, les divisions paires ou impaires ; 2.° que les divisions également éloignées des extrémités du diamètre donnent des valeurs identiques, en sorte que $y_{\mu-1} = y_{\mu+1}$; $y_{\mu-2} = y_{\mu+2}$, &c. ; 3.° que les quarrés parfaits donnés par les divisions placées aux extrémités du diamètre ne sont pas, comme je l'ai dit précédemment, comptés parmi les facteurs doubles, mais que leurs racines seulement sont des facteurs simples. Il résulte de là que si on forme les produits $y_0^2 . y_{II}^2 . y_{IV}^2 \ldots\ldots y^2_{(2\mu-2)}$ et $y_I^2 . y_{III}^2 . y_V^2 \ldots\ldots y^2_{(2\mu-1)}$ chacun

des facteurs des binomes $x^\mu - \varrho^\mu$ et $x_\mu + \varrho^\mu$, respectivement, se trouvera compris deux fois dans la suite de ces produits; d'où on conclut

$$x^\mu - \varrho^\mu = y_0 \cdot y_{II} \cdot y_{IV} \cdot y_{VI} \cdot \cdot \cdot \cdot y_{(2\mu-2)}$$

$$x^\mu + \varrho^\mu = y_I \cdot y_{III} \cdot y_V \cdot y_{VII} \cdot \cdot \cdot \cdot y_{(2\mu-1)}$$

Ces deux théorèmes qui doivent être comptés parmi les plus belles découvertes des géomètres, ont valu une grande célébrité à *Côtes* leur inventeur. La traduction, en discours ordinaire, de leur expression analytique, donne l'énoncé que j'ai promis précédemment, qui comprend indistinctement les facteurs doubles dont la racine peut, ou non, s'extraire. En effet, observant que y_0, y_{II}, $y_{VI} \cdot \cdot \cdot y_{(2\mu-2)}$ et y_I, y_{III}, $y_V \cdot \cdot \cdot y_{(2\mu-1)}$ sont respectivement donnés par les formules $x^2 - 2\varrho x \cos.\left(\frac{2\omega}{\mu}\pi\right) + \varrho^2$ et $x^2 - 2\varrho x \cos.\left(\frac{2\omega+1}{\mu}\pi\right) + \varrho^2$ en substituant pour ω les valeurs 0, 1, 2, 3, &c. jusqu'à $\mu - 1$, on en déduit cette règle que pour avoir les facteurs de $x^\mu - \varrho^\mu$ et $x^\mu + \varrho^\mu$, il faut, dans les expressions

$x^2 - 2\varrho x \cos.\left(\frac{2\omega}{\mu}\pi\right) + \varrho^2$ qui se rapporte à $x^\mu - \varrho^\mu$,

$x^2 - 2\varrho x \cos.\left(\frac{2\omega+1}{\mu}\pi\right) + \varrho^2$ qui se rapporte à $x^\mu + \varrho^\mu$,

faire successivement $\omega = 0$, $\omega = 1$, $\omega = 2$, &c. jusqu'à $\omega = \mu - 1$, multiplier les μ résultats, ainsi obtenus, les uns par les autres, et extraire la racine quarrée du produit. De cette manière, les quarrés parfaits correspondant aux extrémités du diamètre, produiront les facteurs simples qu'ils doivent donner, et tous les autres facteurs se trouvant répétés dans l'une et l'autre demi-circonférence, la racine quarrée de leur produit redonnera les mêmes expressions trouvées en premier lieu.

Je joins ici une table des facteurs de $x^\mu \pm \varrho^\mu$ depuis $\mu = 3$ jusqu'à $\mu = 10$.

	FACTEURS POUR LES BINOMES DE LA FORME	
BINOMES.	$x^\mu + \rho^u$	$x^u - \rho^u$
$x^3 \pm \rho^3$	$x + \rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{1}{3}\pi + \rho\rho$	$x - \rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{2}{3} \cdot \pi + \rho\rho$
$x^4 \pm \rho^4$	$xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{1}{4}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{3}{4}\pi + \rho\rho$	$x - \rho$ $x + \rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{2}{4} \cdot \pi + \rho\rho = xx + \rho\rho$
$x^5 \pm \rho^5$	$x + \rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{1}{5}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{3}{5}\pi + \rho\rho$	$x - \rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{2}{5}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{4}{5}\pi + \rho\rho$
$x^6 \pm \rho^6$	$xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{1}{6}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{3}{6}\pi + \rho\rho = xx + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{5}{6}\pi - \rho\rho$	$x - \rho$ $x + \rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{2}{6}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{4}{6}\pi + \rho\rho$
$x^7 \pm \rho^7$	$x + \rho$ $xx + 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{1}{7}\pi + \rho\rho$ $xx + 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{3}{7}\pi + \rho\rho$ $xx + 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{5}{7}\pi + \rho\rho$	$x - \rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{2}{7}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{4}{7}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{6}{7}\pi + \rho\rho$
$x^8 \pm \rho^8$	$xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{1}{8}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{3}{8}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{5}{8}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{7}{8}\pi + \rho\rho$	$x - \rho$ $x + \rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{2}{8}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{4}{8}\pi + \rho\rho = xx + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{6}{8}\pi + \rho\rho$
$x^9 \pm \rho^9$	$x + \rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{1}{9}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{3}{9}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{5}{9}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{7}{9}\pi + \rho\rho$	$x - \rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{2}{9}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{4}{9}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{6}{9}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{8}{9}\pi + \rho\rho$
$x^{10} \pm \rho^{10}$	$xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{1}{10}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{3}{10}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{5}{10}\pi + \rho\rho = xx + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{7}{10}\pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{9}{10}\pi + \rho\rho$	$x - \rho$ $x + \rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{2}{10} \cdot \pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{4}{10} \cdot \pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{6}{10} \cdot \pi + \rho\rho$ $xx - 2\rho x \,\mathrm{cof.}\, \frac{8}{10}\, \pi + \rho\rho$

Valeurs des puissances d'un co-sinus ou d'un sinus en sinus et co-sinus d'arcs multiples; Développement du binome $x^{\mu} - \rho^{\mu}$ en une suite logarithmique; Recherches trigonométriques de Lambert.

L'équation (3) fournit un moyen facile de trouver la valeur de la puissance n d'un co-sinus ou d'un sinus en co-sinus ou sinus d'arcs multiples.

Soit proposé d'abord de trouver la valeur de $\cos.^n \varphi$,

je fais .... $\cos. \varphi + \sin. \varphi \sqrt{(-1)} = u$,

$\cos. \varphi - \sin. \varphi \sqrt{(-1)} = v$,

ce qui donne..... $\cos. \varphi = \frac{1}{2}(u + v)$,

et .... $2^n \cos.^n \varphi = (u + v)^n$.

Je développe $(u + v)^n$ de deux manières, la première en ordonnant par rapport aux puissances u^n, u^{n-1}, u^{n-2}, &c. et la seconde en ordonnant par rapport aux puissances v^n, v^{n-1}, v^{n-2}, j'additionne les deux expressions et j'ai

$$u^n + v^n + \frac{n}{1}(u^{n-1} v + v^{n-1} u) + \frac{n.n-1}{1.2}(u^{n-2} v^2 + v^{n-2} u^2) + \frac{n.n-1\ n-2}{1.2.3}(u^{n-3} v^3 + v^{n-3} u^3) + \&c.$$ qui

peut se changer en

$$u^n + v^n + \frac{n}{1}(u^{n-2} + v^{n-2})\, u v + \frac{n.n-1}{1.2}(u^{n-4} + v^{n-4})\, u^2 v^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(u^{n-6} + v^{n-6})\, u^3 v^3 + \&c.$$

cette expression donnant deux fois la valeur de $(u + v)^n$ ou de $2^n \cos.^n \varphi$, si on en prend la moitié et qu'on observe que $u v$ ou $[\cos. \varphi + \sin. \varphi \sqrt{(-1)}]$ $[\cos. \varphi - \sin. \varphi \sqrt{(-1)}] = 1$, il viendra

$$2^n \cos.^n \varphi = \frac{1}{2}(u^n + v^n) + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{1}(u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{1}{2} \frac{n.n-1}{1.2}$$

$(u^{n-4} + v^{n-4}) + \&c.$ mais, d'après l'équation (3), $u^n = \cos. (n \varphi) + \sin. (n \varphi) \sqrt{(-1)}$, $u^{n-2} = \cos. [(n-2) \varphi] + \sin. [(n-2).\varphi] \sqrt{(-1)}$ &c. $v^n = \cos. (n \varphi) - \sin. (n \varphi) \sqrt{(-1)}$, $v^{n-2} = \cos. [(n-2).\varphi] - \sin. [(n-2).\varphi] \sqrt{(-1)}$, &c. donc $u^n + v^n = 2 \cos. n \varphi$,

$u^{n-2} + v^{n-2} = 2 \operatorname{cos}. [(n - 2).\varphi]$, &c. ce qui change l'équation précédente en

$$(19) \ldots\ldots\ldots\ldots 2^n \operatorname{cos}.^n \varphi = \operatorname{cos}.(n\varphi) + \frac{n}{1} \operatorname{cos}. [(n-2).\varphi]$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2} \operatorname{cos}. [(n-4).\varphi] + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \operatorname{cos}. [(n-6).\varphi] \&c.$$

Cette série est toujours terminée lorsque n est un nombre entier positif, et il faut observer 1.° que lorsqu'on est parvenu aux angles négatifs, on trouve la réplique des co-sinus des angles positifs de même valeur; 2.° que tous les termes de la série, à l'exception de celui du milieu, sont répétés deux fois; ce terme du milieu existe lorsque n est pair; et comme le co-sinus qui l'affecte appartient à l'angle $(n - n)\ \varphi$, dont le co-sinus est l'unité, la valeur de $2^n \operatorname{cos}.^n \varphi$ contiendra, dans ce cas, un terme non affecté de co-sinus.

Si dans l'équation (19) on fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \psi$, il en résultera la valeur de $2^n \operatorname{sin}.^n \psi$, qu'on calculera avec la même facilité, en ayant égard au changement de signes que comporte cette substitution.

Bossut a donné un théorème curieux pour exprimer le nombre $x^\mu - \varrho^\mu$ par une suite non terminée, dont voici l'énoncé.

$$x^\mu - \varrho^\mu = \frac{\mu\,(\log. x - \log. \varrho)}{1} + \frac{\mu^2 (\log.^2 x - \log. \varrho^2)}{1.2} + \frac{\mu^3 (\log.^3 x - \log.^3 \varrho)}{1.2.3}$$
$$+ \frac{\mu^4 (\log.^4 x - \log.^4 \varrho)}{1.2.3.4} + \&c.$$

Les logarithmes sont hyperboliques.

La démonstration de ce théorème est très-aisée. J'ai donné, *n.° X*, la formule

$$A^{\delta x} = 1 + \frac{\delta x}{M} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\delta x}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\delta x}{M}\right)^3 + \&c.$$

dans laquelle $\frac{\delta x}{M}$ exprime le logarithme hyperbolique de $A^{\delta x}$ et qui, par conséquent, peut s'écrire ainsi,

$$A^{\delta x} = 1 + \log.(A^{\delta x}) + \frac{\log.^2 (A^{\delta x})}{1.2} + \frac{\log.^3 (A^{\delta x})}{1.2.3} + \&c.$$

ou comme $\log. (A^{\delta x}) = \delta x \log. A$

$$A^{\delta x} = 1 + \delta x \log. A + \frac{(\delta x)^2 \log.^2 A}{1.2} + \frac{(\delta x)^3 \log.^3 A}{1.2.3} + \&c.$$

Faisant successivement $A^{\delta x} = x^{\mu}$ et $A^{\delta x} = \varrho^{\mu}$ on aura les deux équations

$$x^{\mu} = 1 + \mu \log. x + \frac{\mu^2 \log.^2 x}{1.2} + \frac{\mu^3 \log.^3 x}{1.2.3} + \&c.$$

$$\varrho^{\mu} = 1 + \mu \log. \varrho + \frac{\mu^2 \log.^2 \varrho}{1.2} + \frac{\mu^3 \log.^3 \varrho}{1.2.3} + \&c.$$

qui retranchées l'une de l'autre, donnent le théorème à démontrer. L'auteur s'en est servi pour dénouer une espèce de paradoxe de calcul intégral qu'on rencontre dès l'exposition des premiers principes. Je le rappellerai aux élèves quand j'en serai à cette partie de l'analyse.

Feu Lambert, de l'académie de Berlin, qui a publié un grand nombre d'ouvrages très-estimés sur les mathématiques pures et appliquées, a fait un usage très-ingénieux et très-utile des rapports imaginaires déduits de la comparaison de l'hyperbole équilatère et du cercle qui auraient un centre commun; le rayon du cercle étant égal au demi-axe de l'hyperbole. Si r est ce demi-axe, on a

équation à l'hyperbole $y = (x^2 - r^2)^{1} = (r^2 - x^2)^{1} \sqrt{(-1)}$

équation au cercle $y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

Il est évident et par ces équations et par les figures géométriques, que toutes les valeurs d'y qui sont imaginaires dans l'hyperbole, sont réelles dans le cercle, et réciproquement, en sorte que, pour une même valeur de x, l'ordonnée au cercle est à l'ordonnée à l'hyperbole comme $1 : \sqrt{(-1)}$; et on démontrerait aisément que les secteurs circulaires et hyperboliques qui répondent à des abscisses communes, sont dans le même rapport. Lambert s'est servi de ces propriétés pour imaginer une espèce de trigonométrie hyperbolique, au moyen de laquelle il trouve des solutions réelles dans des cas où la trigonométrie ordinaire en fournit d'imaginaires, et réciproquement. Daviet de Foncenex a employé les mêmes considérations dans ses réflexions sur les quantités imaginaires, imprimées dans le premier volume de l'académie de Berlin. Lagrange a fait usage des formules de

Lambert dans son mémoire sur la méthode d'interpolation (*Éphémérides de Berlin*). Voyez pour plus de détails le *Supplément aux tables trigonométriques* de Lambert, et ses *Observations trigonométriques (Académ. de Berlin, année 1768)*. Je ne fais qu'indiquer ces objets de recherches en faveur des élèves qui auront la curiosité de s'en occuper.

INTRODUCTION À L'INTÉGRATION

Des Équations linéaires de tous les ordres ; Application de la méthode différentielle de Newton *à la détermination des Constantes, avec la condition de satisfaire à un certain nombre d'observations ou de valeurs données ; Méthode d'interpolation qui en résulte.*

N.° XXI. LA branche du calcul intégral traitée dans les séances précédentes (*depuis le n.° XIV jusqu'au n.° XIX inclusivement*), fournit des méthodes qui s'appliquent, sans exception, à toutes les fonctions rationnelles d'une indéterminée, sans diviseurs variables, ou à celles qui ont des diviseurs variables, pour les cas résolus *n.os XVI et XIX*; je vais passer à un nouvel objet de recherches où le génie d'invention brille encore plus que dans ceux dont j'ai entretenu les élèves jusqu'à ce moment, et qui a aussi l'avantage de ne rien laisser à desirer ; c'est l'intégration des équations différentielles linéaires de tous les ordres, dont les coëfficiens remplissent certaines conditions. L'usage de ces équations est très-important et très-étendu dans l'astronomie physique, l'interpolation ou l'art de trouver la loi des phénomènes de la nature, d'après l'observation, la doctrine des probabilités, &c. A mesure que nous avançons, le pays que nous parcourons augmente en fertilité et en richesse; les objets qu'il présente à nos regards doivent, de plus en plus, fixer l'attention et l'intérêt.

Les géomètres ont appelé équations différentielles *linéaires* celles dans lesquelles les différences des variables ne sont élevées qu'à la première puissance; on les distingue en équations du 1.er, 2.e, 3.e, &c. *ordre*, suivant

que l'indice le plus élevé des différences qu'elles contiennent est 1, 2, 3, &c. Il y a cependant des cas où une équation différentielle est considérée comme linéaire, quoiqu'une des différences y soit élevée à des puissances. Telle est l'équation

$$A \frac{\Delta z}{\Delta x} + B \frac{\Delta^2 z}{(\Delta x)^2} + C \frac{\Delta^3 z}{(\Delta x)^3} + \&c. = X,$$

dans laquelle Δx est constant. C'est sous cette forme, ou sous celles qui peuvent s'y ramener, que je présenterai les équations linéaires, et je traiterai successivement deux cas, en supposant z et X fonctions de x; savoir, celui où les coëfficiens A, B, C, &c. sont constans, et celui où ils sont fonctions de x, X pouvant être dans l'un et l'autre cas, égal à zéro. Je commence par le problème le plus simple que comporte le premier cas, et je suppose que l'équation ne contient qu'un terme, ou est de la forme

$$N \frac{\Delta^{(n)} z}{(\Delta x)^n} = 0, \text{ qui se réduit à } \Delta^{(n)} z = 0.$$

Avant de donner l'intégrale complète de cette équation je ferai quelques observations essentielles. Soient $z^0, z', z'', z''' \ldots\ldots\ldots z^{(n-1)}$ un nombre n de valeurs particulières de cette intégrale, connues *à priori*, d'une manière quelconque; le problème consiste à trouver le terme général d'une série dont on a un nombre n de termes consécutifs, et dont les différences n.^{es} sont nulles; mais on peut, sans intégrer, et avec les seuls termes donnés, calculer ou construire ceux qui suivent et qui précèdent, et continuer la série, à volonté, en avant ou en arrière; en effet on a, par la formule 1 du $n.^o$ *VII*,

$$\Delta^{(n)} z = z^{(n)} - n z^{(n-1)} + \frac{n\,\overline{n-1}}{1.2} z^{(n-2)} - \ldots \pm z^0 = 0,$$

d'où on déduit

$$z^{(n)} = n z^{(n-1)} - \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} z^{(n-2)} + \frac{n.\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{1.2.3} z^{(n-3)} - \ldots \mp z^0.$$

Ainsi un terme quelconque est donné par un nombre n de termes précédens; j'ai déjà fait connaître, $n.^o$ *XIII*, cette propriété de l'espèce de

fonction dont il s'agit ici, mais alors je la considérais isolément, au lieu qu'ici je l'envisage comme tenant à une propriété générale des équations différentielles, que je ferai remarquer avec soin chaque fois que j'en aurai l'occasion.

L'intégrale 1.ere de l'équation $\Delta^{(n)} z = 0$ est, en supposant toujours z fonction de x,

$$\Delta^{(n-1)} z = \Sigma\, 0 = A',$$

l'intégrale 2.e . . . $\Delta^{(n-2)} z = \Sigma^2\, 0 = \frac{A'x}{\Delta x} + A''$,

l'intégrale 3.e . . . $\Delta^{(n-3)} z = \Sigma^3\, 0 = \frac{A'x^2}{2\Delta x^2} - \frac{(A' - 2A'')x}{2\Delta x} + A'''$;

&c. &c. &c.

et en général l'intégrale $n.^e$ sera de la forme

$$z = a + a'x + a''x^2 + a'''x + \ldots + a^{(n-1)}x^{n-1},$$

a', a'', a''', &c. étant des constantes arbitraires qui se déterminent par des conditions particulières de la question.

Ces résultats sont de même nature que ceux trouvés *n.° XIX*, parce que les questions sont aussi de même espèce; le problème résolu dans le numéro cité, se réduit à trouver la n.^{e} intégrale de l'équation $\Delta^{(n)} z = \varphi(x)$, z étant une fonction rationnelle de x sans diviseur variable; les *n.ºs XV*, *XVI* et *XVII* n'ayant offert que le cas où $n = 1$; on voit donc que la théorie exposée depuis le *n. XIV*, renferme l'intégration complète des équations linéaires à un seul terme; je ne l'ai reprise aujourd'hui que pour la présenter sous un nouveau point de vue propre à la faire servir d'introduction à la théorie des équations linéaires en général, et pour parler plus particulièrement de la détermination des constantes.

Détermination des Constantes avec la condition de satisfaire à des valeurs données.

Les diverses questions dont la solution dépend de l'intégration de l'équation $\Delta^{(n)} z = 0$, doivent fournir chacun un nombre suffisant de conditions auxquelles il faut satisfaire, et qui servent à déterminer les

quantités α', α'', α''', &c.; malgré la variété apparente des formes sous lesquelles ces conditions peuvent se présenter, elles seront toujours susceptibles d'un énoncé géométrique, en supposant la construction d'une courbe plane, dont z et x seraient les coordonnées, et se réduiront à faire passer cette courbe par un certain nombre de points donnés. D'après cette considération, on est toujours supposé avoir les valeurs simultanées.

$$z_{\prime}\ z_{\prime\prime}\ z_{\prime\prime\prime}\ z_{\text{IV}}\ z_{\text{V}}\ \&c.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ z_{(n)}$$
$$x_{\prime}\ x_{\prime\prime}\ x_{\prime\prime\prime}\ x_{\text{IV}}\ x_{\text{V}}\ \&c.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_{(n)}$$

qui, substituées dans l'équation $z = \alpha + \alpha' x + \alpha'' x^2 + \&c.\ldots\ldots + \alpha^{(n-1)} x^{n-1}$ donnent

$$z_{\prime} = \alpha + \alpha' x_{\prime} + \alpha'' x_{\prime}^2 + \alpha''' x_{\prime}^3 + \ldots + \alpha^{(n-1)} x_{\prime}^{n-1}$$
$$z_{\prime\prime} = \alpha + \alpha' x_{\prime\prime} + \alpha'' x_{\prime\prime}^2 + \alpha''' x_{\prime\prime}^3 + \ldots + \alpha^{(n-1)} x_{\prime\prime}^{n-1}$$
$$z_{\prime\prime\prime} = \alpha + \alpha' x_{\prime\prime\prime} + \alpha'' x_{\prime\prime\prime}^2 + \alpha''' x_{\prime\prime\prime}^3 + \ldots + \alpha^{(n-1)} x_{\prime\prime\prime}^{n-1}$$
$$\&c. \qquad \&c.$$
$$z_{(n)} = \alpha + \alpha' x_{(n)} + \alpha'' x_{(n)}^2 + \alpha''' x_{(n)}^3 + \ldots + \alpha^{(n-1)} x_{(n)}^{n-1}.$$

Ces équations étant en nombre n suffisent pour déterminer α', α'', α''', &c. en valeurs de $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, &c., $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, de manière que la courbe passe par les extrémités de toutes les ordonnées $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, &c. Newton a imaginé, pour faire ce calcul, une méthode d'élimination exposée dans son ouvrage, qui a pour titre : *Methodus differentialis,* qui consiste à soustraire les équations les unes des autres, ce qui rend les différences divisibles, respectivement, par $x'' - x'$, $x''' - x''$, &c.; une deuxième soustraction donne le moyen de diviser par $x''' - x'$, $x^{\text{IV}} - x''$, &c.; une troisième, par $x^{\text{IV}} - x'$, $x^{\text{V}} - x''$, &c. et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation qui ne contienne plus qu'une inconnue; et alors, en faisant des substitutions successives, on détermine toutes les autres.

Ce procédé de calcul est direct et ingénieux, mais on peut trancher la difficulté par une considération fort simple, qui conduit immédiatement à une expression très-commode dans la pratique, et qui n'est autre chose que celle de Newton, présentée sous une autre forme. Puisqu'on doit avoir en même temps $x = x'$ et $z = z'$; $x = x''$ et $z = z''$, &c. en exprimant z par une fonction rationnelle de x sans diviseur variable, il

s'agit de trouver une équation où z soit égalée à une fonction de cette espèce et dans laquelle faisant $x = x'$, on ait $z = z'$, et ainsi des autres valeurs ; or, cette condition est évidemment remplie par l'équation suivante

$$z = \frac{(x - x'')(x - x''')(x - x^{\text{IV}})\text{ \&c.}}{(x' - x'')(x' - x''')(x' - x^{\text{IV}})\text{ \&c.}} z' + \frac{(x - x')(x - x''')(x - x^{\text{IV}})\text{ \&c.}}{(x'' - x')(x'' - x''')(x'' - x^{\text{IV}})\text{ \&c.}} z_{\prime\prime}$$
$$+ \frac{(x - x')(x - x'')(x - x^{\text{IV}})\text{ \&c.}}{(x''' - x')(x''' - x'')(x''' - x^{\text{IV}})} z_{\prime\prime\prime} + \frac{(x - x')(x - x'')(x - x''')(x - x^{\text{V}})\text{ \&c.}}{(x^{\text{IV}} - x')(x^{\text{IV}} - x'')(x^{\text{IV}} - x''')(x^{\text{IV}} - x^{\text{V}})\text{ \&c.}} z_{\text{IV}} + \text{\&c.}$$

que la forme des facteurs rend facile à calculer par les logarithmes, et dont la loi des termes est aisée à saisir ; car après avoir fait le produit $(x - x')(x - x'')(x - x''')$ &c., on en retranchera successivement le 1.er, le 2.e, le 3.e, &c. facteur, ce qui donnera, respectivement, le numérateur répondant à $z_\prime$, $z_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime\prime}$, &c. Les dénominateurs se forment des numérateurs, en substituant dans ceux-ci x', x'', x''', &c., respectivement, à la place de x.

Application à l'Interpolation.

La méthode qui vient d'être exposée pour trouver les constantes qui complètent l'intégrale de $\Delta^{(n)} z = 0$, peut être aussi d'une grande utilité dans beaucoup de circonstances où l'on n'a aucune intégration en vue ; en effet, puisqu'elle fournit le moyen de tracer une courbe qui passe par un certain nombre de points connus de position, on peut supposer que les coordonnées à ces points sont des observations qui se correspondent, et chercher par le moyen de l'équation de la courbe les points ou les observations intermédiaires qu'on n'aurait pas faites. Je dois avertir, néanmoins, qu'il faut, en physique, user avec précaution des diverses méthodes d'interpolations connues des géomètres ; chacune d'elles se rapporte à une espèce particulière de fonction ; et quoiqu'elle satisfasse à tous les nombres ou *faits* fournis par l'observation, on tomberait souvent dans de grandes erreurs en adoptant les résultats intermédiaires calculés. L'équation $z = \varphi(x)$, trouvée précédemment, donne les *paraboles* de différens *ordres*, avec lesquelles on peut toujours, à la vérité, satisfaire à un nombre d'observations égal à l'indice de l'*ordre* plus

un ;

un; mais comme, d'après la théorie des équations, il y a dans chaque courbe parabolique de l'ordre n un nombre $n - 1$ de tangentes, parallèles à l'axe de la coördonnée élevée, si les observations sont distantes entr'elles et nombreuses, cette courbure aura, dans l'intervalle des unes aux autres, des écarts et des sinuosités qui s'accorderont difficilement avec la marche des expériences; elle est néanmoins très-utile en astronomie et même en physique, lorsqu'on l'emploie convenablement, et que les limites des observations sont telles qu'on n'embrasse pas un arc de grande étendue.

La cause des erreurs contre lesquelles je prémunis les élèves se trouve dans la diversité des lois des phénomènes de la nature, qui est telle que, pour chacune de ces lois, il existe nécessairement une espèce de fonction par laquelle elle doit être exprimée, exclusivement à d'autres qui satisfont cependant à des faits isolés; par exemple, les phénomènes qui dépendent des fluides élastiques sont soumis à des lois qui me paraissent être représentées par des fonctions exponentielles; j'en ai fait une application à la force expansive de la vapeur de l'eau qui m'a parfaitement réussi, et qui était fondée sur une suite d'expériences nombreuses et très-exactes; je ferai part de mon travail aux élèves, quand nous serons un peu plus avancés dans la théorie des équations différentielles; je reviens à l'équation $z = \frac{(x - x'')\,(x - x''')\,(x - x^{\text{iv}})\ \&c.}{(x' - x'')\,(x' - x''')\,(x' - x^{\text{iv}})\ \&c.}\, z + \&c.$ considérée comme formule d'interpolation. Si on fait

$$(x - x^{\circ})\,(x - x')\,(x - x'')\,(x - x''')\ldots(x - x^{(n)}) = X,$$

les observations étant en nombre $n + 1$, et qu'on désigne par X°, X', X'', &c. ce que deviennent $\frac{X}{x - x^{\circ}}$, $\frac{X}{x - x'}$, $\frac{X}{x - x''}$, &c. lorsqu'on substitue, respectivement, dans chacune de ces expressions, x°, x'', x''', &c. à la place de x, on aura

$$z = X\left\{ \frac{z^{\circ}}{(x - x^{\circ})\,X^{\circ}} + \frac{z'}{(x - x')\,X'} + \frac{z''}{(x - x'')\,X''} + \ldots + \frac{z^{(n)}}{(x - x^{(n)})\,X^{(n)}} \right\}.$$

Dans le cas des observations équidistantes, on a $x' - x^{\circ} = x'' - x'$

$= x''' - x'' =$ &c. Si on suppose de plus $x^{(0)} = 0$, l'intervalle commun sera x', et on aura

$$X = x(x - x')(x - 2x')(x - 3x')\text{\&c}\ldots(x - nx')$$
$$X^0 = \pm 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots n . (x')^n$$
$$X' = \mp 1^2 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots (n - 1)(x')^n$$
$$X'' = \pm 1^2 . 2^2 . 3 . 4 \ldots\ldots (n - 2)(x')^n$$
$$X''' = \mp 1^2 . 2^2 . 3^2 . 4 \ldots\ldots (n - 3)(x')^n$$
&c. &c.

Les signes supérieur et inférieur ont lieu, respectivement, lorsque n est pair ou impair.

On peut satisfaire à des observations équidistantes par l'équation (2) du *n.° VII*, en supposant $x = 0$, lorsque $z = z^{(0)}$ et $x' = 1$, cas auquel il est toujours facile de ramener tous ceux qui peuvent se présenter ; alors l'accent de chaque ordonnée z^0, z', z'', z''', &c. représente la valeur de l'abscisse qui lui correspond, et on a

$$z = z^0 + x\Delta z^0 + \frac{x . x - 1}{1 . 2}\Delta^2 z^0 + \frac{x . x - 1 . x - 2}{1 . 2 . 3}\Delta^3 z^0 + \text{\&c.}$$

z représentant ici $z^{(x)}$, ou z numéroté x, et ce numéro étant considéré comme un nombre positif ou négatif, entier ou fractionnaire. On voit, en effet, qu'en faisant $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, &c. on a les valeurs de z^0, z', z'', &c. telles qu'elles résultent de la théorie des différences, exposée *n.° VII*, et les ordonnées intermédiaires se concluent par analogie, en supposant que l'indice de z est un nombre quelconque ; au surplus, cette formule n'est encore que celle des courbes paraboliques de différens ordres, présentée sous une forme différente, et il est aisé de s'assurer qu'elle donnerait, terme pour terme, les mêmes coëfficiens aux mêmes puissances de x que les précédentes.

On trouve dans plusieurs auteurs des formules qui se rapportent aux courbes paraboliques présentées sous d'autres formes plus ou moins commodes ; voyez le Traité de Côtes, intitulé, *Canonotechnia, sive constructio tabularum per differentias*, le *Supplementa tabularum*, &c. de Lambert, un beau Mémoire d'Euler, *de eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrinâ*, imprimé dans le premier volume de ses Opuscules

analytiques posthumes ; &c. ; mais il ne faut pas perdre de vue que toutes ces formules supposent, ou que les valeurs données ont un certain ordre de différences constantes, ou que les différences des ordres supérieurs sont négligeables. Je parlerai bientôt aux élèves d'une méthode d'interpolation délivrée de cet assujettissement.

ADDITION AU N.° XIII.

Différences, d'un ordre quelconque, du produit d'une quantité exponentielle par une variable.

J'AURAI besoin, pour la démonstration de quelques cas d'intégration des équations linéaires, de différencier une expression de la forme $z a^x$; voici le détail du calcul.

On a pour la première différence

$$\Delta(z a^x) = (z + \Delta z) a^{x+\Delta x} - z a^{\Delta x} = \{(a^{\Delta x} - 1) z + a^{\Delta x} \Delta z\} a^x.$$

J'ai démontré (*Supplément du n.° IX*) l'équation

$$a^{\Delta x} = 1 + \frac{\Delta x \log. a}{1} + \frac{(\Delta x \log. a)^2}{1.2} + \frac{(\Delta x \log. a)^3}{1.2.3} + \&c.$$

Soit $a^{\Delta x} = \alpha$, α sera une quantité donnée par a et Δx, et en la substituant dans la valeur de $\Delta(z a^x)$ on aura

$$\Delta(z a^x) = \{(\alpha - 1) z + \alpha \Delta z\} a^x \; \ldots \; (1).$$

Soit $(\alpha - 1) z + \alpha \Delta z = z'$, on aura $\Delta(z a^x) = z' a^x$ et $\Delta^2 (z a^x) = \Delta(z' a^x) = \{(\alpha - 1) z' + \alpha \Delta z'\} a^x$, ou en substituant pour z' sa valeur

$$\Delta^2 (z a^x) = \{(\alpha - 1)^2 z + 2(\alpha - 1) \alpha \Delta z + \alpha^2 \Delta^2 z)\} a^x.$$

Je fais encore, dans cette nouvelle équation, le facteur de a^x égal à z'', ce qui donne $\Delta^2 (z a^x) = z'' a^x$, et, par l'équation (1), $\Delta^3 (z a^x) = \Delta(z'' a^x) = \{(\alpha - 1) z'' + \alpha \Delta z''\} a^x$, ou en substituant

$$\Delta^3 (z a^x) = \{(\alpha - 1)^3 z + 3(\alpha - 1)^2 \alpha \Delta z + 3(\alpha - 1) \alpha^2 \Delta^2 z + \alpha^3 \Delta^3 z\} a^x$$

et en général

$$\Delta^{(n)}(z\,a^x) = \{(\alpha - 1)^n \Delta^0 z + n(\alpha - 1)^{n-1} \alpha \Delta' z + \frac{n.n-1}{1.2}(\alpha - 1)^{n-2} \alpha^2 \Delta^2 z + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(\alpha - 1)^{n-3} \alpha^3 \Delta^3 z + \ldots\ldots + \alpha^n \Delta^{(n)} z\}\,a^x,$$

équation qui, dans le cas de $z = 1$, coïncide avec la valeur de $\Delta^{(n)} a^x$ donnée *n.*° *IX*, en observant que $\alpha - 1$ est ici la même chose que A dans le n.° cité, et que $z = 1$ donne $\Delta z = 0$, $\Delta^2 z = 0$, &c.

Si on développe les expressions $(\alpha - 1)^n$, $(\alpha - 1)^{n-1}$, &c. il viendra

$$\left(\Delta^0 z + \frac{n}{1}\Delta' z + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 z + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 z + \&c.\ldots\right)\alpha^n a^x$$

$$\frac{-n}{1}\left(\Delta^0 z + \frac{n-1}{1}\Delta' z + \frac{n-1.n-2}{1.2}\Delta^2 z + \frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3}\Delta^3 z + \&c.\ldots\right)\alpha^{x-2} a^x$$

$$+ \frac{n.n-1}{1.2}\left(\Delta^0 z + \frac{n-2}{1}\Delta' z + \frac{n-2.n-3}{1.2}\Delta^2 z + \frac{n-2.n-3.n-4}{1.2.3}\Delta^3 z + \&c.\ldots\right)\alpha^{n-2} a^x$$

$$- \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\left(\Delta^0 z + \frac{n-3}{1}\Delta' z + \frac{n-3.n-4}{1.2}\Delta^2 z + \frac{n-3.n-4.n-5}{1.2.3}\Delta^3 z + \&c.\ldots\right)\alpha^{x-3} a^x.$$

Lorsque x croît par intervalles égaux à l'unité ou qu'on a $\Delta x = 1$, il en résulte $a^{\Delta x} = a$, et les séries précédentes sont les coëfficiens successifs de a^{x+n-1}, a^{x-n}, a^{x+n-2}, &c. Il ne faut pas perdre de vue que $\Delta^0 z$ et z sont deux expressions synonymes.

INTÉGRATION COMPLÈTE DES ÉQUATIONS

De la forme $A z_{(x)} + A' z_{(x+1)} = A'' z_{(x+2)} + \ldots\ldots + A^{(n)} z_{(x+n)} = 0$, A, A', A'', &c. *étant des Coëfficiens constans.*

La fonction qui donne l'intégrale de l'équation $\Delta^{(n)} z = 0$, peut, d'après ce que j'ai démontré, *n.os XIII et XIV*, être considérée comme le terme général d'une série z_0, z_1, z_2, &c. dans laquelle il existe entre un nombre $n+1$ de termes consécutifs une relation exprimée par l'équation

N.° XXII.

$$z_{(n)} - n z_{(x+1)} + \frac{n.n-1}{1.2} z_{(x+2)} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} z_{(x+3)} + \text{\&c.} \pm z_{(x+n)} = 0.$$

J'ai dit, *n.° cité*, que cette série était de la nature de celles qu'on nomme *récurrentes*, dont les coëfficiens $-n$, $+\frac{n.n-1}{1.2}$, &c. étaient l'*échelle de relation*. Supposons maintenant qu'au lieu des multiplicateurs $-n$, $+\frac{n.n-1}{1.2}$, &c. on ait des coëfficiens constans quelconques *A*, *A'*, *A''*, &c., on passera d'une espèce particulière à l'expression générique des suites récurrentes

$$A z_{(x)} + A' z_{(x+1)} + A'' z_{(x+2)} + \ldots + A^{(n)} z_{(x+n)} = 0 \ldots (1),$$

dont *A*, *A'*, *A''*, &c. forment l'*échelle de relation*, et dans laquelle un des termes extrêmes $z_{(n)}$ ou $z_{(x+n)}$ est donné par un nombre *n* de ceux qui le suivent ou le précèdent.

On pourra toujours, au moyen de l'équation (5) du *n.° VII*, transformer les termes $A z_{(x)}$, $A' z_{(x+1)}$, &c. en d'autres termes qui contiendraient les différences de $z_{(x)}$, car on a

$$z_{(x+1)} = z_{(x)} + \Delta z_{(x)}$$
$$z_{(x+2)} = z_{(x)} + 2\Delta z_{(x)} + \Delta^2 z_{(x)}$$

....

$$z_{(x+n)} = z_{(x)} + n\Delta z_{(x)} + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 z_{(x)} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 z_{(x)} + \ldots + \Delta^{(x)} z^{(x)} \ (*).$$

(*) Observez que *n*, dans l'équation

citée, est supposé $= 0$, et que x et n, dans celle-ci, représentent, respectivement, k et m dans l'équation citée.

On peut donc, en substituant ces valeurs dans l'équation (1), lui donner la forme

$$\lambda z_{(x)} + \lambda' \Delta z_{(x)} + \lambda'' \Delta^2 z_{(x)} + \lambda''' \Delta^3 z_{(x)} + \ldots\ldots\ldots + \lambda^{(n)} \Delta^{(n)} z_{(x)} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

λ, λ', λ'', &c. étant des coèfficiens donnés en valeurs de n et de A, A', A'', &c.; ainsi l'équation (1) représente une équation différentielle de l'ordre (n), et réciproquement.

Il est donc visible que l'intégration de l'équation (2) se réduit à la recherche du terme général $z_{(x)}$ de la série z_0, $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, &c. avec les conditions énoncées par l'équation (1).

De plus, si on connaît un nombre n de solutions ou de valeurs particulières de $z_{(x)}$, on pourra calculer ou construire autant de termes qu'on voudra de la série z_0, $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, &c.; car soient $z_{(x'+1)}$, $z_{(x'+2)}$, &c. $z_{(x'+n)}$ les n termes donnés, si on veut continuer la série en avant, on aura

$$z_{(x'+n+1)} = -\frac{1}{A^{(n)}}\left\{A^{(n-1)} z_{(x'+n)} + A^{(n-2)} z_{(x'+n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A z_{(x'+1)}\right\}$$

$$z_{(x'+n+2)} = -\frac{1}{A^{(n)}}\left\{A^{(n-1)} z_{(x'+n+1)} + A^{(n-2)} z_{(x'+n)} + A^{(n-3)} z_{(x'+n-1)} + \ldots + A z_{(x'+2)}\right\}$$

&c. &c.

et si on veut calculer en rétrogradant vers l'origine, on aura

$$z^{(x')} = -\frac{1}{A}\left\{A' z_{(x'+1)} + A'' z_{(x'+2)} + \ldots + A^{(n)} z_{(x'+n)}\right\};$$

$$z_{(x'-1)} = -\frac{1}{A}\left\{A' z^{(x')} + A'' z_{(x'+1)} + \ldots + A^{(n)} z_{(x'+n-1)}\right\}.$$

&c. &c.

J'ai fait sur $\Delta^{(n)} z = 0$ des observations qui rentrent dans les précédentes, cette équation n'étant qu'un cas particulier de l'équation (2) ci-dessus.

Pour en venir à l'intégration de l'équation (1), je remarque que si les indices (x), $(x+1)\ldots.(x+n)$, étaient transformés en exposans d'une quantité constante et inconnue α, cette équation serait divisible par α^x, ce qui ferait disparaître l'indéterminée x; je fais donc

$$z_{(x)} = \alpha^x;\ \text{d'où}\ z_{(x+1)} = \alpha^{x+1},\ z_{(x+2)} = \alpha^{x+2},\ \text{\&c.}\ldots z_{(x+n)} = \alpha^{x+n}$$

quantités qui, substituées dans l'équation (1), donnent

$$A\alpha^x + A'\alpha^{x+1} + A''\alpha^{x+2} + \ldots + A^{(n)}\alpha^{x+n} = 0 \ldots (3)$$

et en divisant par α^x

$$A + A'\alpha + A''\alpha^2 + A'''\alpha^3 + \ldots + A^{(n)}\alpha^n = 0 \ldots (4)$$

équation que je nommerai *équation de relation*, de laquelle on tirera un nombre n de valeurs de α, savoir $\alpha = \rho_{\prime}$, $\alpha = \rho_{\prime\prime}$ &c., d'où

$$\alpha^x = \rho_{\prime}^x;\ \alpha^x = \rho_{\prime\prime}^x;\ \alpha^x = \rho_{\prime\prime\prime}^x \ldots \alpha^x = \rho_{(n)}^x$$

ou en substituant à α^x son égal $z_{(x)}$

$$z_{(x)} = \rho_{\prime\prime}^x,\ z_{(x)} = \rho_{\prime\prime}^x\ z_{(x)} = \rho_{\prime\prime\prime}^x \ldots z_{(x)}\ \rho_{(n)}^x.$$

On peut donc satisfaire à l'équation (1), en substituant à $z_{(x)}$, $z_{(x+1)}$, les puissances x, $x+1$, &c. de l'une quelconque des racines $\rho_{\prime}$, $\rho_{\prime\prime}$, $\rho_{\prime\prime\prime}$, &c.; mais ces substitutions ne donneraient que des solutions particulières; car l'équation sera aussi satisfaite en égalant $z_{(x)}$ à la somme des racines élevées à la puissance x, et multipliées chacune par un coëfficient constant, ce qui introduit les n constantes arbitraires, nécessaires pour compléter l'intégrale et lui donner le sens le plus étendu dont elle soit susceptible : cette proposition n'étant qu'énoncée dans les ouvrages que je connais sur l'intégration des équations linéaires, je vais la démontrer avec détail. Il résulte des équations $z_{(x)} = \rho_{\prime}^x$, $z_{(x)} = \rho_{\prime\prime}^x$, &c. $z_{(x+1)} = \rho_{\prime}^{x+1}$, $z_{(x+1)} = \rho_{\prime\prime}^{x+1}$ &c. &c. que les expressions

$$A\ \rho_{\prime}^x + A'\ \rho_{\prime}^{x+1} + A''\ \rho_{\prime}^{x+2} + \text{\&c.}$$
$$A\ \rho_{\prime\prime}^x + A'\ \rho_{\prime\prime}^{x+1} + A''\ \rho_{\prime\prime}^{x+2} + \text{\&c.}$$
$$A\ \rho_{\prime\prime\prime}^x + A'\ \rho_{\prime\prime\prime}^{x+1} + A''\ \rho_{\prime\prime\prime}^{x+2} + \text{\&c.}$$

se réduiront d'elles-mêmes à zéro; or, la même propriété aura lieu si chacune de ces expressions est multipliée par une constante, c'est-à-dire que

$$A\ \mu_{\prime}\ \rho_{\prime}^x + A'\ \mu_{\prime}\ \rho_{\prime}^{x+1} + A''\ \mu_{\prime}\ \rho_{\prime}^{x+2} + \text{\&c.} = 0$$
$$A\ \mu_{\prime\prime}\ \rho_{\prime\prime}^x + A'\ \mu_{\prime\prime}\ \rho_{\prime\prime}^{x+1} + A''\ \mu_{\prime\prime}\ \rho_{\prime\prime}^{x+2} + \text{\&c.} = 0$$
$$A\ \mu_{\prime\prime\prime}\ \rho_{\prime\prime\prime}^x + A'\ \mu_{\prime\prime\prime}\ \rho_{\prime\prime\prime}^{x+1} + A''\ \mu_{\prime\prime\prime}\ \rho_{\prime\prime\prime}^{x+2} + \text{\&c.} = 0$$

additionnant ces équations et rassemblant tous les termes multipliés par un même coèfficient A, A', A'', &c.

$$\left.\begin{array}{l}
A\ (\mu_{,}\rho_{,}^{x} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{x} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{x} + \ldots + \mu_{(n)}\rho_{(n)}^{x})\\
+ A'\ (\mu_{,}\rho_{,}^{x+1} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{x+1} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{x+1} + \ldots + \mu_{(n)}\rho_{(n)}^{x+1})\\
+ A''\ (\mu_{,}\rho_{,}^{x+2} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{x+2} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{x+2} + \ldots + \mu_{(n)}\rho_{(n)}^{x+2})\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ A^{(n)}\ (\mu_{,}\rho_{,}^{x+n} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{x+n} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{x+n} + \ldots + \mu_{(n)}\rho_{(n)}^{x+n})
\end{array}\right\} = 0.$$

Cette équation comparée à l'équation (1) donne, en égalant tous les termes multipliés par les mêmes coèfficiens respectifs A, A', A'', &c.

$$\begin{array}{l}
z_{(x)} = \mu_{,}\rho_{,}^{x} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{x} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{x} + \ldots + \mu_{(n)}\rho_{(n)}^{x} \ldots\ldots (5)\\
z_{(x+1)} = \mu_{,}\rho_{,}^{x+1} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{x+1} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{x+1} + \ldots + \mu_{(n)}\rho_{(n)}^{x+1}\\
z_{(x+2)} = \mu_{,}\rho_{,,}^{x+2} + \mu_{,,}\rho_{,}^{x+2} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{x+2} + \ldots + \nu_{(n)}\rho_{(n)}^{x+2}\\
\quad\&c. \qquad\qquad\qquad \&c.
\end{array}$$

et l'équation (5), qui représente les suivantes, donne la valeur cherchée du terme général $z_{(x)}$ de la suite z_{0}, $z_{,}$, $z_{,,}$, &c. et par conséquent l'intégrale complète des équations (1) et (2) composée ainsi que je l'ai annoncé, de la somme des produits respectifs des n racines élevées à la puissance x par un même nombre de constantes arbitraires $\mu_{,}\ \mu_{,,} \ldots \mu_{n}$.

Détermination des Constantes.

Les n conditions d'après lesquelles on détermine les constantes arbitraires, peuvent toujours, ainsi que je l'ai observé dans le *n.° précédent*, se réduire à faire passer la courbe, dont l'équation (5) est le lieu géométrique, par un nombre n de points donnés, c'est-à-dire qu'aux valeurs

de x . . . . 0 1 2 3 . . . . . n

répondent des valeurs connues de z . . . . . z_{0} $z_{,}$ $z_{,,}$ $z_{,,,} \ldots z_{(n)}$.

Cette hypothèse donne un nombre n d'équations

$$\begin{array}{l}
z_{0} = \mu_{,} + \mu_{,,} + \mu_{,,,} + \ldots\ldots + \mu_{(n)}\\
z_{,} = \mu_{,}\rho_{,} + \mu_{,,}\rho_{,,} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{2} + \ldots\ldots + \mu_{(n)}\rho_{(n)}\\
z_{,,} = \mu_{,}\rho_{,}^{2} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{2} + \mu_{,,,}\rho_{,,,} + \ldots\ldots + \mu_{(n)}\rho_{(n)}^{2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_{(n)} = \mu_{,}\rho_{,}^{n} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{n} + \mu_{,,,}\rho_{,,}^{n} + \ldots\ldots + \mu_{(n)}^{n}\rho_{(n)}^{n}
\end{array}$$

d'où

d'où on tirera les valeurs de $\mu_{\prime}$, $\mu_{\prime\prime}$, $\mu_{\prime\prime\prime}$, &c., qui seront

pour $n = 1$ . . $\mu_{\prime} = z_0$

$$\text{pour } n = 2 \ldots \begin{cases} \mu_{\prime} = \dfrac{-\rho_{\prime\prime} z_0 + z_{\prime}}{\rho_{\prime} - \rho_{\prime\prime}} \\[2ex] \mu_{\prime\prime} = \dfrac{-\rho_{\prime} z_0 + z_{\prime}}{\rho_{\prime} - \rho_{\prime\prime}} \end{cases}$$

$$\text{pour } n = 3 \ldots \begin{cases} \mu_{\prime} = \dfrac{\rho_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime\prime} z_0 - (\rho_{\prime\prime} + \rho_{\prime\prime\prime}) z_{\prime} + z_{\prime\prime}}{(\rho_{\prime} = \rho_{\prime\prime})\,(\rho_{\prime} - \rho_{\prime\prime\prime})} \\[2ex] \mu_{\prime\prime} = \dfrac{\rho_{\prime}\rho_{\prime\prime\prime} z_0 - (\rho_{\prime} + \rho_{\prime\prime\prime}) z_{\prime} + z_{\prime\prime}}{(\rho_{\prime\prime} - \rho_{\prime})\,(\rho_{\prime\prime} - \rho_{\prime\prime\prime})} \\[2ex] \mu_{\prime\prime\prime} = \dfrac{\rho_{\prime}\rho_{\prime\prime} z_0 - (\rho_{\prime} + \rho_{\prime\prime}) z_{\prime\prime} + z_{\prime\prime}}{(\rho_{\prime\prime\prime} - \rho_{\prime})\,(\rho_{\prime\prime\prime} - \rho_{\prime\prime})} \end{cases}$$

$$\text{pour } n = 4 \ldots \begin{cases} \mu_{\prime} = \dfrac{-\rho_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime\prime}\rho_{iv} z_0 + (\rho_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime\prime} + \rho_{\prime\prime}\rho_{iv} + \rho_{\prime\prime\prime}\rho_{iv}) z_{\prime} - (\rho_{\prime\prime} + \rho_{\prime\prime\prime} + \rho_{iv}) z_{\prime\prime} + z_{\prime\prime\prime}}{(\rho_{\prime} - \rho_{\prime\prime})\,(\rho_{\prime} - \rho_{\prime\prime\prime})\,(\rho_{\prime} - \rho_{iv})} \\[2ex] \mu_{\prime\prime} = \dfrac{-\rho_{\prime}\rho_{\prime\prime\prime}\rho_{iv} z_0 + (\rho_{\prime}\rho_{\prime\prime\prime} + \rho_{\prime}\rho_{iv} + \rho_{\prime\prime\prime}\rho_{iv}) z_{\prime} - (\rho_{\prime} + \rho_{\prime\prime\prime} + \rho_{iv}) z_{\prime\prime} + z_{\prime\prime\prime}}{(\rho_{\prime\prime} - \rho_{\prime})\,(\rho_{\prime\prime} - \rho_{\prime\prime\prime})\,(\rho_{\prime\prime} - \rho_{iv})} \\[2ex] \mu_{\prime\prime\prime} = \dfrac{-\rho_{\prime}\rho_{\prime\prime}\rho_{iv} z_0 + (\rho_{\prime}\rho_{\prime\prime} + \rho_{\prime}\rho_{iv} + \rho_{\prime\prime}\rho_{iv}) z_{\prime} - (\rho_{\prime} + \rho_{\prime\prime} + \rho_{iv}) z_{\prime\prime} + z_{\prime\prime\prime}}{(\rho_{\prime\prime\prime} - \rho_{\prime})\,(\rho_{\prime\prime\prime} - \rho_{\prime\prime})\,(\rho_{\prime\prime\prime} - \rho_{iv})} \\[2ex] \mu_{iv} = \dfrac{-\rho_{\prime}\rho_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime\prime} z_0 + (\rho_{\prime}\rho_{\prime\prime} + \rho_{\prime}\rho_{\prime\prime\prime} + \rho_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime\prime}) z_{\prime} + (\rho_{\prime} + \rho_{\prime\prime} + \rho_{\prime\prime\prime}) z_{\prime\prime} + z_{\prime\prime\prime}}{(\rho_{iv} - \rho_{\prime})\,(\rho_{iv} - \rho_{\prime\prime})\,(\rho_{iv} - (\rho_{\prime\prime\prime})} \end{cases}$$

&c. &c.

En général, quel que soit le nombre n, pour avoir le numérateur de la fraction qui donne la constante $\mu_{(k)}$, il faut prendre toutes les racines, excepté la racine $\rho_{(k)}$, et des $n - 1$ racines restantes, en trouver le produit total, la somme des produits $n - 2$ à $n - 2$, $n - 3$ à $n - 3$, $n - 4$ à $n - 4$ . . . . . . 2 à 2, 1 à 1, multiplier, respectivement, le produit total et chacune des sommes par $z_0, z_{\prime}, z_{\prime\prime} \ldots\ldots\ldots z_{(n-2)}$, ajouter $z_{(n-1)}$, et donner à tous les termes des signes alternatifs, en commençant par $-$ ou $+$, selon que n est pair ou impair.

Pour avoir le dénominateur, on soustraira, successivement, de $\rho_{(k)}$ chacune des autres racines, et on fera un produit de toutes les différences données par ces soustractions.

Remarque sur l'analogie entre les équations qui satisfont à la proposée (1), *et celles qui divisent l'équation de relation* (4).

L'ÉQUATION (1), dont j'ai donné l'intégrale complète, a un indice (x) qui désigne la distance des termes au terme initial de la série ; mais si on ne veut prendre cette distance qu'à compter du premier des termes de l'équation elle-même, il faudra retrancher (x) de tous les indices, qui deviendront alors $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots (n)$. Dans cet état, l'équation offre des analogies avec l'équation de relation (4), qu'il est important de remarquer, et qui me serviront bientôt à résoudre un cas d'intégration qui semble échapper à la règle générale.

Voici les équations (1) et (4), en retranchant l'indice (x) dans l'équation (1),

$$A z_0 + A' z_1 + A'' z_2 + A''' z_3 + \ldots + A^{(n)} z_{(n)} = 0\,;$$
$$A \alpha^0 + A' \alpha^1 + A'' \alpha^2 + A''' \alpha^3 + \ldots + A^{(n)} \alpha^n = 0.$$

On voit, d'abord, que les indices de z dans la première de ces équations servent d'exposans à α, dans la seconde, tous les coëfficiens étant, d'ailleurs, les mêmes ; ensuite les équations $\alpha - \rho_{,} = 0$, $\alpha - \rho_{,,} = 0$, $\alpha - \rho_{,,,} = 0$, &c. qui satisfont à l'équation (4), donnent respectivement les termes $\mu_{,} \rho_{,}^x$, $\mu_{,,} \rho_{,,}^x$, $\mu_{,,,} \rho_{,,,}^x$, &c. qui satisfont à l'équation (1) ; maintenant si on prend le produit $(\alpha - \rho_{,})(\alpha - \rho_{,,})$ et qu'on l'égale à zéro, on aura une équation de relation

$$\rho_{,} \rho_{,,} \alpha^0 - (\rho_{,} + \rho_{,,}) \alpha^1 + \alpha^2 = 0,$$

qui satisfera à l'équation (4) et à laquelle doit répondre une équation différentielle

$$\rho_{,} \rho_{,,} z_0 - (\rho_{,} + \rho_{,,}) z_1 + z_2 = 0,$$

satisfaisant à l'équation (1). Pareillement de $(\alpha - \rho_{,})(\alpha - \rho_{,,})(\alpha - \rho_{,,,}) = 0$, on tirera les deux équations

$$\rho_{,} \rho_{,,} \rho_{,,,} \alpha^0 - (\rho_{,} \rho_{,,} + \rho_{,} \rho_{,,,} + \rho_{,,} \rho_{,,,}) \alpha^1 + (\rho_{,} + \rho_{,,} + \rho_{,,,}) \alpha^2 - \alpha^3 = 0,$$
$$\rho_{,} \rho_{,,} \rho_{,,,} z_0 - (\rho_{,} \rho_{,,} + \rho_{,} \rho_{,,,} + \rho_{,,} \rho_{,,,}) z_1 + (\rho_{,} + \rho_{,,} + \rho_{,,,}) z_2 + z_3 = 0,$$

dont la première satisfait à l'équation (4), et la seconde à l'équation (1), et ainsi de suite ; il est en effet évident que toutes les équations en z_0, z_1, &c. dérivées des équations de relation en α^0, α^1, α^2, &c. s'intégreront par le moyen de ces dernières, et auront dans leurs intégrales les quantités

$\varrho_{,}^{x}$, $\varrho_{,,}^{x}$, $\varrho_{,,,}^{x}$, &c. qui satisfont, ou chacune en particulier, ou toutes ensemble, à l'équation générale (1).

On voit, par ce rapprochement, que l'intégrale (5) de l'équation (1) qui est de l'ordre n, peut être considérée comme la somme des intégrales de plusieurs équations de même espèce des ordres n', n'', &c. avec la condition 1.° que $n' + n'' + n'''$, &c. $= n$; 2.° que l'équation de relation (4) soit égale aux produits de toutes les équations de relation des degrés n', n'', &c. &c. appartenant aux diverses intégrales dont la somme donne l'équation (5). Il est bien entendu que lorsqu'après toutes ces intégrations on passe à la détermination des constantes, pour satisfaire aux conditions particulières de la question, on ne peut plus admettre de combinaison particulière, mais qu'il faut que la totalité des termes coopère à cette détermination.

Je conclus de ce qui précède, que lorsque l'équation de relation aura des racines égales ou imaginaires, on pourra considérer séparément les facteurs composés qui en proviennent, dans lesquels substituant z_0, $z_{,}$, $z_{,,}$, &c. respectivement, à la place de α^0, α^1, α^2, &c. on aura des équations différentielles linéaires dont les intégrales satisferont à l'intégrale complète de la proposée; il ne s'agit donc plus, pour rendre la théorie précédente aussi générale qu'il est possible, que de trouver la forme de l'intégrale lorsque l'équation de relation est un binome élevé à une puissance, ou un facteur multiple dont les facteurs simples sont imaginaires.

Cas où l'équation de relation a des racines égales.

Ce cas présente des considérations assez délicates; j'en donnerai deux solutions à l'une desquelles se rapporte celle qui se trouve ordinairement dans les auteurs, mais présentée d'une manière plus rigoureuse, par la théorie des limites que j'ai déjà employée plusieurs fois; l'autre qui n'a encore été, que je sache, publiée par personne, résout le problème sans supposer aucune quantité évanescente.

PREMIÈRE SOLUTION.

Soient les racines égales

$$\varrho_{,} = \varrho_{,,} = \varrho_{,,,} = \ldots\ldots\ldots = \varrho_{(k)} = \varrho_{(k+1)}$$

et soit X la collection des termes de l'intégrale qui comprennent les

autres racines ; la forme de cette intégrale qui se présente d'abord, est

$$z_{(x)} = (\mu_{\prime} + \mu_{\prime\prime} + \mu_{\prime\prime\prime} + \ldots + \mu_{(k)} + \mu_{(k+1)})\, \rho_{\prime}^{x} + X;$$

mais cette équation n'offre point la solution de la question, 1°. parce que les $k + 1$ constantes qui multiplient $\rho_{\prime}^{x}$ ne doivent être réellement regardées que comme une seule, et qu'ainsi il manquerait un nombre k des constantes nécessaires pour compléter l'intégrale ; 2.° parce que chacune de ces constantes a une valeur de la forme $\frac{A}{o^{k}}$, ainsi qu'on peut s'en assurer en introduisant la condition de l'égalité des racines dans les valeurs de $\mu_{\prime}\, \mu_{\prime\prime}$, &c. données précédemment.

Pour résoudre cette difficulté, je vais rétablir l'inégalité des racines, introduire leurs différences dans l'équation intégrale et voir ensuite ce qui arrivera lorsque ces différences seront supposées nulles.

Soient . . . . $\rho_{\prime\prime} - \rho_{\prime} = \omega_{\prime}$; $\rho_{\prime\prime\prime} - \rho_{\prime} = \omega_{\prime\prime}$; $\rho_{\text{IV}} - \rho_{\prime} = \omega_{\prime\prime\prime}$ . . . . . .

$$\rho_{(k+1)} - \rho_{\prime} = \omega_{(k)},$$

l'équation intégrale sera de la forme

$$z_{(x)} = \mu_{\prime}\rho_{\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime}(\rho_{\prime} + \omega_{\prime})^{x} + \mu_{\prime\prime\prime}(\rho_{\prime} + \omega_{\prime\prime})^{x} + \mu_{\text{IV}}(\rho_{\prime} + \omega_{\prime\prime\prime})^{x}$$
$$+ \ldots + \mu_{(k+1)}(\rho_{\prime} + \omega_{(k)})^{x} + X.$$

Développant les puissances des binomes et ajoutant les termes multipliés par les mêmes puissances de ρ', on aura

$$z_{(x)} = \left\{\begin{array}{l} \mu' \\ + \mu_{\prime\prime} \\ + \mu_{\prime\prime\prime} \\ + \ldots\ldots \\ + \mu_{(k+1)} \end{array}\right\} \rho_{\prime}^{x} + \left\{\begin{array}{l} \mu_{\prime\prime}\,\omega_{\prime} \\ + \mu_{\prime\prime\prime}\,\omega_{\prime\prime} \\ + \mu_{\text{IV}}\,\omega_{\prime\prime\prime} \\ + \ldots\ldots\ldots \\ + \mu_{(k+1)}\,\omega_{(k)} \end{array}\right\} x\,\rho_{\prime}^{x-1} + \left\{\begin{array}{l} \mu''\,\omega_{\prime}^{2} \\ + \mu_{\prime\prime\prime}\,\omega^{2}_{\prime\prime} \\ + \mu_{\text{IV}}\,\omega^{2}_{\prime\prime\prime} \\ + \ldots\ldots\ldots \\ + \mu_{(k+1)}\,\omega^{2}_{(k)} \end{array}\right\} \frac{x\,.\,x-1}{1\,.\,2}\,\rho_{\prime}^{x-2} + \left\{\begin{array}{l} \mu_{\prime\prime}\,\omega_{\prime}^{3} \\ + \mu_{\prime\prime\prime}\,\omega^{3}_{\prime\prime} \\ + \mu_{\text{IV}}\,\omega^{3}_{\prime\prime\prime} \\ + \ldots\ldots\ldots \\ + \mu_{(k+1)}\,\omega^{3}_{(k)} \end{array}\right\}$$

$$\frac{x\,.\,x-1\,.\,x-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,\rho_{\prime}^{x-3} + \ldots + \left\{\begin{array}{l} \mu_{\prime\prime}\,\omega^{k} \\ + \mu_{\prime\prime\prime}\,\omega^{k}_{\prime\prime} \\ + \mu^{\text{IV}}\,\omega^{k}_{\prime\prime\prime} \\ + \ldots\ldots\ldots \\ + \mu_{(k+1)}\,\omega_{(k)} \end{array}\right\} \frac{x\,(x-1)\ldots[x-(k-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots k}\,\rho_{\prime}^{x-k} + \&\text{c}\ldots + X,$$

Maintenant les $k + 1$ équations qui contiennent $\mu_{\prime}$, $\mu_{\prime\prime}$, $\mu_{\prime\prime\prime}$ . . . . $\mu_{(k+1)}$ exprimées en quantités connues, donneront les valeurs des coëfficiens

de $\varrho_{,}^{x}$, $x\varrho_{,}^{x-1}$, $\frac{x.x-1}{1.2}\varrho_{,}^{x-2}$, &c, et, dans chacune de ces valeurs, $\omega_{,}$, $\omega_{,,}$, $\omega_{,,,}$, &c. s'élimineront d'elles-mêmes, ou se trouveront isolées, jusqu'au terme qui contient $\varrho_{,}^{x-k}$, en sorte que les seuls coëfficiens des puissances de $\varrho_{,}$ qui seront multipliés en totalité par $\omega_{,}$, $\omega_{,,}$, $\omega_{,,,}$, &c., seront ceux de $\varrho_{,}^{x-(k+1)}$, $\varrho_{,}^{x-(k+2)}$, &c.; lors donc qu'on supposera les $k+1$ racines $\varrho_{,}$, $\varrho_{,,}$, $\varrho_{,,,}$, &c. égales, c'est-à-dire, qu'on fera $\omega_{,}=0$, $\omega_{,,}=0$, $\omega_{,,,}=0$, &c. tous les termes de la série qui contiendront $\varrho_{,}^{x-(k+1)}$, $\varrho_{,}^{n-(k+2)}$, &c. s'évanouiront, et les termes restans, dans lesquels $\omega_{,}$, $\omega_{,,}$, &c. ne seront plus, s'étendront depuis $\varrho_{,}^{x}$ jusqu'à $\varrho_{,}^{k-n}$ inclusivement, ce qui doit être, nécessairement, pour que l'équation puisse fournir les $k+1$ constantes arbitraires que comportent les $k+1$ racines égales applicables à un nombre égal de conditions différentes.

Ainsi dans le cas de $k+1$ racines égales à $\varrho_{,}$, l'équation intégrale aura la forme

$$z_{(x)}=M_{,}\varrho_{,}^{x}+M_{,,}x\varrho_{,}^{x-1}+M_{,,,}\frac{x.x-1}{1.2}\varrho_{,}^{x-2}+\dots\dots\dots+$$
$$M_{(k+1)}.\frac{x.x-1\dots[x-(k-1)]}{1.2.3\dots\dots k}\varrho_{,}^{x-k}+\mu_{(k+2)}\varrho_{(k+2)}^{x}$$
$$+\mu_{(k+3)}\varrho_{(k+3)}^{x}+\dots\dots\dots+\mu_{(n)}\varrho_{(n)}^{x};$$

ou, en multipliant et divisant toutes les puissances de $\varrho_{,}$ depuis $\varrho_{,}^{x-1}$ jusqu'à $\varrho_{,}^{x-k}$, respectivement, par $\varrho_{,}$, $\varrho_{,}^{2}$, $\varrho_{,}^{3}$, &c. et développant tous les produits en x,

$$z_{(x)}=(m_{,}+m_{,,}x+m_{,,,}x^{2}+m_{\text{IV}}x^{2}+\dots\dots\dots+m_{(k+1)}x^{k})\varrho_{,}^{x}+$$
$$\mu_{(k+2)}\varrho_{(k+2)}^{x}+\mu_{(k+3)}\varrho_{(k+3)}^{x}+\dots\dots\dots+\mu_{(n)}\varrho_{(n)}^{x}$$

DEUXIÈME SOLUTION.

Il résulte de ce que j'ai dit sur l'analogie entre l'équation différentielle (1) et l'équation de relation (4), que si on a une équation

$$(\alpha-\varrho)^{k}=0$$

qui satisfasse à l'équation de relation, dans laquelle, en développant la puissance $k+1$, on a

$$\alpha^{k}-k\alpha^{k-1}\varrho_{,}+\frac{k.k-1}{1.2}\alpha^{k-2}\varrho_{,}^{2}+\dots\dots\dots\pm\varrho_{,}^{k}=0,$$

et qu'on écrive à la place de α^k, α^{k-1}, α^{k-2}, &c. respectivement, $z_{(k)}$, $z_{(k-1)}$, $z_{(k-2)}$, &c., d'où il résultera

$$z_{(k)} - k\,\rho_{,}\,z_{(k-1)} + \frac{k.k-1}{1.2}\,\rho_{,}^{2}\,z_{(k-2)} - \text{\&c.} \ldots\ldots\ldots \pm \rho_{,}^{k}\,z_{(0)} = 0 \ldots\ldots (6),$$

l'intégrale de cette dernière équation satisfera à l'équation différentielle proposée, dont elle sera une solution particulière, qui, ajoutée aux termes donnés par les autres facteurs de l'équation de relation, formera l'intégrale complète. Or, $(\alpha - \rho_{,})^k$ résulte de l'égalité d'un nombre k de racines de l'équation de relation; donc l'intégrale de l'équation (6) sera la partie du terme général, ou de l'intégrale totale qui répond à ces racines égales. Pour effectuer l'intégration de l'équation (6), on changera d'abord les fonctions $z_{(k)}$, $z_{(k-1)}$, &c. en différences de z_0 au moyen des formules du *n°. VII*, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l}
z_0 + k\Delta z_0 + \frac{k.k-1}{1.2}\Delta^2 z_0 + \ldots\ldots\ldots + \Delta^{(k)} z_0 \\
- k\left[z_0 + (k-1)\Delta z_0 + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2}\Delta^2 z_0 + \ldots + \Delta^{(k-1)} z_0\right]\rho_{,} \\
+ \frac{k.k.1}{1.2}\left[z_0 + (k-2)\Delta z_0 + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\Delta^2 z_0 + \ldots + \Delta^{(k-2)} z_0\right]\rho_{,}^{2} \\
\frac{-k.k-1.k-2}{1.2.3}\left[z_0 + (k-3)\Delta z_0 + \frac{(k-3)(k-4)}{1.2}\Delta^2 z_0 + \ldots + \Delta^{(k-3)} z_0\right]\rho_{,}^{3} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm z_0\,\rho_{,}
\end{array}\right\} = 0.$$

Faisant ensuite $z_0 = t\,\rho_{,}^{x}$, prenant les différences 1.res, 2.es, &c. de $t\,\rho^x$, au moyen de la formule que j'ai donnée *n.° XIII, (insérée à la fin du n.° XXI)*, observant que $\Delta x = 1$, parce que x n'est que l'indice du numéro de chaque terme, et substituant les différences trouvées à la place de Δz_0, $\Delta^2 z_0$, &c., il arrivera que tous les termes s'élimineront d'eux-mêmes, excepté celui qui contient $\Delta^{(k)} t$, et qu'ainsi on aura

$$\Delta^{(k)} t = 0,$$

ce qui, *n.° XXI*, donne

$$t = m_{,} + m_{,,}\,x + m_{,,,}\,x^2 + m_{IV}\,x^3 + \ldots\ldots m_{(k)}\,x^{k-1},$$

et c'est précisément le même coëfficient de $\rho_{,}^{x}$ trouvé précédemment, en

substituant $k+1$ à k, vu que, dans la solution précédente, j'avais supposé un nombre $k+1$ de racines égales, et que dans celle-ci j'ai calculé pour un nombre k.

On peut parvenir au résultat précédent d'une manière beaucoup plus simple en substituant immédiatement la valeur $t_{(0)}\rho_{,}^{x}$ dans l'équation (6), et observant qu'on a $z_{(0)}=t_{(0)}\rho_{,}^{x}$; $z_{,}=t_{,}\rho_{,}^{x+1}$; $z_{,,}=t_{,,}\rho_{,}^{x+2}$ &c.... $z_{(k)}=t_{(k)}\rho_{,}^{x+k}$, ce qui donnera

$$t_{(k}\rho_{,}^{x+k}-k\rho_{,}.t_{(k-1)}\rho_{,}^{x+k-1}+\frac{k.k-1}{1.2}\rho_{,}^{2}.t_{(k-2)}\rho_{,}^{x+k-2}-\ldots\pm\rho_{,}^{k}t_{(0)}\rho_{,}^{x}=0;$$

divisant tous les termes par $\rho_{,}^{x+k}$, il viendra $t_{(k)}-kt_{(k-1)}+\frac{k.k-1}{1.2}$ $t_{(k-2)}-$ &c...... $\pm t_{(0)}=0$, équation dont le premier membre est précisément la valeur de $\Delta^{(k)}t$, et qui équivaut par conséquent à $\Delta^{(k)}t=0$.

Cas où l'équation de relation contient des racines imaginaires.

Les facteurs doubles de l'équation de relation, qui contiendront des facteurs simples imaginaires, seront (*n.° XVIII*) de la forme

$$\alpha\alpha-2\rho\alpha\,\text{cos}.\,\varphi+\rho\rho.$$

J'ai fait voir, dans le *numéro cité*, comment ρ et φ se déduisaient des valeurs données immédiatement par l'équation; et d'après l'analogie que j'ai établie entre l'équation de relation et l'équation intégrale, pour trouver la forme du terme que le facteur ci-dessus introduit dans la dernière équation, il suffit de considérer ce facteur comme dérivant de l'équation différentielle du deuxième ordre

$$Az_{(x)}+A''_{(x+1)}+A_{(x+2)}=0,$$

dont l'intégrale est en général

$$z_{(x)}=\mu_{,}\rho_{,}^{x}+\mu_{,,}\rho_{,,}^{x},$$

et dans laquelle on a

$$\mu_{,}=\frac{-\rho_{,,}z_{0}+z_{,}}{\rho_{,}-\rho_{,,}};\ \mu_{,,}=\frac{-\rho_{,}z_{0}+z_{,}}{\rho_{,,}-\rho_{,}};$$

substituant ces valeurs dans l'équation intégrale, elle deviendra

$$z_{(x)}=\frac{z_{,}(\rho_{,}^{x}-\rho_{,,}^{x})+z_{0}(\rho_{,}\rho_{,,}^{x}-\rho_{,,}\rho_{,}^{x})}{\rho_{,}-\rho_{,,}}\ \ldots\ldots\ldots(7),$$

ou, parce que

$$\rho_{,}\rho_{,,}^{x}-\rho_{,,}\rho_{,}^{x}=\rho_{,}\rho_{,,}(\rho_{,,}^{x-1}-\rho_{,}^{x-1})$$

$$z_{(x)}=\frac{z_{,}(\rho_{,}^{x}-\rho_{,,}^{x})+z_{0}\rho'\rho''(\rho_{,,}^{x-1}-\rho_{,}^{x-1})}{\rho_{,}-\rho_{,,}}.$$

Maintenant l'équation

$$\alpha\alpha - 2\rho\alpha \cos.\varphi + \rho\rho = 0$$

donne pour les deux valeurs de α, c'est-à-dire pour $\rho_{,}$ et $\rho_{,,}$

$$\rho_{,} = \rho\,[\cos.\varphi + \sin.\varphi\sqrt{(-1)}]\ \text{d'où}\ \rho_{,}^{x} = \rho^{x}[\cos.(\varphi x) + \sin.(\varphi x)\sqrt{(-1)}]$$
$$\rho_{,,} = \rho\,[\cos.\varphi - \sin.\varphi\sqrt{(-1)}]\ \text{d'où}\ \rho_{,,}^{x} = \rho^{x}[\cos.(\varphi x) - \sin.(\varphi x)\sqrt{(-1)}].$$

De plus, (n.° XX), $\cos.\varphi \pm \sin.\varphi\sqrt{(-1)} = e^{\pm\varphi\sqrt{(-1)}}$, e étant la base du système des logarithmes hyperboliques, ce qui donne

$$\rho_{,} = \rho\, e^{\varphi\sqrt{(-1)}},\ \rho_{,,} = \rho\, e^{-\varphi\sqrt{(-1)}},$$

et il résulte de ces théorèmes

$$\rho_{,}^{x} - \rho_{,,}^{x} = 2\rho^{x}\sin.(\varphi x)\sqrt{(-1)}$$
$$\rho_{,,}^{x-1} - \rho_{,}^{x-1} = -2\rho^{x-1}\sin.[\varphi.(x-1)]\sqrt{(-1)}$$
$$\rho_{,} - \rho_{,,} = 2\rho\sin.\varphi\sqrt{(-1)}$$
$$\rho_{,}\rho_{,,} = \rho^{2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (7), le numérateur et le dénominateur du second membre deviendront divisibles par $\sqrt{(-1)}$, et on aura

$$z_{(x)} = \frac{z_{,}\sin.(\varphi x) - z_{0}\,\rho\sin.[\varphi.(x-1)]}{\rho\sin.\varphi}\,\rho^{x};$$

ce qui peut s'exprimer généralement par

$$z_{(x)} = \{m'\sin.(\varphi x) + m''\sin.[\varphi(x-1)]\}\,\rho^{x}.$$

En réfléchissant sur la marche de la solution que je viens de donner, on verra aisément que l'artifice employé pour faire évanouir les imaginaires, consiste à combiner la partie du terme général provenant du facteur double, de manière que le numérateur et le dénominateur aient dans chacun de leurs termes une expression de la forme $A\rho_{,}^{k}\rho_{,,}^{k}(\rho_{,}^{k'} - \rho_{,,}^{k'})$ ou de la forme $B(\rho_{,}^{m} + \rho_{,,}^{m})(\rho_{,}^{m'} - \rho_{,,}^{m'})$; on pourra, en généralisant ce procédé, parvenir à trouver la partie de l'intégrale donnée par un facteur multiple quelconque $\{\alpha\alpha - 2\rho\alpha\cos.\varphi + \rho\rho\}^{k}$. Le calcul est

est plus long que difficile; mais je n'étendrai pas plus loin ces recherches; les élèves ayant suffisamment de quoi s'exercer dans ce qui précède.

Propriété générale des suites récurrentes.

Le terme général d'une suite récurrente étant de la forme

$$z_{(x)} = \mu_{\prime\prime} \rho_{\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime\prime} \rho_{\prime\prime}^{x} + \ldots\ldots + \mu_{(n)} \rho_{(n)}^{x}$$

les différences de tous les ordres seront (*n.° IX*) de la forme

$$\Delta^{(k)} z_{(x)} = \sigma_{\prime} \rho_{\prime}^{x} + \sigma_{\prime\prime} \rho_{\prime}^{x} + \sigma_{\prime\prime\prime} \rho_{\prime\prime}^{x} + \ldots\ldots\ldots + \sigma_{(n)} \rho_{(n)}^{x}$$

$\sigma_{\prime}$, $\sigma_{\prime\prime}$, $\sigma_{\prime\prime\prime}$, &c. étant des constantes comme $\mu_{\prime}$, $\mu_{\prime\prime}$, $\mu_{\prime\prime\prime}$, &c.; on voit par-là que les différences de tous les ordres des termes d'une suite récurrente, sont des suites récurrentes de même ordre, et il est aisé de trouver la loi qui lie les diverses échelles de relation entr'elles. Il faut cependant excepter le cas où l'échelle de relation aurait une ou plusieurs racines égales à l'unité, ce qui introduirait dans le terme général une quantité constante ou une fonction rationnelle de x, sans diviseur variable, qui s'évanouirait ou diminuerait de dimension à chaque différenciation. On voit, par-là, comment les propriétés exposées *n.° XI*, se rapportent à celles des suites récurrentes en général.

CHIMIE.

OBSERVATIONS

Sur les propriétés eudiométriques du Phosphore,

Par le C.^{en} BERTHOLLET.

UN mémoire de *Göttling*, sur l'action que le phosphore exerce sur le gaz azote, annonçait des phénomènes qui ne pouvaient se concilier avec les résultats auxquels est parvenue la chimie. (*Journal de physique de Gren. 1795.*)

Non-seulement le phosphore était plus lumineux dans le gaz azote pur, que dans l'air atmosphérique, mais il l'absorbait, et se changeait par-là en acide. Deux autres chimistes, *Lempe* et *Lampadius*, ajoutaient, dans un autre mémoire, que le phosphore qui brûlait dans l'air atmosphérique, ne laissait pour résidu que de l'air pur.

Des assertions si extraordinaires de trois chimistes inquiètent ma curiosité : nous nous occupons à l'instant, *Welter* et moi, des expériences qui doivent fixer notre opinion.

Le phosphore placé dans du gaz azote, provenant de la décomposition de l'ammoniaque par l'acide muriatique oxigéné, et lavé avec soin, a été lumineux dans l'obscurité, et au jour il a formé des vapeurs blanches, vapeurs qui sont un indice de la lumière qu'on aperçoit dans l'obscurité; mais ces apparences n'ont duré que peu de temps, et elles ont été beaucoup moins longues et moins fortes que dans l'air atmosphérique : celui-ci a continué d'être lumineux, jusqu'à ce que l'oxigène ait entièrement été absorbé; alors si on ajoute de l'oxigène, tout le gaz devient lumineux; mais dans le gaz oxigène seul, on n'aperçoit, à une température basse, ni lumière, ni aucune diminution de volume, ainsi que l'a annoncé *Göttling*.

Ces expériences variées de différentes manières prouvent que le gaz

azote a la propriété de dissoudre le phosphore (1); qu'au moyen de cette dissolution l'oxigène s'unit avec lui, et que c'est ainsi que s'opère cette combustion lente qu'on a observée dans le phosphore exposé à l'air, et dont on s'est servi pour le convertir en acide phosphorique; mais que si l'azote ne l'a pas dissous préalablement, le gaz oxigène ne peut le dissoudre lui-même qu'à une température plus élevée, et lorsque la chaleur a détruit la force de cohésion qui réunissait les molécules du phosphore, et s'opposait à leur combinaison avec d'autres principes; alors la combustion commence, c'est ainsi que se fait l'inflammation ardente du phosphore.

Toutes les circonstances confirment cette explication. Si l'on fait passer des bulles de gaz oxigène dans le gaz azote qui a dissous le phosphore, celui-ci devient tout lumineux; si on y laisse le phosphore et que l'on continue d'ajouter successivement du gaz oxigène, la lumière se maintient, et lorsqu'elle finit, le gaz oxigène a tout disparu.

La lumière est d'autant plus vive que la proportion du gaz azote est plus forte, excepté cependant l'extrême; elle dure d'autant plus long-temps que la proportion de l'oxigène est plus grande. Dans le cas d'une grande proportion d'oxigène, la lumière commence avec peine; elle demande une température plus élevée; elle est d'abord faible, elle augmente graduellement, le phosphore entre en fusion, et après cela l'inflammation ardente s'établit.

Le gaz oxigène qui se trouve avec le gaz azote, disparaît donc, et de sa combinaison avec le phosphore résulte l'acide phosphorique; mais comme le phénomène se prolonge, la chaleur qui se dégage devient peu sensible.

La combinaison lente du phosphore, me paraît un moyen eudiométrique qui égale ou surpasse tous ceux qui ont été présentés jusqu'ici; sur-tout lorsque les proportions ne s'éloignent pas beaucoup de celles de l'air atmosphérique.

Cet eudiomètre a une plus grande précision que ceux dans lesquels

---

(1) *Guyton* a reconnu positivement la dissolution du phosphore ou d'*un gaz phosphoreux*, par le gaz azote. (Encyclop. méth. *Chim. p. 707.*) *Vauquelin* a parlé de cette propriété du gaz azote dans un rapport fait à la société phylomatique. *Fourcroy* a remarqué *que le phosphore perdait au milieu de l'air vital une grande partie de sa propriété lumineuse, si bien entretenue par l'air atmosphérique.* (Mém. de l'acad. 1788.)

la diminution se partage entre deux gaz, comme dans l'épreuve par le gaz nitreux et par le gaz hydrogène : il est moins embarrassant et d'une action plus prompte que le sulfure de potasse, ou le mélange de soufre et de fer; et il a l'avantage de présenter un indice certain de la fin de l'absorption ; car alors l'atmosphère du phosphore devient transparente et cesse d'être lumineuse. J'invite les météorologistes à tenter l'usage d'une méthode par laquelle ils pourront facilement rendre compte des variations qui peuvent arriver dans les proportions des deux parties de l'atmosphère.

On n'a qu'à introduire dans un tube gradué qui contienne le gaz dont on veut faire l'épreuve, un cylindre de phosphore, fixé sur un tube de verre : plus le cylindre de phosphore approche par sa longueur, de celle de la portion du tube qui contient le gaz, et plus celui-ci est étroit, plus l'absorption de l'oxigène est prompte : on peut l'accélérer, si la température est basse, en appliquant au verre la simple chaleur de la main; il faudrait tempérer au contraire la chaleur, si elle était trop élevée, car on doit éviter l'inflammation du phosphore, qui est toujours précédée de sa fusion; lors donc qu'on aperçoit des indices de fusion, il faut abaisser le phosphore sous l'eau : une épreuve peut être terminée en moins d'une demi-heure.

Si l'on avait à éprouver un gaz où l'azote se trouverait en trop petite proportion, on n'aurait qu'à ajouter un volume déterminé d'air atmosphérique.

Déjà plusieurs chimistes ont proposé de se servir du phosphore pour cet objet; mais ils ont employé la combustion rapide, qui exige un appareil embarrassant et sujet à se briser; d'ailleurs l'inflammation finit, non lorsque le gaz oxigène est épuisé, mais lorsque sa proportion est baissée jusqu'à un certain point; depuis là, c'est par la combustion lente que l'absorption peut s'achever.

L'état lumineux que prend le gaz azote, lorsqu'on y plonge le phosphore, est dû à une petite portion d'oxigène que le gaz a enlevé, soit à l'acide nitrique, soit à l'acide muriatique oxigéné dont on s'est servi pour l'obtenir, soit à l'eau même à travers laquelle on le fait passer; ce qui le prouve, c'est que lorsqu'il est saturé de phosphore, il suffit de le faire passer à travers l'eau pour le rendre lumineux. Si pour cette

expérience on le balance dans l'eau, on n'aperçoit rien de lumineux dans le tube, trois ou quatre pouces au-dessous de la surface de l'eau, parce que dans cette partie l'oxigène a été absorbé par l'acide phosphoreux, qui s'y est mêlé à mesure qu'il se formait; mais plus loin le gaz devient lumineux, jusqu'à ce que le phosphore qu'il contient soit brûlé, après quoi il reprend de l'oxigène, redevient lumineux, lorsqu'on y plonge le phosphore, cesse d'être lumineux, reprend cette apparence en passant dans l'eau, et ainsi successivement.

Lorsqu'après avoir exposé de l'azote sur le sulfure de potasse, on le mêle avec le gaz oxigène, le phosphore n'a point d'action sur ce mélange; de sorte que l'azote ne peut plus dissoudre du phosphore, parce qu'elle est saturée du sulfure, ou du soufre, ou peut-être du gaz hydrogène sulfuré, ce qui reste à déterminer; si même on place sur une dissolution de sulfure, du gaz azote saturé de phosphore, il perd bientôt la propriété de devenir lumineux; il paraît résulter de-là que le phosphore a moins d'affinité avec le gaz azote, que le principe que celui-ci a pris au sulfure : nous avons tenté en vain de produire le même effet en échauffant, au degré de l'eau bouillante, du soufre pur, placé dans le gaz atmosphérique.

Les chimistes n'ont d'abord aperçu dans le gaz azote que des propriétés négatives, celle de ne pas entretenir la vie et la lumière, et de n'être pas diminué par les substances qui ont de l'action sur les autres gaz; ils ont appris ensuite qu'il entrait dans la formation de l'acide nitrique et de l'ammoniaque; nous voyons aujourd'hui qu'il agit, par son affinité, sur le phosphore, et probablement sur le soufre, et il a sans doute sa part dans un grand nombre de phénomènes atmosphériques.

Ces affinités de l'azote peuvent nous conduire à la détermination des forces qui tendent à composer les substances animales, dans lesquelles on sait que ce principe sert à former le caractère qui les distingue principalement des substances végétales.

Si l'on considère le lait comme un premier résultat de la digestion, on voit que les substances qui ont servi d'alimens, et dont les parties ont été désunies par les forces qui opèrent la digestion, sont déterminées par les affinités qui sont en action, à former trois composés; la sérosité, la partie caséeuse et la partie butireuse. Dans la sérosité, on peut regarder

l'oxigène comme le principe qui domine et qui détermine la combinaison. Dans la partie caséeuse, c'est l'azote qui réunit, pour ainsi dire, autour d'elle, le phosphore et le soufre avec une forte proportion d'hydrogène et du carbone : c'est l'hydrogène, qui, dans la partie butireuse, devient le centre de la combinaison ; il s'associe un peu d'oxigène et du carbone.

La première combinaison, celle où l'oxigène domine, est bientôt détruite par la force qui détermine la combinaison intime de ce principe avec l'hydrogène seul pour former de l'eau.

Ces effets ont beaucoup d'analogie avec les combinaisons qui se détruisent ou qui se forment par l'élévation de température, dans la distillation, dans laquelle une substance végétale se réduit en grande partie en eau, en acide et en huile ; et une substance animale, en huile et en ammoniaque.

RÉSUMÉ DES LEÇONS
Sur la Théorie de la Cristallisation (1).

Par le C.en GUYTON.

Un cristal est un solide terminé régulièrement par des angles et des faces qui indiquent des parties similaires génératrices, une force d'adhésion respective et un arrangement constamment déterminé par certaines lois.

La cristallisation n'est pas seulement un des trois grands faits de la chimie, c'est un des grands phénomènes de la nature, que la chimie ne fait que rapprocher des yeux de l'observateur ; c'est en quelque sorte une organisation particulière à la matière brute.

Linné croyait qu'elle appartenait exclusivement aux sels, et qu'ils pouvaient seuls la communiquer à d'autres corps ; mais il est bien reconnu que les terres, les sels, les combustibles, les métaux cristallisent par eux-mêmes et dans leur état de pureté.

La théorie de cette opération intéresse donc le naturaliste qui les rencontre, et qui se perdrait dans l'infinie variété des formes, s'il n'avait

---

(1) Voyez le cahier des mois de floréal et prairial, page 193.

un fil pour se conduire ; elle intéresse le chimiste qui les imite et qui les fait entrer dans le calcul des affinités.

De Romé de l'Isle a bien observé, mais il a tout rapporté à la troncature des formes qu'il appelait *primitives*.

Bergman a aperçu le défaut de matière.

Il était réservé au C.en *Haüy* de dévoiler ce mystère par le calcul analytique, peu familier jusqu'à ce jour au plus grand nombre des chimistes ; mais ici l'instruction ne sera pas obligée de s'arrêter à cette limite ; ce ne sera pas l'un des moindres avantages de l'organisation de cette école, de rapprocher les sciences qui doivent s'aider réciproquement, et de mettre, pour ainsi dire, dans les mêmes mains tous les instrumens qui peuvent servir à reculer les bornes de nos connaissances.

Cristallisation. (Structure.)

DISTINGUONS, avec *Haüy*, dans les cristaux,

1.° Les molécules intégrantes,

2.° Les formes primitives,

3.° Les formes secondaires.

Les *molécules intégrantes* sont celles dont le cristal entier est l'assemblage. La division les indique, quoiqu'il ne nous soit pas donné de la porter à son dernier terme.

Ces molécules sont nécessairement similaires ; mais elles ne sont pas toujours assemblées de la même manière. Quelquefois elles se joignent face à face ; quelquefois elles ne sont unies que par les bords, laissant ainsi quelques vacuoles.

Les molécules intégrantes peuvent se réduire à trois ; savoir :

1.° *Le parallélipipède*, le plus simple des solides, dont les faces sont parallèles deux à deux et au nombre de six ;

2.° *Le prisme triangulaire*, le plus simple des prismes ;

3.° Le *tétraëdre*, la plus simple des pyramides.

La *forme primitive* est celle que l'on obtient par des sections faites sur toutes les parties semblables d'un cristal : elle en est proprement le noyau.

Les formes primitives peuvent se réduire à six, qui sont,

1.° *Le parallélipipède*, qui comprend le cube, le rhomboide, et tous les solides terminés par six faces parallèles deux à deux;

2.° *Le tétraëdre régulier*,

3.° *L'octaëdre à faces triangulaires*,

4.° *Le prisme hexagonal*,

5.° *Le dodécaëdre à plans rhombes*,

6.° *Le dodécaëdre à plans triangulaires isocèles.*

Parmi ces formes, il y en a qui se retrouvent comme noyau, avec les mêmes angles, dans divers minéraux.

En effet, la même forme de noyau peut être produite, dans la première espèce, par tels élémens; dans une seconde espèce, par d'autres élémens.

Ces formes de noyau ont un caractère de perfection et de régularité, comme le cube et l'octaëdre régulier : ce sont des limites auxquelles la nature semble arriver par différentes routes.

Les *formes secondaires* sont celles qui résultent d'une superposition de matière qui masque la figure primitive.

Cette superposition engendre divers poliëdres qui ont aussi la propriété de se terminer régulièrement. Ces poliëdres, quoique formés de lames similaires, sont différens du noyau ou des solides qu'ils enveloppent.

Cette modification de figures est le produit d'un décroissement régulier, par soustraction d'une ou plusieurs rangées de molécules intégrantes.

Ce décroissement est soumis à des lois d'après lesquelles on détermine le nombre de ces rangées, et par suite, la forme exacte du cristal secondaire.

Il y quatre sortes de décroissemens :

1.° *Décroissement sur les bords*, c'est-à-dire parallèlement aux arêtes de la figure primitive;

2.° *Décroissement sur les angles*, c'est-à-dire, dont les lignes de départ sont parallèles aux diagonales des faces de la forme primitive;

3.° *Décroissemens intermédiaires* qui se font parallèlement à des lignes situées entre les diagonales et les bords;

4.° *Décroissemens mixtes* qui se font dans les deux sens, par des quantités de rangées au-dessus de l'unité. Il

Il faut développer ces quatre lois ;

En saisir l'application par quelques exemples ;

Considérer l'étonnante variété de leurs résultats,

Et recueillir les vérités fondamentales qui doivent diriger dans l'observation de ces phénomènes.

PREMIÈRE LOI.

Décroissement sur les bords.

Le cube passant au dodécaëdre à plans rhombes, fournit un exemple sensible du décroissement sur les bords, ou parallèlement aux arêtes.

Les lames décroissantes superposées sur les six faces, forment six pyramides quadrangulaires, ce qui fait vingt-quatre faces ; mais ces faces se trouvent deux à deux sur le même plan, ce qui réduit la figure à douze rhombes.

Si la superposition s'arrête avant de terminer les pyramides, le cristal est à dix-huit faces ; savoir :

Les six quarrés du cube, mais plus petits, et douze hexagones.

On a cette variété dans le *borate-magnesio-calcaire*, si improprement nommé *quartz cubique de Lunébourg.*

Si le décroissement est plus rapide, c'est-à-dire, si la lame superposée a, par exemple, deux, trois ou quatre rangées de moins que la lame inférieure, alors il en résulte vingt-quatre triangles, tous inclinés les uns sur les autres.

Ce décroissement peut se faire aussi de manière à engendrer le dodécaëdre à plans pentagones ; exemple : *le sulfure de fer.*

Mais il faut observer que ce n'est pas le dodécaëdre des géomètres, dont les pentagones sont réguliers et moins inclinés. Aucune loi de décroissement n'est susceptible de le donner.

Les lames décroissant par deux rangées parallèlement aux bords du rhombe, produisent le dodécaëdre à douze triangles scalènes.

Exemple : *spath dent de cochon.* (Métastatique d'*Haüy.*)

Un décroissement par une rangée parallèle aux bords supérieurs du rhombe, produit un rhomboïde beaucoup plus obtus que le noyau.

Exemple : *spath calcaire lenticulaire.*

Enfin, c'est par un décroissement sur les bords des bases, que le prisme droit quadrangulaire à bases rhombes prend une pyramide.

Exemples : *le rubis, la topase, le béril.*

SECONDE LOI.

Décroissement sur les angles.

SOIT la molécule intégrante, un cube. On a vu que le décroissement sur les bords produisait le dodécaëdre rhomboïdal, et le dodécaëdre à plans pentagones; mais le cube devient aussi octaëdre régulier : or le décroissement sur les bords ne pourrait le donner qu'autant que *la quantité, dont chaque lame serait dépassée par la précédente, serait en rapport commensurable avec la hauteur de cette lame*, puisque chacune de ces deux quantités mesure une ou plusieurs arêtes du cube qui représente la molécule : et ici ce rapport est incommensurable.

On trouve l'explication de cette structure, en considérant que dans la section mécanique de l'octaëdre régulier, originaire du cube, chacun des huit angles solides de ce cube répond au centre d'un des triangles de l'octaëdre, et qu'ainsi les bases de ces triangles regardent les angles du cube.

On conçoit donc que trois décroissemens s'établissent en partant de l'angle du cube, s'étendant sur les trois plans qui forment cet angle.

Comme il y a huit angles, cela fait $3 \times 8 = 24$; mais les décroissemens se faisant par une seule rangée, les trois faces qui se forment autour d'un même angle, sont sur un plan commun.

On conçoit ici qu'au lieu de stries parallèles qui indiquent souvent les décroissemens des lames, on observe des saillies anguleuses ou en pointes (quoique dans une formation parfaite elles dussent disparaître, comme les stries, par la petitesse infinie des molécules).

C'est suivant la loi de ce décroissement, que le *sulfure de plomb*, le *muriate de soude*, passent à l'octaëdre; que les cristaux de fer de l'*île d'Elbe* forment un rhomboïde très-obtus (souvent modifié par des facettes parallèles aux faces du noyau); que le *spath siliceux* de Fontainebleau forme un rhomboïde aigu, dont les faces répondent aux angles solides du rhomboïde primitif; que les *zéolithes de Caltown-hill*, près d'Edimbourg, deviennent des poliëdres à vingt-quatre facettes, comme

le grénat-trapèzoïdal, quand le décroissement qui produit le rhomboïde a lieu à-la-fois sur les huit angles solides du cube.

TROISIÈME LOI.

Décroissemens intermédiaires.

CES décroissemens ne sont parallèles ni aux bords ni aux diagonales, mais à des lignes intermédiaires.

Cela vient de ce que les soustractions ont lieu par des rangées de molécules doubles, triples, &c. Supposons, par exemple, des molécules cubiques et soustraites deux à deux, c'est comme si chaque molécule était composée de deux cubes accolés par une de leurs faces.

En effet, si on concevait le cristal composé de parallélipipèdes de ces dimensions, ce cas rentrerait dans celui des décroissemens ordinaires sur les angles.

Le fer de Framont (*fer syntactique d'Haüy*), qui a un cube pour molécule intégrante (qui se présente ordinairement sous la forme de deux pyramides naissantes, posées base à base), fournit un exemple de décroissement intermédiaire en formant un solide à quatorze faces, résultant de deux pyramides droites hexaëdres, unies base à base, et demeurées incomplètes, ou terminées par deux héxagones.

Il faut remarquer que le cube fait ici fonction de rhomboïde.

QUATRIÈME LOI.

Décroissemens mixtes.

IL arrive quelquefois que chaque lame dépasse la suivante de deux rangées parallèlement aux arêtes, et qu'elle a en même temps trois fois la hauteur d'une molécule simple. C'est un décroissement mixte.

Le rapport de cette loi s'exprime par la fraction $\frac{2}{3}$ pour le cas indiqué, et par la fraction $\frac{3}{4}$ lorsqu'il y a trois molécules en retraite, et quatre de hauteur.

Ces décroissemens sont rares, et n'ont encore été reconnus que dans quelques cristaux métalliques ; mais on conçoit qu'ils doivent changer la valeur des angles : c'est-là ce qui a conduit à la recherche de cette loi. Toute autre se trouverait en défaut.

Il reste maintenant à parcourir les différens cas où ces lois engendrent des modifications, à distinguer les formes secondaires simples, et les formes secondaires composées qui en résultent, et à considérer à-la-fois l'étonnante fécondité de ces causes ainsi réduites, et la disproportion non moins étonnante entre les variétés possibles et les variétés existantes.

Sept cas différens.

Ces quatre lois de décroissement expliquent la structure de toutes les modifications sous lesquelles se présentent les cristaux.

1.° Tantôt les décroissemens se font à-la-fois sur tous les bords, ou tous les angles.

Exemples : *dodécaèdres à plans rhombes, octaèdres venant du cube.*

2.° Tantôt sur certains bords, ou sur certains angles.

3.° Tantôt ils sont uniformes par une, deux, trois rangées, &c.

4.° Tantôt la loi varie d'un bord à l'autre, d'un angle à l'autre.

5.° Tantôt les décroissemens sur les bords concourent avec les décroissemens sur les angles.

6.° Tantôt un même bord, un même angle, subit successivement plusieurs lois de décroissement.

7.° Tantôt enfin le cristal secondaire a des faces parallèles à celles de la forme primitive, et qui produisent de nouvelles modifications en se combinant avec les faces résultant des décroissemens.

De-là la distinction de *formes secondaires simples :* celles qui sont dues à une loi unique dont l'effet est de masquer complètement le noyau ; et *formes secondaires composées :* celles qui proviennent de plusieurs lois simultanées, ou d'une seule loi, mais qui n'a pas atteint sa limite ; de sorte qu'il reste des faces parallèles à celles du noyau.

Variétés possibles.

A ne prendre que les deux lois les plus simples, c'est-à-dire, par une ou deux rangées, le spath calcaire est susceptible de 2044 formes différentes. (On n'en connaît que 40.)

Haüy en a trouvé une variété à décroissemens de six rangées.

Ordinairement il ne passe pas quatre rangées ; le calcul, établi sur

cette base, donne 8,388,604; et si l'on admettait le décroissement jusqu'à 10 et 12, avec les décroissemens intermédiaires et mixtes (ce qui n'est pas impossible), le nombre serait effrayant.

Il y a donc une limite à cette action de décroissement; mais qui est-ce qui fixe cette limite? quelle est la loi qui la donne? cela reste à découvrir.

Observations générales.

POUR envisager tous les possibles dans la variation de figures des cristaux, et ne pas conclure trop légèrement la figure des molécules intégrantes, ou la forme primitive, il faut encore savoir qu'il résulte de ces observations,

1.° Que des molécules de diverses figures, peuvent s'arranger de manière à produire des poliëdres semblables dans différentes espèces de minéraux.

Ainsi les molécules du grenat forment un dodécaëdre à plans rhombes, avec de petits tétraëdres à faces triangulaires isocèles; et le dodécaëdre du spath-fluor est un assemblage de petits tétraëdres réguliers, ou à faces équilatérales.

2.° Des molécules similaires peuvent produire une même forme cristalline par des lois différentes de décroissement.

3.° Il peut exister un cristal totalement semblable au noyau, quoique formé en vertu d'une loi simple de décroissement.

Haüy a été conduit à ce résultat par le calcul. On peut juger par-là de la merveilleuse fécondité de ces lois.

4.° Le cube fait quelquefois fonction de rhomboïde, comme on l'a vu pour le fer de Framont; et quand il a ainsi commencé, il continue dans toutes les cristallisations de la même substance : il en est de même quand il fait fonction de parallélipipède. On ignore à quoi cela tient.

5.° Le solide intérieur auquel nous arrivons par la dissection d'un cristal, n'en est pas rigoureusement le noyau. Ainsi le cube que nous découvrons dans le dodécaëdre, a lui-même pour noyau une molécule cubique plus centrale, autour de laquelle il est très-probable qu'il s'est formé d'abord un très-petit dodécaëdre qui a reçu de nouvelles couches

sans changer de figure : cependant rien n'empêche que la forme primitive grossie ne prenne ensuite une forme secondaire.

6.° Les lois de structure paraissent exclure les angles rentrans des cristaux simples.

Ceux qu'on observe appartiennent à des *macles* ou cristaux accouplés.

Tel est le précis de cette belle théorie qui a si heureusement dévoilé la structure des cristaux, et dont la connaissance est devenue aussi nécessaire au naturaliste, que la pierre de touche à l'essayeur, pour assurer son jugement ; elle ne lui servira pas seulement à décrire avec exactitude la forme régulière, celui de tous les caractères extérieurs qui est le moins accidentel, le plus essentiellement correspondant à la composition intime ; elle lui fera découvrir des limites qu'il n'aurait pas soupçonnées, des rapprochemens qui paraissaient sans vraisemblance, et qui lui donneront la solution des problèmes les plus importans.

Rien ne m'a paru plus propre à en rendre l'application facile, et, pour ainsi dire, la jouissance habituelle, qu'un tableau dans lequel on apercevrait d'un coup d'œil la molécule intégrante ou le noyau central d'un cristal, sa forme primitive, et successivement toutes ses modifications connues, avec l'indication des lois qui les ont déterminées. Un tableau exécuté sur ce plan, et qui comprendrait dans un ordre méthodique tous les corps cristallisés, serait, sans contredit, un ouvrage classique des plus précieux pour l'histoire naturelle. Mais c'est un but qu'on ne peut encore envisager que dans le lointain, et dont on ne s'approchera que pas à pas, en suivant la route qui vient d'être tracée (1). Je ne présente donc celui-ci que comme un essai qui pourra déjà servir à donner une idée claire du système et de la manière d'y encadrer les faits à mesure qu'ils seront observés et démontrés.

---

(1) Les recherches auxquelles le C.en *Haüy* continue de se livrer sur cet objet, nous promettent des résultats importans qui trouveront place dans ce tableau ; il en a déjà recueilli un assez grand nombre, dont la publication n'est retardée que parce que d'autres travaux momentanés ne lui ont pas permis de s'occuper de leur rédaction.

ESSAI DE TABLE SYNOPTIQUE DES CRISTAUX,

DE LEURS MOLÉCULES INTÉGRANTES, FORMES PRIMITIVES ET MODIFICATIONS.

NOMS des CRISTAUX.	MOLÉCULE INTÉGRANTE.	FORME PRIMITIVE.	FORMES SECONDAIRES SIMPLES. I.ère LOI de DÉCROISSEMENT.	II.e LOI.	III.e LOI.	IV.e LOI.	FORMES SECONDAIRES COMPOSÉES, ou par PLUSIEURS LOIS.
Silice cristallisée (cristal de roche.)	Tétraèdre.	Dodécaèdre formé de deux pyramides hexaèdres, jointes base à base.		Prisme intermédiaire. Prisme hexaèdre avec pyramide.			
Grenat.	Tétraèdre à faces triangulaires isocèles.	Dodécaèdre à plans rhombes.	Solide à vingt-quatre faces trapézoïdales.				Solide à trente-six faces. *Grenat intermédiaire*, d'Haüy.
Feld-spath. *Pétunzé* d'Haüy.	Rhomboïde aigu.	Prisme oblique, à quatre pans.					Prisme à dix pans, avec des sommets à deux faces et quatre facettes. *Polynome* d'Haüy.
Schorl.	Prisme rhomboïdal.	Prisme rhomboïdal.					
Spath silicé-calcaire.	Rhombe.	Rhombe.		Rhomboïde aigu.			
Spath adamantin.	Rhomboïde.	Rhomboïde un peu aigu.					
Rubis oriental; Saphir oriental; Topase orientale. *Orientale* d'Haüy.	Prisme triangulaire.	Prisme hexaèdre régulier.	Dodécaèdre formé par deux pyramides aiguës. *Orientale alongée* d'Haüy.			Dodécaèdre formé par deux pyramides courtes. *Orientale mineure* d'Haüy.	Solide à vingt faces. *Orientale ennéagone* d'Haüy.
Rubis, Topase, Béril. } du Brésil.	Prisme droit quadrangulaire à base rhombe.	Prisme droit quadrangulaire.	Prisme avec pyramide.				
Tourmaline.	Tétraèdre.	Octaèdre rhomboïdal.					Prisme ennéaèdre.
Carbonate de chaux (Spath calcaire.)	Rhombe.	Rhombe.	Dodécaèdre à douze triangles scalènes. *Spath métastatique* d'Haüy.	Rhomboïde aigu.			1. Prisme hexaèdre régulier. 2. Solide à vingt faces trapézoïdales. *Spath analogique* d'Haüy.
Fluate de chaux (Spath fluor).	Tétraèdre.	Octaèdre.	Cube.				
Phosphate de chaux (Apatite).	Prisme triangulaire.	Prisme droit hexaèdre régulier.					
Borate magnésio-calcaire.	Cube.	Cube.	Dodécaèdre à plans rhombes.				Solide à dix-huit faces, douze héxagones et six carrés.
Sulfate de Baryte (Spath pesant).	Prisme droit à base rhombe.	Prisme droit à base rhombe.					Octaèdre cunéiforme. Tables à bords en bizeau.
Jargon de Ceylan.	Prisme droit rectangulaire.	Prisme droit rectangulaire.	Prisme avec pyramide tetraèdre.				
Hyacinthe { de Ceylan. de France.	Tétraèdre.	Octaèdre.		Dodécaèdre prismatique.			

N. B. *Les exemples réunis en ce Tableau étant tous pris dans l'ordre des Terres, on ne sera pas étonné qu'il n'indique aucun décroissement suivant la troisième Loi, si l'on se rappelle ce qui a été dit, qu'il ne s'est encore présenté que dans les substances métalliques.*

ANALYSE

De la Calcédoine du Creuzot (1).

Par le C.^{en} GUYTON.

LE morceau dans lequel on a pris le sujet de cette analyse, avait fait partie d'une masse de plus de vingt-cinq décimètres cubes, trouvée, en 1792, sur le chemin qui conduit de la fonderie du Creuzot à la grande route d'Autun à Châlon, département de Saône-et-Loire.

Description.

CE morceau porte d'un côté la trace du roulement par les eaux, et du frottement des matières dures qui l'ont arrondi, et poli sa surface.

On y voit, ainsi que dans la cassure, trois couleurs, 1.° du brun obscur, tirant faiblement au pourpre; 2.° du vert de montagne, quelquefois un peu terne; 3.° du blanc grisâtre, jauni en quelques endroits par l'oxide de fer.

Le blanc formant communément des taches rondes comme des coupes de cailloux roulés, donne à cette pierre une apparence de poudingue; mais la pâte en est sensiblement bouillonnée, ce qui ne permet pas même de la placer dans les pierres agatines mêlées de calcédoine et de jaspe. La matière brune forme quelquefois un noyau irrégulier au centre des parties blanches (2).

---

(1) Voyez, dans le cahier précédent, la notice des travaux de la troisième division de chimie, *page 194*.

(2) Régulièrement on ne doit prendre pour sujet d'analyse que des matières d'une composition plus homogène, ou dont on peut séparer exactement les parties qui présentent des apparences différentes : c'est ce qui fait que l'on a, jusqu'à présent, si peu d'analyses des pierres agatines. Mais cette considération devenait étrangère à l'objet que l'on s'était proposé, qui était, d'une part, de vérifier si cette pierre tenait du cuivre, comme on l'avait soupçonné; d'autre part, d'offrir, dans son analyse, un exemple de la suite des opérations que ces recherches exigent.

Cette pierre est translucide dans ses bords minces.

Sa cassure unie, un peu écailleuse, rarement conchoïde. Vue à la loupe, elle a l'aspect d'une masse rare et spongieuse, comme de la neige tassée, et l'on y découvre des parties dont l'éclat vitreux donne des reflets, et qui paraissent remplir de très-petites géodes.

Les fragmens sont en éclats, les bords assez vifs.

Sa pesanteur spécifique est de 2.616.

Elle étincelle fortement au briquet, raie le verre et entame légèrement le cristal de roche.

Elle n'a aucune action sur l'aiguille aimantée.

Expériences préliminaires.

On a pris dix grammes de fragmens de cette pierre, on les a fait rougir dans un creuset couvert, à un feu de forge de 34 degrés pyrométriques de Wedgwood.

On a observé, après le refroidissement, que la transparence des bords était détruite, que la couleur verte avait entièrement disparu. On n'y apercevait plus que des taches violacées et d'un brun foncé.

Ces fragmens repesés n'avaient perdu que sept milligrammes, c'est-à-dire, environ le 1400.e de leur poids.

Ces mêmes fragmens, chauffés de nouveau, éteints dans l'eau, et pulvérisés, ont été tenus en digestion dans l'acide nitrique, pendant trois heures, à une forte chaleur.

La liqueur a été essayée par l'ammoniaque, pour y chercher les traces du cuivre que l'on y avait soupçonné. Il n'y a eu aucune apparence de bleu, mais un précipité blanc-jaunâtre, en flocons, fort abondant (1).

Une portion de la dissolution a été étendue d'eau, on y a plongé une lame de fer bien nette; il ne s'est pas déposé un atome de cuivre à sa surface.

Le prussiate de potasse versé dans une autre portion de la liqueur, y a

(1) On sait qu'une seule goutte de dissolution de cuivre, dans cinq centilitres de pareille liqueur, lui aurait donné une teinte bleue très-sensible, à l'instant de la fusion de l'ammoniaque.

occasionné

occasionné un précipité bleu très-abondant, et d'une nuance très-décidée, même dès les premières gouttes (1).

Une dernière portion de la même liqueur a pris un coup d'œil blanchâtre lorsqu'on y a laissé tomber quelques gouttes de dissolution d'oxalate saturé de potasse, et il s'y est formé, au bout de quelques heures, un léger dépôt (2).

NOTES des préparations; opérations et résultats de l'analyse.

A. ON a choisi plusieurs éclats de la même pierre dans les parties les plus également colorées en vert; ils ont été chauffés au rouge-blanc, et jetés dans l'eau froide pour en faciliter la pulvérisation.

Ils ont été réduits en poudre dans un mortier de jaspe-agate ou pierre agatine jaunâtre, le pilon de même matière (3).

La poudre passée à un tamis de soie très-serré a été jugée assez fine pour l'objet de cette analyse.

---

(1) Quelque petite que soit la quantité de cuivre dans une dissolution acide, d'ailleurs très-chargée de fer, on le découvre en employant une dissolution de prussiate de potasse très-étendue, et en la versant goutte à goutte. Le premier précipité est fauve, c'est-à-dire, du prussiate de cuivre, qui disparaît bientôt par l'abondance du précipité de prussiate de fer.

(2) Ces expériences établissent un fait que l'on a trop perdu de vue, quoique *Bergman* en ait bien averti : c'est que les pierres les plus dures, réduites en poudre, se laissent enlever leur fer et même une portion de chaux, par une digestion continuée un certain temps dans les acides. Il en a fait l'observation même sur le rubis oriental. *(Dissertation XV, §. IV.)* On se tromperait donc bien, si l'on croyait pouvoir briser ces pierres dans des mortiers de fer, et reprendre, par les acides, le métal étranger que cette manipulation y aurait porté, sans changer d'ailleurs leur composition. M. *Klaproth* emploie quelquefois un mortier d'acier poli ; mais il paraît que c'est simplement pour commencer à écraser.

(3) *Bergman* recommande de broyer à l'eau, et ne regarde comme suffisamment divisé que ce qui se tient suspendu dans l'eau, et que l'on recueille par décantation ; c'est ce qu'on appelle *lévigation*. Ce broiement, qu'il faut continuer souvent plusieurs heures, entraîne des parties du mortier qui ne peuvent manquer de changer au moins les proportions. M. *Klaproth* a remarqué que pour les pierres très-dures, telles que le spat adamantin, le saphir, le chrysobéril, l'augmentation de poids était quelquefois de 0,13. Ce chimiste n'a trouvé d'autre moyen d'y remédier, que d'analyser d'abord son mortier, et de tenir compte de ce qu'il a ajouté aux produits ; ce qui lui est d'autant plus facile, que ce mortier est un silex gris-noir (*feuerstein*), qui ne tient que 0.005 de chaux, 0.0025 d'alumine, et 0.0025 d'oxide de fer.

On en a formé un poids docimastique de 500 centigrammes (94.205 grains, *anciens poids*).

B. Cette poudre a été mêlée avec le double de son poids de carbonate de soude effleuri. Le tout a été mis dans un creuset de platine, sous la moufle du fourneau de coupelle, exposé d'abord à un feu doux, pour que l'eau de cristallisation du sel pût s'évaporer sans bouillonnement, ensuite poussé jusqu'à commencement de fusion (1).

C. Le creuset refroidi, et bien essuyé à l'extérieur, a été placé dans une grande capsule de verre, où on l'a arrosé d'eau distillée bouillante.

D. La liqueur et le résidu non dissous ont été jetés sur le filtre, et le résidu édulcoré par de nouvelle eau chaude.

E. La liqueur et les eaux d'édulcoration ont été réunies et conservées dans un vase couvert.

F. Le résidu séché simplement à l'air pendant plusieurs jours, pesait 369 centigrammes.

G. Ce résidu a été mis dans un petit matras de verre; on a versé dessus deux centilitres d'acide nitrique, dont la pesanteur spécifique était de 1.137; on a fait digérer au feu de sable, et poussé à siccité (2).

H. On a remis dans le matras pareille quantité du même acide, et on l'a tenu pendant une demi-heure en digestion.

I. La dissolution *H* a été jetée sur le filtre; et la matière non dissoute, arrosée d'eau chaude jusqu'à édulcoration; le filtre pesait 21 décigrammes.

J. Le résidu de la filtration *I* a été séché avec le filtre sur un têt, au

---

(1) *Bergman* a employé, pour cette opération, des creusets de fer polis intérieurement. En ménageant le feu, on obtient une masse spongieuse qui se rassemble sur elle-même, et ne contracte en effet aucune adhérence au creuset. Cependant MM. *Westrumb*, *de Saussure*, et *Klaproth* lui ont substitué le creuset d'argent. Le platine a ici un grand avantage; il donne la facilité de porter à un plus haut degré la température qui doit favoriser l'action du fondant salin; on n'a pas à craindre qu'il fonde, ou qu'il porte une matière étrangère dans la préparation.

(2) Il y a quelquefois, sur la fin, des soubresauts assez violens pour lancer la matière hors du vase : on prévient cet accident, en se servant d'un matras au lieu d'une capsule, et remuant de temps en temps, avec une baguette de verre, la masse qui s'attache au fond, et qui, en se pelotonnant, enferme des portions de liqueur qui ne peuvent plus s'échapper qu'en brisant leur enveloppe.

bain de sable; le poids du filtre déduit, le résidu s'est trouvé de 356 centigrammes (1).

B2 (2). On a retraité ce résidu avec le double de son poids de carbonate de soude, au creuset de platine, comme la première fois; seulement on a commencé par dessécher le sel dans le creuset, puis il a été mêlé, tout chaud, avec le résidu pulvérulent, dans le mortier d'agate; ce qui a permis de brusquer le feu sans craindre la dispersion par le bouillonnement.

C2. Le creuset refroidi a été plongé dans l'eau bouillante.

D2. La liqueur et le résidu non dissous ont été jetés sur un filtre, et le résidu édulcoré; le poids du filtre est de 18.5 décigrammes.

E2. La liqueur et les eaux de lavage ont été réunies.

F2. La portion non dissoute, versée sur le filtre, séchée à l'air pendant quelques jours, s'est trouvé peser 113 centigrammes, poids du filtre déduit.

G2. On l'a fait digérer dans l'acide nitrique, comme la première fois, et poussé à siccité.

H2. On a remis de nouvel acide et tenu en digestion.

I2. Le tout a été jeté sur le filtre et édulcoré.

J2. La matière versée sur le filtre, séchée au feu de sable, a pesé 38.5 centigrammes.

B3. Ce résidu a été retraité avec le double de son poids de carbonate de soude, au creuset de platine.

C3. La matière jetée dans l'eau chaude.

D3. Puis sur le filtre, et arrosée de plusieurs eaux.

E3. Toutes les eaux réunies.

F3. La portion non dissoute digérée à siccité dans l'acide nitrique.

H3. Puis reprise par de nouvel acide.

I3. Puis jetée sur le filtre et édulcorée.

---

(1) On conçoit que ces pesées ne comptent pas pour les proportions, et ne servent qu'à juger du progrès de la décomposition, et à déterminer la quantité de fondant salin à employer.

(2) L'usage de redoubler les mêmes lettres pour noter les produits des opérations analogues, remplace avantageusement les longues inscriptions auxquelles il faudrait s'assujettir pour éviter la confusion.

J3. Le résidu, séché au feu de sable, ne pesait plus que 13.4 centigrammes.

K. Ce résidu n'étant que de la silice pure, il a été de nouveau séché à feu nu dans le creuset de platine, et poussé au rouge; il n'a pesé alors que 12.6 centigrammes.

L. Les dissolutions alcalines *B*, *B2*, *B3*, ont été réunies, évaporées à siccité sur le bain de sable.

M. Le résidu de l'évaporation repris par de l'eau bouillante, et la dissolution rapprochée.

N. On a versé dans cette dissolution de l'acide nitrique, qui a précipité la silice.

O. Ce précipité a été jeté sur le filtre, et lavé de plusieurs eaux.

K2. Séché dans le creuset de platine, poussé au rouge, il a pesé 417.8 centigrammes.

P. La dissolution *N* et les eaux de lavage *O* ont été réunies aux autres liqueurs acides *H* et *I*; on les a rapprochées jusqu'à évaporation de l'acide surabondant.

Q. Elles ont été transvasées dans une grande jarre, et étendues d'eau.

On y a versé de la dissolution de prussiate de potasse jusqu'à ce qu'il n'occasionnât plus de précipité. Il en a été employé 64 décigrammes. Cette dissolution, éprouvée d'avance, avait été reconnue porter 0.0456 de son poids d'oxide de fer séché au rouge.

On s'est assuré, par l'immersion d'une lame de papier bleu, que la liqueur tenait encore un leger excès d'acide.

On a laissé déposer le prussiate de fer; on a soutiré la liqueur et les eaux d'édulcoration par le chalumeau à réservoir (1).

Le précipité bleu, bien édulcoré, a été mis dans une petite cornue de verre au bain de sable; le feu a été poussé jusqu'à en faire rougir le fond : il est resté un oxide de fer noirâtre, attirable à l'aimant.

Cet oxide a été étendu sur un têt, et poussé au rouge. Il

(1) Cette manipulation est un peu plus laborieuse que la filtration; mais elle est plus sûre, et même devient nécessaire, quand on n'a que peu de matière à recueillir, et qu'elle est sujette à s'attacher au papier du filtre.

conservait encore un peu de vertu magnétique (1). Son poids, en cet état, s'est trouvé de 67.26 centigrammes.

Ce qui, déduction faite de 29.19 portés par le prussiate de potasse, donne pour produit réel de l'analyse 38.17 centigrammes (2).

R. On a mêlé 20 centigrammes de cet oxide avec trois parties de nitrate de potasse; on a fait fondre ce mélange dans un creuset; la masse pulvérisée, jetée dans l'eau, n'a donné ni le vert, ni le pourpre, qui annoncent la présence du manganèse.

S. Les liqueurs réunies *P* ayant été ainsi épuisées de fer, on y a versé, goutte à goutte, de la dissolution de carbonate de soude jusqu'à saturation de l'acide et précipitation complète des terres.

Le précipité blanc floconneux a annoncé la présence de l'alumine.

T. Le précipité séparé par le filtre, a été mis sur-le-champ, et avant dessiccation, dans un creuset de platine; on a versé dessus de la soude pure, et on a fait digérer à la chaleur de l'ébullition (3).

U. La dissolution alcaline *T*, étendue d'eau, a été jetée sur un filtre (du poids de 16.5 décigrammes); elle y a laissé un résidu que l'on a édulcoré.

Ce résidu a été séché sur le filtre, dans une capsule de verre, au bain de sable; en cet état, il s'est trouvé peser 9.2 centigrammes.

Remis au creuset de platine, à feu nu, et poussé au rouge, il n'a plus pesé que 5.8 centigrammes.

W. Ces 5.8 centigrammes ont été redissous dans l'acide acéteux.

---

(1) On sait que 100 de fer donnent jusqu'à 138 d'oxide; il y aurait donc un mécompte assez considérable, si on le dosait sans le remettre à-peu-près au même état où il existait dans le minéral.

(2) *Bergman* estimait le fer au sixième du poids du précipité bleu, lavé et séché à la chaleur de l'eau bouillante (*Dissertation XV*, §. 5). M. *Kirwan* adopte cette évaluation; mais il soustrait 0.04 pour le fer porté par le prussiate (*Élémens de minéral. part. IV, chap. V, n. 41*). La méthode qne l'on indique ici est plus rigoureuse, c'est celle de MM. *Westrumb*, *de Saussure*, *Klaproth*, &c. (*Journ. phys. juillet 1793. pag. 16*). M. *Westrumb* se sert de prussiate de soude cristallisé, qui, dans cet état, tient constamment 12.79 d'oxide de fer pour 100 de son poids.

(3) On peut se servir, pour cette opération, d'une capsule de verre; mais il est quelquefois attaqué par l'alcali, à une forte digestion. M. *Wertrumb* l'a particulièrement observé pour les verres verts. M. *Klaproth* emploie le creuset d'argent.

V. La dissolution a été partagée en trois portions, chacune portant la note de son poids.

Dans la *première*, on a versé de l'eau de chaux, qui ne l'a pas troublée; ce qui a fait voir qu'il n'y avait pas de magnésie.

V2. Dans la *seconde*, on a laissé tomber quelques gouttes de sulfate de soude, qui n'y a pas produit de sulfate de baryte.

V3. Dans la *troisième*, on a versé de la dissolution d'oxalate de potasse, qui l'a sur-le-champ rendue laiteuse. Elle n'a pas tardé à déposer un précipité terreux grenu, qui, desséché à la chaleur de l'ébullition, a pesé 4.2 centigrammes (1).

X. La dissolution alcaline *T*, ainsi séparée de la portion non dissoute, a été saturée d'acide nitrique : on en a ajouté en quantité suffisante pour reprendre toute l'alumine, après l'avoir précipitée.

Cette terre a été de nouveau précipitée par la dissolution de carbonate ammoniacal.

Le précipité recueilli sur un filtre, desséché au rouge dans le creuset de platine, a pesé 23.74 centigrammes.

Y. On a tenu ce précipité en digestion dans sept fois son poids d'acide acéteux.

Z. La liqueur filtrée a été précipitée par l'ammoniaque.

&. Le précipité édulcoré a été réuni à la portion non dissoute, restée sur le filtre; il a été séché au rouge dans le creuset de platine.

Il n'a plus pesé que 20.56 centigrammes (2).

---

(1) Si la chaux n'avait été précédemment dosée, on eût pu en déterminer la proportion par cette opération, puisqu'on sait que l'oxalate de chaux tient 0.45 de son poids de base terreuse.

(2) Pour séparer et doser l'alumine, *Bergman* se contentait de calciner ensemble toutes les terres précipitées, pendant une demi-heure, et de les laisser ensuite tremper à froid, environ une heure, dans six fois leur poids d'acide acéteux, se fondant sur l'observation que cet acide ne dissout une quantité sensible d'alumine qu'à la faveur d'une longue digestion *(Dissertation XV, §. 5)*. Ce procédé est sans doute plus expéditif; mais il est certain que l'action de l'acide acéteux sur l'alumine ne varie pas moins par l'état d'aggrégation dans lequel elle lui est présentée, et même par la proportion respective des autres terres, que par la température. C'est là probablement ce qui a déterminé MM. *Westrumb* et *de Saussure* à préférer la dissolution par les alcalis. *(Journ. phys. juillet 1793, p. 17)*. M. *Klaproth* en a fait un très-heureux usage dans ses dernières analyses;

CONCLUSION.

Les opérations notées *R*, *V*, *V 2* prouvent que cette pierre ne tient ni manganèse, ni magnésie, ni baryte.

L'absence du cuivre est démontrée par les essais préliminaires et par les opérations *Q* et *R*.

Il n'entre donc dans sa composition que quatre substances;

Savoir :

La *silice*, principe dominant;
Le *fer*,
L'*alumine*,
Un peu de *chaux*.

Les proportions sont comme il suit :

Les 500 centigrammes ont produit,

de silice......	*K*...... 12.6	*K 2*..... 417.8	...... 430.40,
de fer, *Q*......			38.17,
d'alumine, *&*......			20.56,
de chaux, *V 3*......			5.80.
			494.93.

Ce qui revient, pour 100,

à 86.08	de silice,
7.63	de fer,
4.11	d'alumine,
1.16	de chaux.
Perte... 1.02.	
100.00.	

---

il y ajoute la précaution de faire passer cette terre à l'état d'alun cristallisé, avant de la faire rougir pour en prendre le poids. La précipitation de l'alumine par le carbonate ammoniacal, telle qu'elle est ici indiquée, présente une anomalie digne de l'attention des chimistes, puisque l'alumine entraîne une portion de soude que l'acide nitrique est obligé de lui céder. Je ferai voir, dans un mémoire séparé, comment ce phénomène, réduit à ses véritables circonstances, peut être soumis au calcul des forces conspirantes qui maintiennent ou rompent les combinaisons.

On a vu que le principal objet de cette suite d'expériences avait été de faire connaître en détail toutes les opérations qui préparent successivement la conclusion d'une grande analyse minérale, et que c'était pour cela que je les présentais dans la forme d'un extrait de journal : la table suivante, qui en contient le résumé, me paraît devoir ajouter à l'utilité de cette description, pour guider ceux qui entrent dans la carrière.

TABLE

TABLE des opérations successives d'une grande Analyse minérale, avec la manière d'en noter les préparations et produits.

Notes des opérations analogues qui se répètent.		
	A.	PULVÉRISATION. Poids docimastique. . . { N.^d On suppose ici la description du sujet de l'analyse et les essais préliminaires.
B. B2. B3. &c.		Fritte avec le carbonate de soude.
C. C2. &c.		Dissolution dans l'eau.
D. D2. &c.		Édulcoration.
E. E2. &c.		Réunion des liqueurs alcalines.
F. F2. &c.		Pesée du résidu non dissous.
G. G2. &c.		Digestion, à siccité, du résidu dans l'acide nitrique.
H. H2. &c.		Reprise du résidu par l'acide nitrique.
I. I2. &c.		Filtration, édulcoration.
J. J2. &c.		Pesée du résidu de la dissolution acide.
K. K2. &c.		Dessiccation du précipité siliceux.
	L.	Évaporation, à siccité, des liqueurs alcalines *B. B 2. &c.*
	M.	Reprise, par l'eau, de ce résidu, et concentration.
	N.	Précipitation de la SILICE, par l'acide nitrique.
	O.	Édulcoration du précipité.
	P.	Réunion des liqueurs acides *I, N, O,* et concentration.
	Q.	Précipitation du FER en prussiate.
	R.	Épreuve pour la MANGANÈSE.
	S.	Précipitation des terres, par la carbonate de soude.
	T.	Dissoluion alcaline de l'ALUMINE.
	U.	Séparation, par le filtre, des terres non dissoutes; dessiccation; pesée.
	W.	Reprise de ces terres par l'acide acéteux.
V. V2. V3.		Fractions dosées, pour en précipiter la MAGNÉSIE par la chaux, la BARYTE par le sulfate de soude, la CHAUX par l'oxalate de potasse.
	X.	Reprise de l'alumine par l'acide nitrique, et précipitation par le carbonate ammoniacal.
	Y.	Digestion du précipité dans sept parties d'acide acéteux.
	Z.	Précipitation, par l'ammoniaque, de la portion d'alumine dissoute.
	&.	Dessiccation, au rouge, des précipités alumineux, et pesée.

EXPÉRIENCES COMPARATIVES

SUR LES TERRES,

Pour déterminer leur fusibilité, leur manière de se comporter avec les Flux salins ou vitreux, et l'action dissolvante qu'elles exercent réciproquement les unes sur les autres (1).

Par le C.en GUYTON.

DANS l'examen des propriétés des substances terreuses, la fusibilité a toujours paru mériter une attention particulière: elle forme un des caractères les moins équivoques pour distinguer leur nature et leur composition; elle en indique l'emploi le plus avantageux dans les arts; elle est bien souvent la cause déterminante des phénomènes qui semblent changer l'ordre des affinités. Pott en avait senti l'importance lorsqu'il entreprit une suite d'essais sur ce sujet; mais la chimie a ouvert des mines inconnues à l'auteur de la *Lithogéognosie :* elle a acquis de nouveaux instrumens plus exacts; et quoiqu'ils aient été déjà habilement maniés par plusieurs minéralogistes, on convient que toutes les difficultés n'ont pas été vaincues, qu'il y a encore beaucoup à faire, et presque tout à revoir, pour donner à cette partie de la science toute l'étendue et la perfection dont elle est susceptible. Les expériences dont je vais présenter les résultats pourront servir à nous approcher de ce but.

§. I. *Essais au feu excité par le gaz oxigène.*

AYANT fait provision de gaz oxigène retiré de l'oxide de manganèse, on l'a fait passer dans une grande vessie, portant ajutage, pour diriger le courant sur la flamme d'une chandelle; les matières présentées au dard lumineux ont donné lieu aux observations suivantes:

N.° 1. SILICE. Une esquille de cristal de roche, tenue par l'extrémité

(1) Voyez le précédent cahier de ce journal, *page. 194.*

avec des pinces, a subi la plus forte chaleur sans laisser aucune trace de commencement de fusion (1).

N.° 2. *A.* ALUMINE. On a formé un très-petit cylindre de pâte d'alumine, ou terre base de l'alun, précipitée par le carbonate ammoniacal, et bien lavée. Ce cylindre, séché et cuit, a été exposé de même au dard poussé par le gaz oxigène : l'extrémité s'est couverte d'un émail blanc, demi-transparent, d'environ quatre millimètres de longueur, et qui s'est trouvé d'une très-grande dureté, ainsi que Lavoisier l'avait déjà remarqué.

B. Un fragment d'une pièce pyrométrique de Wedgwood, qui avait déjà subi une chaleur de 127 degrés, s'est comportée de même; le globule était seulement un peu plus gros et mieux formé à l'extrémité (2).

N.° 3. CHAUX. Elle a été faite exprès de marbre blanc statuaire; on l'a mise sur une cuiller de platine, elle n'a point donné de marque de fusion; on a seulement observé que quelques parcelles s'étaient réunies vers les bords en un émail blanc, opaque, sans forme déterminée (3).

N.° 4. MAGNÉSIE. On n'en a pas obtenu de globules par la fusion; mais une aiguille formée de carbonate de magnésie pétri avec de l'eau, et exposée au dard, après avoir été séchée, a pris une apparence de couverte de porcelaine et un peu de translucidité : après cela elle a paru réfléchir une vive lumière sans se laisser pénétrer par la chaleur (4).

---

(1) *Lavoisier* a eu le même résultat, même en plaçant le fragment de cristal sur le charbon. *Geyer* n'a eu des indices de fusion que sur les angles. M. *de Saussure* vient d'annoncer (dans le Journal physique de juillet 1794, qui a paru en août 1795, *vieux style*) qu'il était parvenu à le fondre, même sans employer le gaz oxigène, en l'isolant sur un filet de sappare. Il estime le degré de chaleur nécessaire à sa fusion, correspondant au 4043.e degré d'une échelle pyrométrique, comparable à celle de *Wedgwood.*

(2) M. *de Saussure* a jugé sa fusibilité au 1575.e degré de *Wedgwood.* L. C.

(3) M. *de Saussure* a obtenu du marbre jaune antique un mamelon transparent et bien fondu, à une chaleur, déterminée suivant sa méthode, de 6300 degrés. L. C.

(4) M. *de Saussure* a également remarqué *un éclat bleuâtre extrêmement vif;* il a obtenu des grains demi-transparens; mais cette terre est au nombre des substances dont la fusibilité ne lui a pas paru pouvoir se mesurer par le diamètre des globules. L. C.

N.° 5. BARYTE. La baryte traitée de même a coulé assez facilement, et formé un bourrelet très-sensible (1).

N.° 6. MICA. Une lame mince a été percée à jour par le dard lumineux, et les bords épaissis avaient une apparence vitreuse.

N.° 7. SULFATE DE CHAUX. Un fragment de cristal pulvérisé, présenté au dard sur la cuiller de platine, a laissé un émail blanc, informe, presque comme la chaux.

N.° 8. FLUATE DE CHAUX. On a pulvérisé un fragment de cristal transparent, presque sans couleur; on l'a exposé au dard sur la cuiller de platine; il a résisté long-temps à la fusion : la matière fondue a paru bouillonner un instant, puis ce bouillonnement a diminué malgré l'intensité du feu, et il est resté une masse blanche, informe, nullement adhérente à la cuiller, ayant à peine le caractère d'émail, présentant dans la cassure un grain plus terreux que vitreux, et sur laquelle le feu n'a plus fait aucune impression.

L'acide acéteux versé sur cette masse n'a pas paru l'attaquer; cependant une portion de cet acide, mise dans un verre, a donné sur-le-champ un précipité blanc par l'addition d'une goutte de dissolution d'oxalate de potasse; ce qui indique qu'à ce degré de chaleur ce sel laisse aller une partie de son acide; qu'à une température moins élevée il ne se vitrifie qu'à la faveur du contact d'autres substances terreuses, et que dans ce cas il y a décomposition (2).

§. II. *De l'action des Flux sur les cinq terres simples.*

LES flux employés dans ces expériences sont,

1.° Le carbonate de soude, privé par efflorescence d'une partie de son eau de cristallisation;

2.° Le borax calciné presque jusqu'à vitrification, et pulvérisé;

---

(1) M. *de Saussure* a observé une première fusion *spongieuse* à 31 degrés, et la fusion en mamelon translucide à une chaleur qu'il détermine, par le diamètre, à 580 degrés. L. C.

(2) Voyez ci-après, §. V.

3.° Le phosphate de soude ammoniacal, pulvérisé;

4.° L'oxide de plomb rouge.

Les terres ont été prises dans leur état de pureté; la *silice* précipitée de la potasse silicée et bien lavée; l'*alumine* précipitée de l'alun par le carbonate ammoniacal; la *chaux* faite par la calcination du marbre statuaire; la *magnésie* précipitée du sulfate de magnésie; la *baryte* précipitée du muriate de baryte, bien édulcorée et calcinée dans un creuset.

Les mélanges ont été mis dans de petits creusets d'argile blanche très-réfractaire, et placés sous la mouffle d'un fourneau de coupelle, où le feu a été entretenu pendant deux heures.

Pour l'oxide de plomb, les terres, au lieu d'être mêlées, ont été tassées au fond des creusets, et renfoncées dans leur milieu pour recevoir l'oxide, de manière qu'elles lui servaient elles-mêmes de creusets.

Deux pièces pyrométriques placées l'une au fond, l'autre au-devant de la mouffle, servaient à mesurer l'intensité de la chaleur; elle a été, dans cette première opération, de 26 à 22 degrés de l'échelle de *Wedgwood.*

Les résultats ont été comme il suit :

N.° 9. *Silice, 1 gramme; carbonate de soude, 2 grammes.*	Verre blanc, transparent, entièrement homogène, seulement déliquescent, à cause de l'excès de soude qui se manifestait par l'altération du curcuma.
N.° 10. *Silice, 1 gramme; borax, 2 grammes.*	Beau verre, net et transparent. L'eau passée dessus n'a pas altéré la couleur du curcuma.
N.° 11. *Silice, 1 gramme; phosphate, 2 grammes.*	Matière vitreuse, blanche, opaque, un peu boursouflée, attirant l'humidité de l'air, rougissant le tournesol.
N.° 12. *Silice, 4 grammes; oxide de plomb, 1 gramme.*	L'oxide a pénétré jusqu'au creuset, qui s'est trouvé couvert d'un léger enduit vitreux. Les bords de la cavité formée pour recevoir l'oxide, étaient verdâtres et en consistance d'émail; le reste abso-

lument friable et sans adhérence au creuset, dont le fond n'a d'ailleurs pas été attaqué.

N.° 13. *Alumine, 1 gramme; carbonate de soude, 2 grammes.* Mauvaise fritte, grise, opaque, mal réunie, sans aucune adhérence au creuset, déliquescente.

N.° 14. *Alumine, 1 gramme; borax, 2 grammes.* Beau verre, parfaitement transparent, d'un vert clair, fendillé par la retraite, à cause de l'adhérence au creuset.

N.° 15. *Alumine, 1 gramme; phosphate, 2 grammes.* Fritte verdâtre, peu compacte.

N.° 16. *Alumine, 4 grammes; oxide de plomb, 1 gramme.* L'oxide a passé à travers la petite masse qui lui servait de support, sans y laisser aucune trace vitreuse; il a enduit le fond du creuset d'une matière vitriforme, d'un blanc tirant au vert, l'alumine restant friable.

N.° 17. *Chaux, 1 gramme; carbonate de soude, 2 grammes.* Matière blanche, rare et spongieuse; tout-à-fait opaque, se séparant sous le doigt.

N.° 18. *Chaux, 1 gramme; borax, 2 grammes.* Beau verre transparent, ayant une légère teinte jaunâtre; le creuset fortement attaqué par-tout où il a été en contact avec le mélange en fusion.

N.° 19. *Chaux, 1 gramme; phosphate, 2 grammes.* Matière blanche, opaque, un peu moins grumeleuse que celle du n.° 17, mais encore très-rare, et s'égrenant sous le doigt.

N.° 20. *Chaux, 4 grammes; oxide de plomb, 1 gramme.* La chaux fendillée, ayant un œil rougeâtre, sans consistance ni adhérence

au creuset; le fond couvert d'un émail d'un blanc - citrin, qui s'élevait tout autour à la hauteur de la chaux.

N.° 21. *Magnésie, 1 gramme; carbonate de soude, 2 grammes.* — Matière blanche, opaque, grumeleuse, sans liaison.

N.° 22. *Magnésie, 1 gramme; borax, 2 grammes.* — Verre demi-transparent, un peu laiteux, ayant l'apparence d'une gelée, mais très-dur, brillant à sa surface, largement ouvert par la retraite, à cause de l'adhérence au creuset.

N.° 23. *Magnésie, 1 gramme; phosphate, 2 grammes.* — Matière peu frittée, blanche, nullement adhérente au creuset, formant une petite masse détachée.

N.° 24. *Magnésie, 4 gram. oxide de plomb, 1 gramme.* — La terre est restée blanche, friable à la surface et autour, mais le milieu avait pris consistance avec le verre de blomb; il était au surplus divisé en plusieurs parties, dont l'intervalle avait laissé passer le verre jusqu'au fond; qui ensuite avait grimpé et légèrement couvert le tour de la partie inférieure du creuset.

N.° 25. *Baryte, 1 gramme; carbonate de soude, 2 grammes.* — Matière demi - vitrifiée, d'un vert clair, très-dure, mal rassemblée; les parois du creuset paraissant peu adhérentes, mais tachées et présentant une zône brunâtre fort au-dessus du bain.

N.° 26. *Baryte, 1 gramme; borax, 2 grammes.* — Beau verre, parfaitement transparent, sans couleur, si ce n'est une légère teinte jaunâtre, point fendillé, pourtant adhé-

rent au creuset, assez dur pour résister à la pointe du couteau.

N.° 27. *Baryte, 1 gramme; phosphate, 2 grammes.*

Verre encore plus beau que le précédent, par la netteté et la transparence, fendillé par la retraite, et ne recevant de même aucune impression des instrumens tranchans.

N.° 28. *Baryte, 4 grammes; oxide de plomb, 1 gramme.*

La terre est restée friable, sans adhérence au creuset, d'un blanc tirant au vert en quelques endroits; mais le petit enfoncement du milieu n'a présenté qu'une tache d'un noir mat, dans laquelle on voyait, à l'aide de la loupe, plusieurs globules, comme de très-petits témoins d'essai, d'un brillant métallique bien décidé.

N.° 29. *Oxide de plomb seul, 5 décigrammes.*

L'oxide a été mis dans un petit creuset de platine placé sur un têt, pour observer ce qu'il donnerait à ce degré de feu, sans contact de matière terreuse ou métallique qu'il pût attaquer. Le creuset s'est trouvé vide et net à l'intérieur; le verre de plomb avait gagné le têt d'argile, enduit le pourtour et percé son fond, ne laissant au creuzet de platine que quelques parties faiblement adhérentes à l'endroit où il reposait sur le têt (1).

(1) Cette expérience a été répétée depuis, en employant un gramme du même oxide, et un plus grand creuset de platine, le feu étant porté cette fois à 112 degrés de l'échelle pyrométrique : le résultat a été le même, c'est-à-dire volatilisation complète de l'oxide, qui s'est retrouvé, au moins en partie, formant couverte sur le support d'argile.

§. III. *Essais sur quelques mélanges avec les mêmes flux.*

Le feu étant, comme ci-devant, de 26 à 22 degrés.

N.° 30. *Silice, 5 décigram. alumine, 5 décigram. carb. de soude, 2 grammes.*	Verre opaque, d'un vert fouetté de nuances assez vives de vert d'émeraude, adhérant au creuset, un peu bouillonné en quelques parties, ne se laissant pas entamer par la pointe du couteau. Le creuset avait quelques taches au-dessus du bain.
N.° 31. *Silice, 5 décigrammes; chaux, 5 décigr. carb. de soude, 2 grammes.*	Matière blanche, grumeleuse, opaque, sans consistance, n'adhérant que très-faiblement au creuset, et seulement en quelques points.
N.° 32. *Silice, 5 décigrammes; alumine, 5 décigrammes; borax, 2 grammes.*	Beau verre, transparent, un peu gris, une teinte verdâtre au fond, légèrement fendillé sur les bords par la retraite, ne recevant aucune impression de la pointe du couteau.
N.° 33. *Alumine, 5 décigrammes; chaux, 5 décigr. borax, 2 grammes.*	Verre verdâtre, très-dur, peu de transparence, légèrement fendillé sur les bords. Tout l'intérieur du creuset avait une couverte vitreuse, sans couleur, jusque sur les bords, élevés de 25 millimètres au-dessus du bain.

§. IV. *Effets résultant de l'action que les terres exercent les unes sur les autres, à divers degrés de chaleur.*

Les terres ont été prises dans le même état de pureté que pour les expériences précédentes.

Le premier feu a été de 25 à 28 degrés de l'échelle pyrométrique, les creusets étant placés sous la moufle du fourneau de coupelle.

Le second feu, de 134 degrés de la même échelle, les creusets placés sous un grand creuset renversé, au fourneau *Macquer*.

N.° 34. *Silice, 1 gramme; magnésie, 1 gramme.* — *Au premier feu*, le mélange est resté blanc, pulvérulent, et n'a perdu que 0.108 de son poids.

Au second feu, fritte blanche, faiblement agglutinée; quelques parties graveleuses, jaunâtres, fortement adhérentes au creuset, qui d'ailleurs n'a pas été attaqué.

Toute la matière rassemblée avec soin ne pesait que 173 centigrammes, et avait ainsi perdu 0.135 de son poids.

N.° 35. *Silice, 1 gramme; baryte, 1 gramme.* — *Au premier feu*, matière réunie en une seule masse, mais peu solide, sans adhérence au creuset, de couleur grise, ayant perdu un peu plus de 2 centigrammes, ou 0.01 de son poids.

Au second feu, verre d'un gris verdâtre, ayant une apparence cellulaire, par la différence des parties qui le composent, qui présentent des plaques rondes ayant un noyau plus opaque. Ce verre avait un peu grimpé sur les parois du creuset (qui d'ailleurs n'était pas attaqué); il était très-dur, et ne s'est laissé rayer que par le cristal de roche.

Il n'a pas été possible d'en prendre exactement le poids.

N.° 36. *Alumine, 1 gramme; magnésie, 1 gramme.* — *Au premier feu*, matière blanche, faiblement agglutinée à la surface, se séparant sous le doigt; le mélange avait perdu 0.135 de son poids.

Au second feu, matière blanche, toujours pulvérulente, mais le creuset portant au fond des marques de commencement de vitrification déterminée par le contact.

Tout ce qu'on a pu détacher ne pesait que 155 centigrammes.

N.° 37. *Alumine, 1 gramme; baryte, 1 gramme.*

Au premier feu, matière très-faiblement agglutinée, d'un gris bleuâtre, non adhérente au creuset, ayant perdu 21 centigrammes de son poids, ou 0.105.

Au second feu, matière blanche, absolument pulvérulente, le creuset point attaqué, mais comme imprégné, au fond, de matière étrangère.

Le déchet a été de 55 centigrammes, ou de 0.275.

N.° 38. *Chaux, 1 gramme; magnésie, 1 gramme.*

Au premier feu, le mélange est resté blanc, sans aucun indice de réunion. La perte de poids n'a pas été sensible.

Au second feu, fritte réunie sur elle-même, blanche à la surface, rougeâtre au fond; la partie inférieure vitreuse, demi-transparente et bouillonnée; le fond du creuset sensiblement attaqué et couvert d'un émail blanc, demi-transparent, bouillonné.

La masse détachée s'est trouvée avoir acquis 28 centigrammes, augmentation qui provenait évidemment de la matière du creuset.

N.° 39. *Chaux*, *1 gramme*; *baryte*, *1 gramme*.

Au premier feu, matière blanche, pulvérulente, légèrement agglutinée à la surface, n'ayant pas perdu sensiblement de son poids.

Au second feu, verre parfait, un peu verdâtre, fendillé par la retraite, et par conséquent adhérent aux parois du creuset, qui était un peu attaqué, même au-dessus du bain.

Il n'a pu être pesé exactement.

Un fragment de ce verre, de 34 centigrammes, a été mis dans l'acide nitrique; il n'a pas été attaqué par la digestion à froid. A la chaleur de l'ébullition, il y est devenu blanchâtre, opaque. La liqueur filtrée, tenant encore excès d'acide, a été sur-le-champ troublée par l'addition de quelques gouttes de dissolution de sulfate de soude. Le précipité recueilli sur le filtre, et séché au rouge dans un creuset de platine, s'est trouvé peser 17.3 centigrammes. Il présentait des points brillans et transparens, qui semblaient indiquer qu'il avait subi une fusion saline.

La portion non dissoute par l'acide nitrique, séchée au rouge dans le creuset de platine, a pesé 13 milligrammes; elle a montré à l'essai au chalumeau, tous les caractères de la silice.

Ainsi ce verre est le produit de l'action que la chaux et la baryte ont exercée l'une sur l'autre; la silice que le creuset lui a fournie, qui ne va pas tout à fait à 4 centièmes, n'aurait certainement pas suffi pour décider une vitrification complète de ces deux terres (1).

---

(1) Cette expérience a été répétée depuis, avec cette différence, qu'on a employé 15 décigrammes de carbonate de baryte, au lieu d'un gramme de baryte pure; que le mélange a été placé dans un creuset de platine, et exposé à un feu de forge à trois vents, de 138 degrés pyrométriques. Elle a donné un verre très-transparent, d'un vert clair, bouillonné en dessous, nullement adhérent au platine. Il n'a pas été possible d'en prendre le poids, parce que le creuset d'argile renversé, qui servait de moufle, s'était affaissé par la violence du feu, jusqu'à toucher d'un côté la masse vitreuse.

N.° 40. *Magnésie, 1 gramme; baryte, 1 gramme.*

Au premier feu, matière très-faiblement agglutinée, n'ayant perdu que 5 centigrammes de son poids.

Au second feu, matière blanche, brillante, réunie en parties grumeleuses, assez solides, dont quelques-unes, à l'état d'émail, adhéraient fortement aux parois du creuset; son fond présentait des traces d'érosion et d'enduit vitreux transparent.

§. V. *De l'action du Fluate de chaux* (spath fluor) *sur les terres.*

La résistance du fluate de chaux à la fusion vitreuse, dans l'expérience *n.° 8*, la facilité avec laquelle il attaque les vaisseaux, et l'emploi que l'on en fait comme fondant dans quelques travaux métallurgiques, demandaient un examen plus direct de son action sur les terres, et des expériences dans lesquelles la matière des vaisseaux ne pût influer sur les résultats; celles qui suivent ont été ordonnées pour satisfaire à ces conditions.

N.° 41. On a mis dans un creuset de platine 1 gramme de fluate de chaux pulvérisé, provenant d'un cristal très-net et sans couleur; on a renversé dessus un creuset de terre blanche, qui joignait exactement le support, et on l'a tenu pendant demi-heure à un feu de forge, poussé à 27 degrés pyrométriques: il n'y a pas même eu commencement de fusion, la matière s'est seulement pelotonnée, sur-tout vers le fond, qui s'est détaché en formant une petite masse, où l'on distinguait les grains brillans comme auparavant. Le poids a été diminué de 29 milligrammes, ou environ 0.03.

N.° 42. Quinze décigrammes du même fluate de chaux, exposés au même feu dans un petit creuset de *Hesse*, ont coulé en attaquant fortement le creuset, même au-dessus du bain. Le fond du creuset présentait dans sa coupe des marques sensibles de transsudation d'une matière vitreuse très-fluide.

N.° 43. *Fluate de chaux, 1 gramme; silice, 1 gramme;* dans un creuset de platine.

A un premier feu, sous la moufle du fourneau de coupelle, de 24 degrés pyrométriques, le mélange est resté pulvérulent, d'un beau blanc, ayant perdu 19 centigrammes, ou 0.095 de son poids.

A un second feu, de 134 degrés, au fourneau *Macquer* (1), le mélange s'est fondu en une seule masse bien réunie, arrondie comme un trochisque, ayant pris beaucoup de retraite, de couleur blanche, brillante, présentant quelques facettes ou rudimens de cristallisation, translucide sur les bords, ne cédant que difficilement à la lime. Le poids s'est trouvé de nouveau diminué de 34 centigrammes, ce qui fait au total un déchet de 53 centigrammes, ou de 0.265.

La pesanteur spécifique prise avec le creuset, auquel elle adhérait très-fortement, et déterminée par le calcul, était de 3,542, c'est-à-dire, fort au-dessus de celle des spaths fluors même colorés.

N.° 44. *Fluate de chaux, 1 gramme; alumine, 1 gramme;* dans un creuset de platine.

Au premier feu, même degré que ci-dessus, la matière est restée pulvérulente, blanche, ayant perdu 20 centigrammes, ou 0.1 de son poids.

Au second feu, la matière s'est réunie et fondue en une masse très-fortement adhérente au creuset, même plutôt con-

(1) A ce degré de chaleur, les creusets de platine les mieux fabriqués prennent de très-petites boursouflures, les unes à la surface intérieure, les autres en dehors, mais qui ne se rencontrent pas et ne produisent aucune gersure; le marteau les fait aisément disparaître, et le platine reprend le poli comme auparavant.

cave que convexe, d'un blanc tirant au jaune, d'un brillant nacré, dont la surface présentait des cristaux comme en bas-reliefs, mais très-visibles, et où l'on distinguait aisément des angles et des faces de cubes, de rhombes, de pyramides quadrangulaires obtuses, et sur plusieurs de ces faces des stries en forme d'escaliers: quelques parties très-minces annonçaient un peu de transparence; de très-petites parcelles isolées s'étaient groupées en aiguilles striées, croisées en tous sens comme les rinceaux de glace sur les vitres. La pointe du couteau y faisait une impression sensible.

Il n'a pas été possible d'en prendre exactement le poids, parce que le creuset de platine avait emporté des parties de son support passées à l'état de verre; et qu'elles n'ont pu en être séparées qu'après que la matière qu'il contenait en a été elle-même détachée par une forte digestion dans l'acide sulfurique.

N.° 45. *Fluate de chaux, 2 grammes; chaux, 2 grammes;* creuset de platine.

Ce mélange exposé tout de suite à un feu de 110 degrés, sous un creuset renversé, au fourneau *Macquer*, a donné une matière bien fondue, d'un gris verdâtre, opaque, plutôt concave que convexe à sa surface, sans apparence de cristallisation, dans laquelle cependant on distinguait à la loupe des points brillans disséminés.

Elle a été entamée assez facilement par la pointe du couteau, qui y a laissé une trace blanche.

Elle ne pesait plus que 3.365 centigrammes, encore restait-il quelques

parcelles de verre du support adhérentes à l'extérieur du creuset lorsqu'il a été pesé, de sorte que le déchet peut être estimé de 0.18 à 0.19.

On ne se serait pas attendu à ce résultat, d'après les expériences, *n.os 8 et 41*; celle-ci n'aurait pas même été faite si l'on ne se fût rappelé l'observation de *Gellert*, que le spath fluor coule plus facilement par l'addition de la chaux (1). Le fait ainsi constaté peut servir à appuyer la conséquence déduite par M. *de Saussure*, de quelques-uns de ses essais sur la fusibilité, que la sursaturation la favorise en diminuant la cohésion des parties (2).

§. VI. *Observations particulières sur quelques minéraux.*

N.° 46. Silex de Montmartre. Trois fragmens de ce silex opaque, d'un gris noirâtre, pesant ensemble 46 décigrammes, ont été mis dans un creuset de platine, et exposés sous la moufle, pendant une heure et demie, à une chaleur portée à 25 degrés de l'échelle de *Wedgwood*; ils sont devenus parfaitement blancs, opaques, montrant pourtant quelque peu de translucidité sur les bords, ils happaient fortement à la langue, et avaient perdu 0.037 de leur poids (3).

N.° 47. Grenats. On a exposé au même feu, aussi dans un creuset de platine, quatre grenats dodécahèdres, d'un rouge obscur, très-peu transparens : ils sont devenus tout-à-fait opaques et ternes; leur couleur s'est plutôt foncée et rembrunie que diminuée, au reste sans laisser aucune trace de commencement de fusion à cette température.

N.° 48. Amiante. Cinq grammes d'amiante blanche, cotonneuse, à fibres courtes, des Alpes, ont été exposés, pendant une heure, dans un creuset de platine, au feu du fourneau *Macquer*, porté à 141 degrés du pyromètre; ils se sont convertis en un émail d'un beau noir, qui attirait sensiblement l'aiguille aimantée.

---

(1) Chimie métallurgique, procédé XVII.

(2) Journal physique, juillet 1794, *page 43*.

(3) Ce résultat annonce une composition bien différente de celle du silex décrit et analysé par M. *Klaproth*, dont il a été fait mention précédemment, *page 289*, quoique les caractères extérieurs soient semblables. Ici la perte de poids au feu a été plus que triple, et il est difficile de croire qu'un 400.e d'alumine eût produit un happement à la langue aussi sensible.

N.° 49. SERPENTINE. On a exposé au même feu, aussi sur une soucoupe de platine, 86 décigrammes de serpentine verte, veinée d'un vert plus clair, dont partie en poudre garnissant le fond, et partie en fragmens posés dessus ; le tout s'est agglutiné en une masse, les fragmens paraissant au surplus peu déformés ; la perte de poids a été de 10.8 décigrammes, c'est-à-dire, de près d'un 8.e (1). Cette serpentine avait une faible action sur l'aiguille aimantée, elle a été plus sensible après l'opération.

N.° 50. HYACINTHE. *A.* Trois hyacinthes du ruisseau d'Espally, cristallisées en prismes tétraèdres, rouges, transparentes, pesant ensemble 245 milligrammes, ont été tenues pendant une heure, à un feu de 112 degrés pyrométriques, sur un têt d'argile ; deux ont été entièrement décolorées sans perdre leur transparence ni leur brillant, sans que leurs angles fussent le moindrement émoussés ; la troisième conservait encore un peu de couleur d'un côté ; elles ne pesaient plus que 207 milligrammes, et avaient ainsi perdu un peu plus de 0.15 de leur poids (2).

B. Deux autres hyacinthes pareilles, du poids de 37 centigrammes, on été mises sur une soucoupe de platine, couvertes d'un gramme de verre de borax pulvérisé, et tenues une heure dans le fourneau à moufle, à une chaleur de 35 degrés ; le borax a coulé en une masse vitreuse, transparente, ayant une teinte verte très-marquée, fendillée, et même détachée par la retraite lors du refroidissement. L'une des hyacinthes était totalement décolorée, présentait un coup d'œil laiteux chatoïant, et conservait très-peu de transparence ; l'autre, qui était plus enfoncée dans le verre, avait encore une teinte faible d'un jaune rougeâtre.

Le tout a été mis en digestion dans l'acide sulfurique, qui, à l'aide de la chaleur et de beaucoup d'eau, a dissous, ou plutôt décomposé le borax,

---

(1) La serpentine noirâtre de zöblitz a éprouvé une perte égale dans l'expérience de M. *Klaproth ;* il l'indique de 0,12.

(2) L'expérience répétée dans un creuzet de platine, il n'y a pas eu de déchet sensible, quoique la chaleur ait été portée au point de souder plusieurs des hyacinthes. Il provenait donc ici du contact de l'argile, qui en conservait en effet l'empreinte par une légère tache. Cette observation se trouvera plus détaillée dans un mémoire qui a pour objet de prouver que l'hyacinthe de France est congénère à celle de Ceylan, analysée par M. *Klaproth*, et qui n'a de même éprouvé aucune perte, lorsqu'il l'a traitée dans le creuset de charbon.

et découvert entièrement les hyacinthes. Elles n'avaient aucune apparence de commencement de fusion, cependant elles avaient perdu 10 centigrammes ou 0.27 de leur poids.

L'acide sulfurique qui avait servi à cette digestion, a donné un précipité bleu, abondant, par l'addition du prussiate de potasse.

Il n'a pas été troublé sensiblement par l'oxalate de potasse, mais il était resté sur le filtre un peu de matière blanche, grenue, indissoluble.

Ces deux circonstances indiquent sans équivoque la cause d'un déchet aussi extraordinaire.

N.° 51. PECHSTEIN de Ménil-montant. Un morceau de ce pechstein bleuâtre, de 59 centigrammes, a été exposé sur un creuset de platine, sous la moufle du fourneau *Macquer*, à une chaleur de 112 degrés pyrométriques; il n'a donné aucune trace de fusion, il s'est fendu ou plutôt délité, est devenu blanc-jaunâtre, ocracé en quelques endroits : il ne pesait plus que 54.4 centigrammes, et avait ainsi perdu 0.0778 de son poids (1).

N.° 52. SULFATE DE BARYTE. On a mis dans un creuset de platine cinq grammes de spath pesant, pulvérisé, provenant de la variété nommée par les Allemands *stangeln-spath*, et qui est en cristaux prismatiques entrelacés; il a subi, pendant une heure, le même feu de 112 degrés : il s'est pelotonné en une masse très-blanche, friable, brillante en quelques endroits, n'ayant aucune adhérence au creuset. Il n'avait perdu que 35 milligrammes, c'est-à-dire, 0.007 de son poids (2).

N.° 53. OS PÉTRIFIÉ. Un morceau d'os fossile pierreux, pesant 177 centigrammes, a été exposé au même feu, sur une soucoupe de platine: il a pris une couleur de turquoise sale, au reste la partie intérieure est restée blanche, et conservait toute sa dureté; il ne pesait plus que 166.5 centigrammes, et par conséquent avait perdu 0.0593 de son poids.

---

(1) M. *Klaproth* a trouvé un déchet de 0.08.

(2) M. *de Saussure* donne la fusibilité du spath pesant à 45 degrés de la même échelle pyrométrique (*Journal phys. juillet 1794, page 15.*); mais cela ne doit s'entendre, ainsi que la fusibilité à 51 degrés qu'il assigne au spath fluor, que d'une première fusion qui n'est réellement qu'une liquéfaction saline; et la conversion en verre transparent a été l'effet de l'action du sappare qui servait de support, comme il l'a remarqué par rapport à la baryte.

SUITE DU COURS PRÉLIMINAIRE
RELATIF
AUX ARTS DE DESSIN.

TROISIÈME SÉANCE.

De la Composition.

DANS son étymologie, *composition* dérive de deux mots latins, *ponere, cum*, qui signifient *mettre avec, assembler.* Cette expression est juste, puisque l'homme n'inventant rien, ne peut qu'assembler les divers objets qui ont frappé ses sens, ainsi que les diverses pensées qui en sont résultées dans son intelligence, en les arrangeant à sa volonté pour en composer ses ouvrages: c'est dans cet assemblage qu'il montre son génie; c'est en cela qu'il est créateur, quand ses productions retracent d'une manière vive et fidèle ce qu'il a su remarquer dans la nature morale et physique, l'ordre, le désordre, les analogies, les différences, enfin toutes les propriétés des êtres et des choses, toutes les lois qui président à leur existence et à leur succession. L'art d'assembler ces objets, quels qu'ils soient, afin de faire naître ou de transmettre des idées, est donc ce que nous appellerons *composition.*

Nous n'en parlerons que dans son application à la peinture.

La composition des tableaux peut être considérée relativement aux différens genres de l'histoire, du portrait, du paysage.

L'histoire peut être conforme aux faits connus, comme quand le peintre traite, d'après les traditions, des sujets égyptiens, grecs, romains, &c.... ou bien il en est l'inventeur, comme quand il imagine des scènes philosophiques, morales, champêtres, ou quand il compose des allégories. L'histoire peut aussi être ancienne ou moderne, véritable ou fabuleuse.

Le portrait peut être la simple représentation d'une personne, ou bien il peut être ce qu'on appelle *historié.* Dans ce second cas, les personnages

peuvent être réunis dans une scène familière et sous leur costume, ou sous un costume différent dans une scène imaginée.

Le paysage peut être héroïque ou champêtre; il peut imiter la nature simple, et en faire le portrait, ou bien il peut être de pure invention.

Ce que nous avons à dire sur la composition, dans le genre de l'histoire, suffira pour faire deviner ce que nous pourrions ajouter sur les autres genres; peut-être même pourrait-on, à la rigueur, regarder comme superflue la division que nous venons d'établir, puisque le genre de l'histoire les réunit tous. En effet, si un peintre doit représenter un sujet tel que sont la plupart de ceux qu'on appelle *historiques;* si, par exemple, il voulait peindre *César* reculant d'horreur en voyant la tête de *Pompée* que des assassins viennent offrir à ses yeux, que ferait ce peintre? si ce n'est joindre aux traits connus de *César* et de *Pompée*, l'expression de ces traits particulière à cette scène. Et le fond de ce tableau devant représenter une campagne au milieu de laquelle une ville est située, cette représentation n'exige-t-elle pas du peintre qu'il ait étudié le paysage? Quand *Rubens*, dans sa galerie du Luxembourg, a peint l'apothéose de son héros, et qu'il a figuré dans un coin de sa scène les premiers hommes de l'état offrant la régence à *Marie de Médicis*, n'était-il pas tenu à faire la ressemblance de tous ces personnages qui étaient encore vivans? N'était-il pas alors peintre de portraits? Et les tableaux du grand conseil à Venise, qui représentent les victoires de la République à l'époque où les guerriers qui avaient remporté ces victoires existaient encore, ces tableaux n'exigeaient-ils pas du *Titien*, du *Tintoret*, du *Padouan*, qu'ils sussent peindre des ressemblances, qu'ils fussent peintres de portraits?

Nous pourrions même alléguer que les genres du portrait et du paysage n'ont jamais été mieux traités que par les peintres d'histoire, qui ont agrandi ces genres en les élevant au leur; nous prouverions que par le privilége du génie, qui se proportionne à tout, les moindres détails de ces genres, sans perdre de leur précision, ont acquis sous le pinceau de l'histoire plus de simplicité et d'expression.

En effet, personne ne conteste la supériorité des portraits de *Raphaël*, du *Titien*, de *Rubens*, de *Wandick*, de *Rembrandt*, la beauté des paysages du même *Titien*, du *Poussin*, du *Dominiquain*, du *Carrache;* et si le

Claude Lorrain et le *Guaspre* n'ont pas peint l'histoire, ils ont agrandi leur manière par la fréquentation des grands peintres de leur temps, par les lumières qu'ils ont puisées près d'eux. Quant aux plus fameux paysagistes flamands, on sait qu'ils ont tous étudié l'histoire, et il existe dans les cabinets des curieux de beaux ouvrages en ce genre, de *Berghem*, de *Carles du Jardin*, de *Teniers*, de *Wouwermans*, &c. Nous pouvons donc regarder la composition des tableaux d'histoire comme comprenant tous les genres, et les règles que nous établirons sous ce rapport seront communes (au moins par analogie) à toutes les autres parties de la peinture.

Revenons à la composition.

Quel que soit l'objet sur lequel la volonté de l'homme dirige son attention, il s'en forme d'abord en lui-même un tableau qui est vrai s'il est conforme à l'état de l'objet, qui est faux s'il n'y est pas conforme. D'après ce principe, pour bien composer, la première condition sera d'avoir recueilli un grand nombre d'idées justes, et d'en avoir l'esprit abondamment meublé, pour y puiser au besoin. Cette nécessité est commune à tous les arts. Quant au peintre, s'il veut composer une scène historique, quel que soit le sujet qu'il doit représenter, soit qu'il appartienne à la mythologie ou à la Bible, soit qu'il l'ait pris dans l'histoire ou dans son cerveau, soit qu'il soit ancien ou moderne, le peintre, dis-je, doit se pénétrer de son sujet, et se le rendre propre par la connaissance de toutes les idées accessoires qui y sont relatives. A cet effet, il doit méditer avec soin tout ce qui y a rapport, lire et relire les auteurs qui en ont écrit, en connaître toutes les circonstances, examiner enfin les divers momens de l'action, afin de choisir celui qui est le plus favorable à son art. L'historien, le poëte, représentent des instans successifs, ils les opposent avec adresse, ils les font valoir l'un par l'autre; le peintre n'a qu'un seul moment, il doit choisir le plus frappant, celui qui complète l'idée d'une action, celui qui laissera dans l'ame du spectateur le souvenir le plus durable, la plus profonde trace.

Pour donner à ses personnages l'attitude et la physionomie qui leur conviennent, il doit bien connaître leur caractère particulier. *Hector* n'aura pas les grâces efféminées de *Pâris*, la beauté d'*Andromaque* ne sera pas celle d'*Hélène*, le courage de *Diomède* sera plus impétueux que celui

d'*Énée*; leurs traits et leurs attitudes correspondront á leur caractère. *Alexandre*, *César*, *Annibal*, *Sylla*, *Scipion*, *Brutus*, *Platon*, *Socrate*, *Ciceron*, *Sénèque*, tous ces grands hommes de l'antiquité auront des nuances propres qui les feront connaître, et ne seront pas plus confondus par des traits uniformes de visage, qu'ils ne le sont dans l'histoire par l'uniformité de leur caractère. Leur visage doit correspondre à leur ame, de telle sorte qu'il conviendrait peut-être que le peintre suppléât à la nature, si elle avait refusé à son héros, en se contredisant elle-même, le corps qui paraîtrait devoir appartenir à l'ame qu'on lui suppose. En effet, la peinture ne pouvant faire juger des qualités intérieures que par les extérieures, de la réalité que par les apparences, elle doit apporter le plus grand soin à présenter ces apparences exactement correspondantes à l'impression qu'elle veut faire naître. La magnanimité ne peut se concevoir par les yeux sous une forme mesquine et misérable, le courage sous un visage efféminé, la décence sous le regard audacieux de la prostitution, la vertu avec l'apparence du vice, l'esprit avec l'air de la sottise. Ce principe, de donner aux personnages la forme correspondante à l'opinion qu'on en veut faire concevoir, sera donc obligatoire pour l'artiste; excepté dans quelques cas particuliers, comme celui où l'on représenterait des personnages dont le visage et la forme sont fixés par les statues et les médailles connues; comme celui où *Philopémen*, général achéen, séparé de ses compagnons d'armes, dans un bois où il s'est perdu, se retire dans une auberge; la maîtresse du logis l'occupe à fendre du bois, trompée par la modestie de son vêtement, et le peu de majesté de son visage; quelque temps après des officiers de son armée entrant dans la même auberge, s'étonnent de le voir occupé à ces fonctions subalternes. Il leur répond simplement par ces mots : *Je paie les intérêts de ma mauvaise mine*. Dans ce cas il faut, pour l'intelligence du sujet, que le héros principal manque de dignité, puisque c'est sur ce défaut même que le fait se fonde, et sur l'opposition existant entre l'apparence de son visage et la réalité de sa condition.

Mais avant tout, ainsi que nous l'avons indiqué dans la 1.re leçon, l'artiste doit, s'il veut obtenir des succès durables, s'assurer de l'effet moral que produira son sujet; il doit pressentir l'influence qu'il aura sur les esprits

et sur les mœurs. Il ne prostituera donc pas ses pinceaux à la flatterie, à l'orgueil ; il ne donnera pas au vice les apparences aimables, les couleurs séduisantes qui en déguisent le poison et le font pénétrer jusqu'à l'ame, par la séduction des sens. Pour montrer le pouvoir de la sagesse, il ne représentera pas *Socrate* allant chercher *Alcibiade* jusque dans les boudoirs des courtisanes : il sentira bien que ce sujet, avec une prétention à la moralité, manquera toujours son effet ; qu'il offre trop de prises aux sens pour qu'il puisse affecter l'ame ; que le sage, isolé de ses maximes, ne peut fixer l'attention du spectateur ; que tout l'intérêt est pour le vice déguisé sous les grâces, et qu'enfin, si ce sujet peut servir à développer la science du dessin et du coloris, s'il peut être le triomphe de l'art, il ne sera jamais celui de la sagesse. L'artiste philosophe préférera de représenter *Socrate* victime de son amour pour la vérité, prêt à boire la ciguë, et discourant au milieu de ses amis qu'il console et qu'il affermit encore, à ses derniers momens, dans les principes de la vertu ; et dans la croyance au dogme sublime de l'immortalité.

S'il veut peindre la chasteté, il ne l'offrira pas sous les traits de *Joseph* se refusant aux séductions d'une belle femme à demi-nue ; cette image, en charmant le plus grand nombre des spectateurs, les porterait sans doute à préférer les douceurs de la défaite à la gloire du triomphe, et les disposerait bien moins à admirer l'action de *Joseph*, qu'à lui insulter par des railleries. Mais il représentera la chasteté sous la figure d'une fille jeune et belle, qui quitte en pleurant le toit qui l'a vu naître, les parens qui l'ont élevée, pour suivre l'époux vertueux qu'ils lui ont choisi : ses yeux sont baissés, la rougeur couvre son front innocent, sa pudeur combat encore ; cependant son jeune époux l'entraîne, et bientôt, aidé de la nature et de l'amour, il va triompher de sa résistance.

Quand le peintre se sera bien assuré de l'effet de son tableau sous le rapport moral, il doit examiner si le sujet est susceptible d'être rendu par les moyens de son art, et s'il est, comme disent les artistes, *pittoresque.* Ce mot *pittoresque* s'entend par eux de bien des manières ; nous allons successivement en examiner quelques-unes.

Nous avons dit, dans la leçon précédente, qu'un sujet n'était pas parfaitement propre à la peinture, quand cet art ne pouvait pas le faire connaître

complétement par les moyens qui lui sont propres. En effet, tandis que la poësie ne peut être entendue que par celui qui a appris la langue parlée par le poëte, la peinture, qui emprunte pour s'exprimer les caractères mêmes de la nature, a cet avantage de pouvoir être entendue sans préparation, sans étude préliminaire. Dans sa comparaison avec la poësie, c'est sans doute là son plus beau côté; elle lui cède à beaucoup d'autres égards. Quant à cet avantage, il devient nul si le discours est obligé de venir à son aide, quand elle a besoin d'être expliquée par la parole, à laquelle au contraire elle devrait suppléer. D'ailleurs il y a des objets qui ne peuvent être montrés aux yeux, et dont l'esprit seul peut se rendre compte; ce sont ceux-là que la peinture doit éviter de lui offrir : l'esprit ne peut se plaire aux représentations visibles que l'art veut faire de ces objets : s'il ne les imagine, ils lui répugnent, ou bien il n'en est pas satisfait. Aux exemples que nous avons cités dans la leçon précédente, nous en joindrons un nouveau pour éclaircir encore notre pensée. *Raphaël* a mis en peinture un sujet tiré de la Bible, représentant les Israélites qui, précédés de l'arche sainte, se promènent autour de la ville de Jéricho, dont les murailles sont renversées par le seul son d'instrumens de musique. On sent bien que ce tableau, malgré les talens de son auteur, ne saurait compléter l'idée du sujet qu'il représente. *Raphaël* serait cependant excusable dans le choix de ce sujet par cette considération, que formant une suite de tableaux tirés de la même histoire, il a dû n'omettre aucun des traits les plus saillans de cette histoire; que la clarté qui manque à ce sujet, est suppléée par la connaissance universellement répandue des évènemens de cette même histoire, qui sont représentés par le peintre dans l'ordre successif que leur a donné l'historien; et qu'enfin il ne faut pas trop restreindre l'application de la peinture, ni les moyens d'instruction et de jouissance qu'elle nous donne. On pourrait même ajouter que dans un ouvrage de littérature, la représentation d'un sujet, quel qu'il soit, jointe au récit historique, grave dans la mémoire les évènemens avec plus de force, et que cet emploi de l'art du dessin est l'une de ses applications les plus utiles. Nous convenons de tout cela; nous convenons aussi que souvent, dans une suite de tableaux peints, quelques mots mis au bas suffisent pour en faire deviner le sujet; que l'esprit se plaît à cette recherche; qu'il admire comment l'artiste a

développé

développé et embelli ce simple texte fourni à sa pensée ; qu'il aime à juger si la traduction en peinture a fait gagner ou perdre à l'invention poëtique ; enfin à comparer le peintre au poëte, pour savoir s'il a bien employé ceux des moyens de son art par lesquels il correspond aux autres arts. Nous ne contesterons pas la vérité de ces observations, et nous laisserons jouir l'artiste de toute la latitude qu'elles lui offrent dans le choix de ses sujets ; mais elles ne détruiront point la vérité des principes que nous avons établis, et nous persisterons à dire qu'il en est une multitude que le peintre doit abandonner à l'historien et au poëte, parce qu'ils ont dans les moyens successifs du récit tout ce qu'il faut pour leur donner de la clarté et de l'expression, et qu'enfin le peintre, quand il est libre dans le choix de ses sujets, doit s'abstenir de traiter tous ceux qu'il ne pourrait pas rendre clairs et sensibles, tous ceux qui auraient besoin d'un commentaire, toutes les subtilités d'esprit, les discussions politiques et métaphysiques, enfin tout ce qui arrive à l'intelligence par l'organe de l'ouïe sans l'intermède des yeux. Ce sera donc les sujets d'action qu'il préférera, ceux dont la connaissance complète peut être acquise par le ministère de la vue, tels que ceux où des passions manifestent leur mouvement par le jeu du visage et la pantomime du corps, tels que ceux qui favorisent le développement des beautés physiques et des effets de lumière et de perspective. Si nous avons insisté un peu longuement sur ce point, c'est que nous avons cru remarquer que c'est à l'ignorance ou à l'oubli de ces principes sur le choix des sujets qu'il faut attribuer le peu d'intérêt qu'inspirent une multitude d'ouvrages, d'ailleurs excellens sous tous les autres rapports ; c'est que nous avons voulu prévenir, autant qu'il nous a été possible en éclaircissant notre idée, les contradictions qu'elle aurait pu éprouver faute d'être entendue.

On peut distinguer deux parties dans la composition, savoir, l'invention et la disposition.

L'*invention* peut être définie l'art de trouver et de choisir judicieusement les objets qui doivent entrer dans la composition d'un tableau, les idées accessoires qui lui donneront toute la force et toute l'expression possibles. Ces divers objets doivent être exprimés sous les rapports historiques, sous celui des caractères nationaux, des usages, des localités, des costumes. Chacune de ces parties a ses convenances propres, et la juste

appréciation de ces convenances est ce qui fait dire d'un tableau, qu'il est d'un bon ou d'un mauvais *style.*

Définissons ce mot, dont l'usage est très-familier dans la langue des arts.

Le style peut être défini l'art de donner à un tableau l'unité de caractère et la même empreinte dans toutes ses parties. Le style peut être sublime, élevé, naïf, simple, bas, trivial; mais il est bon, s'il est conforme à la scène, et soutenu dans toutes les parties de cette scène. Ainsi, quand un peintre représente un événement romain, les personnages doivent en avoir le costume, les mœurs, les usages; il doit les placer dans des édifices d'architecture romaine. S'il représente une fête, ou un sacrifice, il doit donner aux ornemens, aux vases, aux instrumens religieux, les formes du temps et du pays. Il en est de même des autres sujets, égyptiens, juifs, grecs, chinois, français, anciens ou modernes, tous doivent être conformes aux temps, aux lieux et aux usages. *Le Poussin* peut être cité comme un exemple de la sévérité du style. La plupart de ses sujets, pris dans l'antiquité, ont une vérité de composition justement admirée des connaisseurs : personne ne transporte mieux que lui le spectateur au lieu de la scène, au temps où les héros ont vécu. Il semble qu'il ait habité parmi eux, qu'il les ait vu agir, qu'il ait assisté à leur conversation, qu'il soit de leur famille, enfin, que ses pensées aient été jetées dans le moule des leurs. Si sa scène se passe en Égypte, comme dans son tableau représentant *Moyse* sauvé des eaux, indépendamment des pyramides, et des édifices auxquels il a donné le caractère égyptien, indépendamment aussi des figures éthiopiennes que les rois d'Égypte avaient parmi leurs esclaves, il a représenté dans le lointain un égyptien sacrifiant au dieu *Anubis :* on le distingue aisément par son emblème connu, d'un corps d'homme à tête de chien. Cet épisode, porté sur un plan éloigné, rattache son sujet aux idées religieuses de l'Égypte montre son savoir sans affectation, et rappelle aux spectateurs les usages du pays, sans cependant les distraire de l'objet principal, sans détruire l'unité du sujet, qu'il a toujours observée scrupuleusement.

Comme le spectateur se rend compte de tout ce qui lui est offert, comme chacun des objets qui entrent dans la composition, est un signe

qui parle à l'ame en affectant les yeux, aucuns ne sont indifférens ; s'ils ne servent à l'intelligence du sujet, ils y nuisent. Pour éviter qu'ils produisent ce dernier effet, le peintre judicieux n'emploîra dans son tableau, que ce qui peut concourir à l'impression qu'il veut produire sur l'ame des spectateurs.

Si la scène se passe dans un paysage, il est bien essentiel que le site y réponde; il doit être selon la nature du sujet, sauvage, austère, riant, majestueux; le fond du tableau est comme l'accompagnement en musique; comme lui aussi il faut qu'il soit subordonné à l'objet principal ; il ne doit pas diviser l'attention. Ainsi l'artiste saura y exécuter comme objets secondaires, l'architecture, les ruines, les paysages, les fleurs même; mais il ne doit pas mettre l'accessoire à la place du principal, en se montrant moins peintre d'histoire, que peintre de paysages, d'architecture, de ruines.

Quant à l'invention, de toutes les parties de la peinture c'est celle qui donne au peintre le plus d'occasions de montrer ce qu'il a d'imagination, de savoir et de discernement. C'est par-là qu'il marche sur la ligne du poëte, et qu'il obtient l'estime des hommes éclairés. C'est par-là que *Le Poussin* s'est fait surnommer le *peintre des philosophes et des gens d'esprit.*

Il y a pourtant en peinture un autre genre de poësie, qui tient de plus près à l'art, et qui par conséquent est plutôt apprécié par les artistes que par les simples amateurs; c'est ce sentiment d'exécution qui fait trouver dans le coloris et dans le dessin ce qu'il y a de plus piquant et de plus expressif, qui donne aux formes cette grâce, aux effets de lumière cet éclat, enfin au tableau cette perfection que l'artiste admire à juste titre, puisque c'est par elle qu'il est peintre. Au reste, cette poësie d'exécution est commune au poëte ainsi qu'au peintre; elle est chez tous deux l'art de rendre des idées quelquefois assez simples par des moyens ingénieux et vifs qui en augmentent l'effet, et y font apercevoir plus qu'on ne présumait devoir y rencontrer. Il ne suffit donc pas de trouver beaucoup et de grandes idées, il faut savoir les exprimer. Combien de peintres médiocres ont mis des idées poëtiques dans des tableaux qu'on ne regarde jamais, et combien de versificateurs en ont placé dans des écrits qu'on ne

lit point? Ce génie d'exécution se remarque dans les poësies d'*Horace*, de *Virgile*, de *Racine*, de *Lafontaine*, dans les contours de *Raphaël*, du *Corrège*, du *Guide*, du *Parmesan*, dans les effets de lumière de *Rubens*, de *Rembrandt*, du *Titien*. Ces artistes fameux sont vraiment poëtes, parce qu'ils ont parlé le langage de l'art d'une manière pure, élégante, expressive: mais ce genre de poësie ne s'obtenant que par la perfection de l'idiome pittoresque, c'est-à-dire par la beauté du dessin et du clair-obscur, nous ne complèterons ce que nous pourrions dire à cet égard que quand nous traiterons de ces deux parties.

La seconde partie de la composition s'appelle *disposition* ou *ordonnance*. L'invention conçoit le plan de l'ouvrage, mais la disposition sert à l'exécuter, et en prépare déjà les moyens : c'est par elle que l'artiste détermine la place de toutes les parties entr'elles, et l'effet qui doit résulter de leur combinaison. Si c'est par l'invention qu'il plaît aux gens d'esprit, c'est par la disposition qu'il plaît aux artistes, c'est par elle qu'il est peintre. Un homme de lettres pourra bien inventer un sujet, il concevra même des idées ingénieuses propres à l'enrichir et à en augmenter l'effet, mais ces inventions, ces idées ingénieuses ne seront rien, si elles ne sont ordonnées selon les moyens de l'art; il n'y a que le peintre qui puisse les mettre en valeur, qui, par la connaissance de ce que l'art peut et refuse, sache les disposer sous les rapports du dessin, de la pantomime, de l'anatomie, de la perspective linéaire, de la perspective aërienne, du coloris, des effets de lumière. Lui seul, par son expérience et sa pratique, arrangera toutes les parties de son tableau, de manière à établir cette convenance des détails avec le tout, cette harmonie des formes et des couleurs, d'où résultent l'unité de l'ensemble et les plus grands effets de l'art.

Ainsi donc, si la composition d'un tableau est l'idée générale de toutes ses parties, si l'invention est le sentiment qui dans un sujet sait trouver toutes les idées accessoires, morales, grandes, sublimes, ingénieuses, naïves, la disposition est l'art qui met toutes ces qualités en valeur, en les adaptant aux moyens de la peinture.

Nous distinguons intellectuellement ces diverses parties, pour les considérer plus facilement, quoiqu'elles ne soient pas séparées dans la pensée de l'artiste, qui connaît son sujet, les idées accessoires qui le

développent, et la disposition des diverses parties qui le constituent, tout cela presque dans le même moment. Cependant, dans cette marche rapide du génie créateur, il nous est facile d'envisager la composition sous les divers rapports que nous venons de présenter.

Quant à l'ordonnance ou distribution, elle ne coûtera rien au peintre s'il est bien instruit de toutes les parties de son art, s'il en connaît bien l'application. Nous nous étendrons peu sur cette partie de la composition, puisque la pratique seule peut en découvrir les mystères, et que sans elle nous ne serions pas entendus. Cependant, pour mettre nos auditeurs sur la voie, et pour éveiller leurs réflexions, nous indiquerons tout-à-l'heure quelques-unes des règles que l'artiste peut suivre à cet égard, moins pour suppléer le génie, s'il en manquait, que pour le diriger s'il en a.

Mais avant de parler de ces règles, nous devons observer que si nous voulions les établir d'après les ouvrages des différens peintres, nous pourrions difficilement réussir à les fixer, parce que chacun d'eux s'est fait des principes d'ordonnance relatifs à ses idées particulières sur la partie vers laquelle son goût le portait davantage. Ainsi *Michel Ange*, grand dessinateur, a disposé ses sujets de manière à faire briller ses connaissances dans le dessin et l'anatomie. Ses ouvrages, sous ce rapport, sont pleins d'énergie et de grandeur; mais ils pèchent sous le rapport des lumières qui sont mal disposées, qui ne sont pas réunies par masses, ni soutenues par de grandes parties d'ombres capables d'en relever l'éclat. Son fameux tableau du jugement dernier, de la chapelle sixtine, est la preuve de ce que nous avançons.

Rubens, dans un sujet à-peu-près semblable, a ordonné son tableau de manière à y faire briller la partie de l'art dans laquelle il excellait. Il a représenté la chute des anges chassés du ciel. Mais pour ce sujet ses figures n'ont pas assez de beauté; il a négligé la correction des formes, pour s'attacher principalement à l'aspect général du tableau et à la belle disposition des lumières et des ombres qu'il entendait merveilleusement. Plusieurs autres des grands ouvrages de ce peintre célèbre sont admirables sous le même rapport, et témoignent ses profondes connaissances dans la science du clair-obscur, mais ne peuvent être cités pour modèles qu'en cette partie. *Raphaël* et *le Poussin*, plus calmes et plus judicieux que *Michel*

Ange et *Rubens*, inférieurs pourtant à *Michel Ange* dans la science du dessin, et à *Rubens* dans celle du clair-obscur, sont supérieurs à eux dans le véritable sentiment de l'ordonnance, en ce qu'ils disposent moins les parties de leurs tableaux pour faire briller des formes et des effets de lumière, que pour faire ressortir la pensée morale de leurs compositions, et lui donner plus d'expression; c'est ce que nous invitons nos auditeurs à reconnaître par eux-mêmes, soit dans leurs ouvrages originaux conservés au muséum, soit dans la collection gravée de leurs œuvres, qui se trouve au cabinet national des estampes.

De ce que *Michel Ange* a disposé les scènes de ses tableaux à l'avantage du dessin, et *Rubens* à celui du clair-obscur, nous ne voulons pas inférer qu'il faille négliger l'une de ces parties au profit de l'autre, et que leur perfection ne puisse s'allier dans le même ouvrage. Quoique quelques artistes aient incliné pour cette opinion, nous n'entreprendrons pas de la discuter, et nous proposerons nos idées sur l'ordonnance, en regardant comme possible la réunion, dans les mêmes ouvrages, des beautés du dessin à celles du coloris.

L'ordonnance d'un tableau est bonne, quels que soient les moyens employés par l'artiste, quand l'idée principale du tableau est d'abord saisie par le spectateur, quand les figures principales se distinguent au premier coup d'œil, quand toutes les parties du tableau sont aperçues dans leur place respective, à la distance d'où le tableau doit être vu, d'après la grandeur qu'il a, quand toutes les lignes tendent bien au point de vue, quand tous les accidens de lumière partent tous du même principe lumineux, quand les contrastes, sans lesquels rien n'est sensible, sont vraisemblables et naturels.

La disposition est encore bonne quand elle donne lieu à l'artiste d'offrir aux yeux, selon les convenances du sujet, les beautés de la nature, les effets de la lumière, la perfection de la forme humaine, la variété des âges, des sexes, et des passions; elle est bonne enfin si tous ces objets sont représentés avec les nuances qui les distinguent, sans nuire à l'objet principal, sans interrompre le principe si important de l'unité.

Cette énumération peut donner l'aperçu des diverses connaissances nécessaires au peintre : selon qu'il les aura plus ou moins approfondies,

ses tableaux seront plus ou moins parfaits ; car on n'exprime bien que ce que l'on connaît bien, selon la sage maxime de *Boileau*, qui l'a puisée dans *Horace*, ou plutôt dans la nature.

Pour éclaircir tout ce que nous avons dit à l'égard de la composition, il est à propos de définir, ainsi que nous l'avons fait pour le mot *style*, ce qu'il faut entendre par d'autres expressions usitées dans le langage des arts. Ce que nous dirons de mieux à cet égard, nous le tirerons en partie de l'*Essai sur le goût*, de *Montesquieu*. Nous engageons nos auditeurs à consulter ce petit traité, dans lequel l'auteur se montre amateur des arts aussi délicat qu'il est profond dans ses ouvrages de morale politique.

De l'Unité.

La principale unité est celle du sujet ; il est superflu de dire qu'un seul tableau ne doit pas en représenter deux ; car un tableau ne pouvant offrir qu'un seul moment, les épisodes qu'on y ajoute doivent être tellement liés à la scène, qu'on ne puisse les en séparer sans nuire à la clarté du sujet. Si on pouvait les en séparer sans qu'il en résultât cet inconvénient, par cela même il faudrait les rejeter, ainsi que nous l'avons dit précédemment, puisque ne servant pas au sujet ils y nuiraient, en ce qu'ils partageraient l'attention et la distrairaient de l'objet principal. D'après ce principe on doit blâmer *Paul Véronèse*, qui, dans la partie d'un de ses tableaux, a représenté *Jésus-Christ* bénissant l'eau dont il va être baptisé par *Jean-Baptiste*, et dans la partie gauche *Jésus-Christ* tenté par le diable. *Raphaël* ne s'est pas conformé à ce principe dans son tableau représentant *Saint Pierre* que l'ange vient délivrer de prison, ni dans son fameux tableau de la transfiguration.

Une unité non moins importante, est celle du temps, qui, entr'autres considérations, consiste à ne pas mettre ensemble des personnages qui ont vécu dans des siècles différens. *Raphaël* a péché contre cette règle dans son tableau d'*Héliodore*, où il fait intervenir le pape *Jules II* dans le temple de Jérusalem, porté sur les épaules des gonfaloniers, selon l'usage du siècle où il vivait, usage qui subsiste encore. Il faut sans doute rejeter le ridicule de cette faute sur le pape lui-même, et les personnages de sa cour, qui ont exigé de *Raphaël* ce qu'il aura exécuté par déférence. On

ne peut pas faire le même reproche à ses tableaux de l'école d'Athènes, et de la dispute du Saint-Sacrement, quoiqu'il y ait réuni des philosophes et des théologiens d'époques et de pays différens ; cette réunion tient à la nature de la composition de ces sujets, et ils lui doivent une partie de leur expression.

L'unité du point de vue n'est pas moins importante, puisque le spectateur ne peut être à-la-fois placé dans l'espace en deux points différens ; et que tous ces objets doivent tendre à son œil, comme à un centre où ils aboutissent.

Il en est de même de l'unité de lumière. Le véritable principe lumineux, celui d'après lequel le peintre doit étudier les effets de la lumière, est le soleil. Or, il est seul pour éclairer tous les objets de la nature, et l'angle sous lequel il les éclaire dans un moment donné, est le même pour tous.

Quant aux groupes, ils doivent être subordonnés les uns aux autres, ainsi que les figures qui les composent, quel qu'en soit le nombre, et c'est par où s'applique encore l'indispensable principe de l'unité. Nous entrerons, à cet égard, dans de plus grands détails, à l'article où nous parlerons du clair-obscur. Nous nous étendrons alors davantage aussi sur les effets de lumière directe ou réfléchie, naturelle ou produite par les corps enflammés. Il nous suffira, pour le présent, d'engager l'artiste à méditer cet important principe de l'unité, qui s'étend à tout, et d'où résulte la plus forte expression d'un tableau, et les plus grands effets de l'art.

Des Contrastes.

On entend, en peinture, par ce mot, les oppositions bien raisonnées et naturelles des différentes parties dont un tableau se compose. Comme la nature emploie rarement les extrêmes, et que les objets qu'elle crée sont un assemblage de formes et d'élémens divers, ils ne sont distingués entr'eux que par des nuances, dont l'artiste doit saisir la diversité, pour rendre plus vive l'expression de ces objets. On voit rarement des corps de forme parfaitement droite, ronde, ou aiguë, ni de couleur parfaitement rouge, jaune, ou bleue, blanche, ou noire, presque tous participent de ces différentes propriétés, et cette alliance qui dans la nature produit l'harmonie, dans les ouvrages de l'art produira l'indécision, si l'artiste

ne s'en garantit par l'adresse de son talent. A cet effet, aux formes plus particulièrement rondes, il en opposera de plus aiguës, aux grandes de plus petites, aux droites d'inclinées, aux couleurs aériennes et fraîches, des couleurs chaudes et terrestres, enfin des claires aux obscures; il opposera le mouvement au repos, l'orage au calme. Indépendamment de ces contrastes prononcés qui résultent des choses opposées, il en est de plus doux qui résultent des choses seulement différentes. L'expression de ceux-ci demande de l'artiste encore plus de délicatesse et de goût. Les contrastes s'appliquent à tout; il y en a d'ombres, de lumières, de couleurs, de formes, selon le sexe, l'âge, et les diverses passions; il y a les contrastes occasionnés par les différentes attitudes des figures, même ceux des différentes parties d'une même figure. Les contrastes employés naturellement, et avec vraisemblance, font connaître l'habileté de l'artiste, et montrent qu'il sait tirer parti des ressources de son art.

Cependant, quelquefois ils ne doivent pas être employés, comme quand des figures animées de la même passion sont émues de la même manière et dans le même moment, alors la répétition du même geste de la même expression sert à la vérité du sujet. Quelquefois aussi quand l'artiste n'est pas adroit, il laisse deviner ses projets de contraster, et l'uniformité reparaît par le moyen qui devait servir à la cacher. Bien des artistes sont tombés dans ce défaut de mettre des contrastes par-tout et sans ménagement, de sorte qu'en apercevant une figure, on devine d'abord celle qui sera placée à côté; ils manquent ainsi leur but, et une vicieuse monotonie résulte de ce qu'ils avaient imaginé pour l'empêcher de naître. D'ailleurs nous ne voyons pas dans la nature l'affectation d'un contraste continuel: quelquefois elle paraît se plaire à établir des ressemblances qui servent à réunir les objets, encore plus qu'à présenter les différences qui servent à les distinguer.

Il y a des artistes qui, pour faire ressortir la beauté, l'environnent d'objets hideux; ils ressemblent à ceux qui, pour donner plus d'éclat à leurs lumières, les environnent de dures ombres. Ces excès supposent peu de ressources dans le génie du peintre; non qu'il faille y renoncer quand le sujet l'offre naturellement, mais il faut en éviter l'affectation, comme un vice qui finit par déplaire, et manquer son effet.

De l'Ordre.

Il ne suffit pas, dit *Montesquieu*, de montrer à l'ame beaucoup de choses, il faut aussi les lui montrer avec ordre : sans cet art, la multiplicité des objets qui fait la richesse, produit alors la confusion, l'esprit se fatigue, il se rebute et se venge, par le mépris, de l'artiste mal-adroit qui lui a fait sentir sa faiblesse. L'ordre est l'ame de la composition ; il est d'une nécessité tellement indispensable, qu'il entre jusque dans la peinture du désordre ; la confusion s'arrange avec méthode ; seulement l'artiste habile ne la laisse pas apercevoir ; il semble imiter au hasard, ce que le hasard a semblé produire. En effet, dans les bouleversemens physiques, dans le choc des nuages, dans les tempêtes, les lois de la nature se succèdent rapidement, mais ne sont pas éludées : dans l'imitation que le peintre en fera, les règles de son art recevront une autre application que dans les sujets plus calmes, mais elles ne pourront pas plus être enfreintes. C'est ainsi qu'en musique, dans les mouvemens les plus rapides de la symphonie, dans les morceaux qui admettent un grand nombre de partitions variées, dans ceux qui paraîtraient légitimer la confusion, l'ordre y préside toujours, la mesure sévère règle tout, le ton est toujours le même, et l'oreille exercée du musicien apprécie le moindre son qui s'en écarte.

De la Variété et de la Richesse.

Un principe universel, et qui paraît avoir présidé à l'organisation de l'univers, c'est l'unité dans l'ensemble, et la variété dans les détails. Tous les corps se forment avec deux lignes, tous se peignent avec trois couleurs ; il n'y a que sept notes à la musique, que cinq voyelles à l'alphabet ; avec ces élémens simples et peu nombreux, tout se combine à l'infini ; mais malgré l'immensité de ces modifications, chaque chose retrace les principes qui la constituent ; enfin, tout est un, et tout est distinct. De l'unité résulte l'harmonie, de la variété résulte la richesse, de telle manière que ces deux qualités se servent et ne se nuisent pas. Quant aux ouvrages de l'art, ce n'est point assez d'y multiplier les objets aux yeux de l'ame, et de chercher la richesse par la variété ; si elle n'y voit de la convenance,

il y a confusion et elle est repoussée : cette confusion la fatigue et peut-être l'humilie, en ce qu'elle lui fait sentir la faiblesse et les bornes de son intelligence, en ce qu'elle lui enlève les moyens de connaître et de jouir.

De la Symétrie.

QUAND la symétrie nuit à la variété, elle est fade et déplaisante ; quand elle n'y nuit pas, elle plaît à l'esprit, qu'elle aide et dont elle soulage la peine. La symétrie convient donc dans une grande composition, dans un grand édifice, dans un ouvrage d'un ensemble étendu : elle est inutile dans les cas contraires.

La symétrie plaît encore quelquefois, parce qu'elle fait un tout de différentes parties ; elle en établit la correspondance, elle les réunit sous un seul aspect ; elle achève l'ensemble en le complétant. Un bâtiment avec une aile, ou une aile plus courte que l'autre, dit *Montesquieu*, serait aussi peu fini qu'un corps avec un bras, ou avec un bras trop court.

Du Goût.

SI le génie crée, c'est le goût qui choisit : sans goût on peut faire de grandes choses, mais non des choses aimables. Le goût, soit qu'on invente, soit qu'on jouisse des inventions des arts, n'est pas toujours une science théorique ; il est le plus souvent l'application délicate et vive des lois de la nature morale et physique, lors même qu'on ne les saurait définir.

Le goût, dans l'artiste, est l'art d'apprécier les objets qu'il emploie, de manière à ce qu'ils produisent le plus de plaisir et d'avantages, relativement à leur destination, à la place qu'ils occupent, aux effets qu'il veut produire.

Voilà pour l'artiste : chez l'amateur, le goût est le sentiment qui l'unit à la pensée de l'artiste, de manière à ce qu'il en apprécie l'excellence ou l'imperfection, qu'il soit attiré ou repoussé, qu'il approuve enfin ou désapprouve avec connaissance de cause : mais chacun étant attiré ou repoussé par des raisons particulières et qu'il croit bonnes, reste toujours à trouver

les règles du goût. C'est ce que nous avons déjà essayé de faire, et que nous acheverons, autant qu'il nous sera possible, quand nous aurons à parler du beau idéal.

Il y a pour la disposition des groupes, pour celle des lumières et des ombres, certains préceptes d'école qu'il faut connaître sans les recevoir comme des lois : ces règles ont leur mérite et leur utilité, mais elles n'ont pas le droit d'asservir le génie, qui leur commande et les fait fléchir par les droits de sa puissance. Un des principaux objets de la liaison des groupes, dit M. *d'André-Bardon*, est de conduire l'œil du spectateur sur le héros du sujet. Il convient que cette opération se fasse par une marche diagonale ; les procédés par lignes horizontales ou parallèles à la bordure du tableau, produisent rarement des aspects pittoresques ; ils bornent la vue, et sont peu propres à faire naître l'idée de l'espace.

On sent que cette marche diagonale qui conduit à la principale figure, tend à donner à toute l'ordonnance pittoresque une forme pyramidale, qu'on a grand soin aussi de recommander, et qu'on n'est pas non plus étroitement astreint à observer. Ajoutons qu'on doit la déguiser même à l'instant où on l'observe, en sorte que l'ordonnance ne devienne pas une pyramide parfaite, et que l'art dissimulé semble un effet de la nature.

On recommande encore le principe de disposition tiré de la grappe de raisin ; elle est, dit le même auteur, la collection de plusieurs parties réunies par des liens pittoresques qui ne forment qu'un seul tout, &c. &c.

Il faut convenir, qu'excepté le grand principe de l'unité du sujet, de lumière, de point de vue, de temps, &c., toutes les règles de composition ne sont que des conseils qu'il est bon de se rappeler souvent, mais qu'on n'est pas toujours obligé de suivre.

Rubens, l'un des plus habiles peintres sous tous les rapports, mais principalement pour l'ordonnance, ne s'astreint pas toujours à disposer ses compositions dans une forme pyramidale, ou selon la grappe de raisin ; il a d'autres moyens qu'il puise dans la nature et dans son génie : c'est là où l'artiste doit trouver des ressources pour varier ses sujets et leur donner les différens caractères qui conviennent à chacun d'eux.

Il est un autre genre de composition qui, par sa nature, demande quelques détails particuliers ; c'est celui de l'allégorie : elle est, relativement à la peinture, un moyen ingénieux qu'emploie l'artiste pour faire naître et pour communiquer des pensées spirituelles, des idées abstraites, à l'aide de figures symboliques, de personnages tirés des diverses mythologies, à l'aide d'êtres imaginaires et d'objets convenus.

Ces figures et ces objets peuvent donc être regardés comme des signes de convention, élémens d'un langage spirituel qu'on ajoute à celui que parle ordinairement la peinture.

Il est remarquable que les signes de la nature employés par le peintre soient plus bornés dans leur application, et moins féconds pour la pensée, que le langage artificiel que l'homme a mis à son usage. Les vains efforts de l'allégorie sont la preuve de ce que nous avançons : ce genre de composition, à l'obscurité assez ordinaire aux sujets historiques, joint son obscurité particulière ; et quoique ces sujets allégoriques servent à faire briller l'esprit du peintre qui les invente, et de l'amateur qui les devine, l'artiste judicieux n'en fera pas abus. *Rubens* est de tous les peintres habiles celui qui a le plus employé l'allégorie. Nous ne nous souvenons pas que *Raphaël* s'en soit servi, au moins à la manière de *Rubens*. On peut cependant regarder comme une histoire allégorique, ou une allégorie mixte, son fameux tableau de l'école d'Athènes. *Le Poussin* a fait fort peu d'allégories, malgré qu'il eût toutes les connaissances qui auraient pu lui servir à les inventer convenablement. La justesse de son esprit dédaignait tous ces signes équivoques de flambeaux, d'épées, de balances, de caducées, d'oiseaux, de poissons, de reptiles, enfin tout cet attirail d'objets énigmatiques. Au lieu de peindre la méditation sous la figure d'une femme assise sur une base de colonne, ayant en main un livre fermé et d'autres sous ses pieds, il l'aurait plutôt représentée par l'histoire d'*Archimède*, qui, pendant le siége de Syracuse, oublie tous les dangers qui l'environnent, et, victime de son application à l'étude, meurt de la main d'un soldat dont il est frappé avant qu'il ait songé à l'apercevoir. Il aurait peint le dévouement à la patrie, non par un jeune homme marchant sur des armes acérées, deux couronnes à la main, mais plutôt par le fameux dévouement de *Curtius* et de *Régulus*. Il aurait peint la constance par

l'action de *Mutius Scévola*, ou par celle de ces jeunes Lacédémoniens, dont l'un se laisse déchirer le sein par le renard qu'il a dérobé, pour n'être pas reconnu, et l'autre se laisse brûler par un charbon plutôt que d'interrompre le sacrifice par des plaintes. La vie de *Fabricius*, celles de *Curius*, d'*Epaminondas*, fourniraient aux artistes des exemples de désintéressement; celle de *Scipion*, des exemples de continence. Les vices et les vertus seraient mis en action par ce moyen, et ce langage iconologique instruirait d'autant mieux, serait d'autant plus frappant, que l'ame s'y intéresserait comme à des faits supposés véritables, et dont elle se plaît à faire l'application. Au reste, l'obscurité étant le principal reproche à faire aux allégories, il ne faut les employer que quand elles sont indispensables, comme il arrive quelquefois, ou quand elles sont d'une intelligence facile et sans équivoque. Très-peu sont dans ce cas. En voici un exemple entre mille. Pour représenter la libéralité, *le Guide* a peint deux femmes, dont l'une d'une physionomie ouverte, et avec un mouvement délibéré, présente dans un vase des perles, des bijoux, des pierreries, à une autre femme, qui, les yeux baissés et dans une attitude moins vive, prend modestement du bout des doigts une perle de médiocre grosseur. Cette allégorie, déjà facile à deviner, acquiert une clarté parfaite par les développemens de l'exécution, par la justesse de la pantomime et l'expression des visages. *Le Guide* ayant parfaitement réussi sous tous ces rapports, peut être cité comme un modèle dans ce tableau. Les anciens estimaient beaucoup la fameuse allégorie de la calomnie, inventée par *Apelle*. *Pline*, qui avait souvent vu ce tableau, nous en a laissé une description, d'après laquelle *Raphaël* a fait un dessin qu'on voit dans la collection de Modène : c'est l'un des plus beaux de cette collection. Il est gravé dans l'œuvre de *Marc-Antoine*.

Nous pourrions ajouter beaucoup d'autres choses relativement à la composition; mais cette séance fatigante par l'attention qu'elle a exigée, commence à devenir longue; d'ailleurs on s'instruit moins par ce qu'on entend que par ce qu'on devine, et nos auditeurs sentiront bien que ces observations utiles à quelques égards, ne présentent cependant à l'artiste que le moyen d'en faire de meilleures, que des textes à sa réflexion. Dans les arts comme dans la morale, ce n'est point de l'homme que l'homme

apprendra ce qu'il lui importe le plus de savoir. Le discours peut bien mettre sur la voie de la science, mais la pratique en découvre toutes les profondeurs, en révèle tous les mystères. En vain l'artiste, fier de sa théorie, triompherait par ses paroles; s'il n'en prouve l'excellence dans ses ouvrages, il n'obtiendra qu'une gloire incomplète, et qu'on lui contestera d'autant plus justement, qu'on pourra, pour sa honte, comparer ce qu'il fait à ce qu'il dit, et contredire l'un par l'autre. L'artiste doit donc agir plutôt que raisonner. Le travail, plus que tout, assurera ses succès; il fortifiera son génie, quelquefois il le suppléera; c'est par lui qu'il recueillera les idées les plus fécondes, et les meilleures applications qu'il en pourra faire. La muse, ainsi que la beauté, exige une cour assidue, et leurs plus précieuses faveurs sont le prix de la persévérance.

Avant de terminer cette séance, nous devons un mot de réponse à quelques-uns d'entre vous, qui, à l'issue de la leçon précédente, nous ont fait quelques objections sur ce que nous avons avancé dans le cours de cette leçon, que la peinture n'avait pas seulement pour objet l'imitation de la nature.

A cet égard, nous conviendrons avec eux volontiers que, sans l'imitation de la nature, l'artiste ne peut obtenir aucuns succès durables: que c'est pour avoir négligé ce principe important, que vers le milieu de ce siècle, l'école française, à l'exemple des écoles d'Italie de ce temps, ayant perdu le sentiment du vrai, était entièrement dégénérée; qu'enfin l'art abandonné au caprice, était devenu une affaire de convention: mais de même qu'on n'est pas poëte pour connaître les règles de la grammaire et de la versification, ni musicien pour savoir combiner des accords et calculer des sons, de même on n'est pas peintre pour savoir seulement imiter la forme et la couleur des objets. Le mot *imitation* paraît même opposé à celui de *génie*. Aussi les peintres qui ont eu cette seconde qualité au plus haut degré, ne sont pas toujours ceux qui ont le plus approché de l'apparence physique. *Raphaël*, *Michel-Ange*, *le Corrège*, *le Poussin*, *le Sueur* n'égalent pas, pour la vérité de l'imitation, *Jean Bellin*, *le Perugin*, *Carravage*, *le Philippe de Champagne*, *&c.*; mais ces grands artistes représentent ce que le sentiment seul fait trouver; ils offrent autre chose que ce que les yeux peuvent apercevoir; sous leur main savante, la peinture

devient un langage; leurs ouvrages vivent, ils parlent, ils entraînent. D'après ces raisons et celles alléguées dans la leçon précédente, nous nous croyons autorisés à dire que l'objet le plus relevé de la peinture, c'est de faire naître des pensées, de donner des sensations, en reconnaissant que son moyen pour arriver à ce but, c'est l'imitation de la nature.

Dans la prochaine séance, nous nous occuperons de la forme des corps et des principes de la beauté.

NEVEU.

PHYSIQUE GÉNÉRALE (1).

On a vu précédemment que les premières leçons ont été employées à présenter une espèce d'introduction à la physique, et à exposer ensuite tout ce qui concerne l'*étendue* et l'*impénétrabilité* des corps. Pour terminer ce qui regarde leurs propriétés générales, c'est-à-dire, celles qui les affectent tous de la même manière, il nous restait à considérer la *mobilité*, l'*inertie* et la *gravité* : et, comme nous avons dû nous interdire tout ce qui est du domaine de l'analyse, nous nous sommes retranchés dans les objets qu'une saine métaphysique permettait d'atteindre, et dans les principes nécessaires à l'explication des phénomènes que nous avions à présenter.

Quant à la *mobilité*, c'est-à-dire, cette propriété en vertu de laquelle un corps peut être transporté d'un lieu dans un autre, il n'y avait que très-peu de chose à en dire, parce que tout ce qui regarde le mouvement qui résulte de cette faculté des corps, appartient à leur inertie. Mais nous avons cru pouvoir rapporter à cette propriété toutes les diverses circonstances qui accompagnent le mouvement et le repos des corps ; et nous n'avons pas négligé d'observer qu'à proprement parler, il n'y a pas de repos absolu dans la nature; que, depuis les plus petits atomes jusqu'à ces globes immenses suspendus sur nos têtes, on ne voit par-tout que mouvement, ou tendance au mouvement ; que c'est cette tendance qui tantôt anime la matière, tantôt la convertit en séve vivifiante, tantôt enfin lui fait prendre mille et mille formes différentes.

Nous avons fait voir que les différentes circonstances dont le mouvement d'un corps est accompagné, sont 1.° sa *masse*, c'est-à-dire, la quantité propre de matière qu'il contient, sans avoir égard à son volume; quantité qui

(1) Nous avions annoncé, dans le dernier cahier, que nous nous proposions de donner successivement toutes les leçons qui ont formé le cours de cette année; mais les bornes de ce journal ne nous permettant pas de remplir cette promesse, nous nous contenterons de rendre compte du plan que nous avons suivi.

prend le nom de *densité*, lorsqu'on la considère sous un volume déterminé;

2.° L'*espace* parcouru. Nous nous sommes bien gardés de définir l'*espace* en général, qui est une de ces notions premières dont nous avons déjà parlé, et qui ne sont, pour ainsi dire, que les élémens de nos diverses conceptions. Nous avons pris de-là occasion d'entrer dans quelques détails relativement à la nouvelle unité que nous avons adoptée pour mesurer l'étendue, et pour servir de terme fixe de comparaison à toutes les autres espèces d'unités;

3.° Le *temps*, cet être intellectuel, que l'antique poësie se plut à revêtir d'un corps, qu'elle nous peignit sous l'emblème d'un vieillard, dont la faulx atteint également et l'insecte rampant et l'insolent despote; ce fantôme qui se détruit et se renouvelle sans cesse, dont nous avons su fixer, en quelque sorte, la trace fugitive; à l'occasion duquel enfin un poëte célèbre a dit : *Le moment où je parle est déjà loin de moi.* Nous avons éloigné sur-tout avec soin toutes ces questions futiles sur la nature et l'existence du temps, dont les scholastiques faisaient un assez mauvais emploi, en demandant s'il est indépendant de la durée des êtres; en un mot, s'il y aurait durée, dans le cas où tous les corps fussent anéantis; et nous avons fait voir à quel point les anciens philosophes ont abusé de la métaphysique dans ces sortes de questions, d'ailleurs étrangères à une science qui est toute fondée sur l'observation et sur le calcul des forces de la nature. Nous ne prétendons pas pour cela qu'elle doive être bannie entièrement de la physique, parce que chaque science a la sienne qui lui est propre; et, sous ce point de vue, nous n'avons pas renoncé, nous nous sommes même attachés à en entretenir souvent les élèves. Ce n'est pas, à la vérité, de cette métaphysique, aussi obscure qu'ambitieuse, qui n'embrasse que des chimères, et ne se repaît que de merveilleux; qui, remontant toujours aux causes premières, n'interroge que des êtres fantastiques, et n'en obtient que des absurdités pour réponse; qui, dans le monde nouveau qu'elle se crée, entasse système sur système, et arrive enfin à des résultats, dont la raison chercherait vainement le type dans la nature; mais c'est de cette métaphysique, dont le principal caractère est la sévérité et la précision; qui n'a, pour ainsi dire, d'autre instrument que l'évidence, d'autre appui que l'observation;

qui s'alimente de choses et non de mots, enchaîne les idées dans l'ordre de leur génération, reconnaît dans les faits une dépendance nécessaire, se contente d'expliquer ceux qui sont accessibles à la raison, s'attache moins à découvrir les vérités qu'elle ne peut atteindre, qu'à dissiper les erreurs dont une fausse philosophie n'a que trop souvent enveloppé celles même qui sont le plus près de nous; qui consiste enfin à n'employer que des idées bien senties ou bien définies, à n'admettre, en un mot, que des principes clairs et incontestables, et cette métaphysique est inséparable de tous les genres de connaissances.

Quoi qu'il en soit, nous nous sommes contentés de dire que nous acquérons la notion du temps, soit par l'existence successive des êtres, soit par la succession même de nos propres idées; et cette observation nous a amenés à conclure de-là, que c'est dans le mouvement même qu'on a dû naturellement chercher la mesure du temps; que, comme le mouvement est par lui-même essentiellement uniforme, c'est dans cette loi d'uniformité qu'on en trouve la mesure la plus simple : mais que, comme nous n'avons aucun moyen de nous assurer de cette uniformité, il s'ensuit que nous n'avons pas de mesure exacte et rigoureuse du temps, et que nous avons été obligés de nous contenter d'une approximation, en la tirant du mouvement diurne de la terre, et en prenant pour unité la durée de la révolution apparente d'une étoile autour de cette planète;

4.° La *vîtesse*, qui n'est autre chose que l'espace qu'un corps parcourt dans un temps donné;

5.° Enfin, la *force*, qui produit le mouvement, et qu'on estime par le produit de la masse des corps multipliée par leur vîtesse. A cette occasion, nous avons fait voir à quoi se réduit la question des *forces vives*, qui a partagé si long-temps les plus grands géomètres, et qui a fait, pendant plus de trente ans, la matière d'un procès fameux.

Nous avons passé ensuite à l'*inertie*, c'est-à-dire, à cette propriété en vertu de laquelle un corps ne reçoit de mouvement qu'autant qu'il en détruit la même quantité dans les corps qui agissent sur lui. D'où il résulte que, lorsqu'un corps vient en frapper un autre, ils se distribuent toute la quantité de mouvement, proportionnellement à leurs masses; et,

ce qu'il y a de remarquable, c'est que ce partage se fait comme si c'était une chose absolument matérielle : l'un cède à l'autre, dans le cas où ce soient des corps durs, tout ce dont celui-ci a besoin pour qu'ils puissent marcher ensemble. Nous avons cru qu'il était important de bien fixer l'idée qu'il faut attacher au mot de *résistance*, qu'on emploie si souvent en mécanique, et dont on n'a communément qu'une notion fausse, parce qu'on a coutume de regarder l'inertie comme une force qui réside dans les corps, et que, lorsqu'on dit qu'ils résistent, on leur attribue, en quelque sorte, une volonté qu'ils n'ont pas et qu'ils ne peuvent avoir.

Après avoir ainsi passé en revue toutes les considérations métaphysiques qui appartiennent à l'inertie, nous avons été amenés à cette loi fondamentale, *que tout corps tend par sa nature à persévérer dans le même état, jusqu'à ce qu'une cause étrangère vienne l'en faire sortir*.

Nous avons ensuite présenté successivement tous les phénomènes qui appartiennent à l'inertie des solides, et qui regardent principalement le choc des corps, la composition du mouvement, le mouvement curviligne, d'où naissent les forces centrifuges et centripètes ; l'équilibre dans les machines, et les résistances qui résultent, soit de la raideur des cordes destinées à transmettre le mouvement, soit du frottement qu'éprouvent les corps en glissant les uns sur les autres. De-là vient, comme il nous a été facile de le conclure de cette dernière considération, que le soc de la charrue s'émousse à force de déchirer la terre; que les cailloux s'arrondissent sous le roulement continuel des torrens; que les flots d'une mer agitée minent ces rochers orgueilleux contre lesquels ils viennent se briser sans cesse; que la pierre la plus dure finit par céder à l'action même de l'eau qui tombe goutte à goutte; que le marbre de nos temples s'amincit à la longue sous les baisers d'une multitude ignorante : de-là vient enfin cette expression figurée, qui peint avec tant d'énergie la puissance du temps : *rien ne résiste à sa dent dévorante*.

Nous avons passé de-là à l'inertie des fluides, et nous avons considéré les phénomènes que présentent leurs résistances, les circonstances qui accompagnent l'écoulement d'un vase entretenu ou non entretenu constamment plein, celles qui regardent les eaux jaillissantes et les tuyaux de conduite; les différentes lois que les fluides observent dans leur pression;

enfin l'équilibre des corps flottans et celui des corps plongés, ce qui nous a conduits à la manière de déterminer la pesanteur specifique des corps tant solides que fluides.

Enfin, nous avons examiné la cinquième et dernière propriété générale des corps, la *gravité*, c'est-à-dire, cette proprieté en vertu de laquelle ils tendent sans cesse à se porter les uns vers les autres. Nous l'avons d'abord considérée dans tous les corps de la nature, et particulièrement dans les corps célestes; mais il a été nécessaire de donner auparavant une idée générale du mouvement de ces derniers, et d'entrer dans quelques détails relativement à notre système planétaire; ce qui nous a mis en état de les considérer sous le rapport de la force qui les maintient dans leurs orbites. Nous avons vu que *Képler* en fit d'abord une application heureuse au mouvement des planètes, dont il trouva les lois; mais qu'il était réservé à *Newton* de découvrir la loi générale dont ces dernières ne sont qu'une conséquence, de nous faire connaître les forces qui animent les corps célestes, et de nous tirer de l'état d'ignorance où nous serions peut-être encore sur leurs mouvemens, si ce génie sublime n'eût fait de l'astronomie physique une science toute nouvelle.

Cette loi générale consiste en ce que tous les corps s'attirent en raison directe des masses et en raison inverse des quarrés des distances; et nous l'avons appliquée à la recherche du rapport des densités des planètes, à la détermination des différentes pesanteurs d'un corps, placé successivement sur la surface de chacune d'elles, et à celle des différentes longueurs du pendule, qui, transporté sur ces mêmes surfaces, battrait des secondes. Enfin, nous avons fait voir que c'est au moyen de cette force qu'on est parvenu à expliquer les irrégularités de leurs mouvemens, la précession des équinoxes, la variation de l'obliquité de l'écliptique, le flux et reflux de la mer, &c.

Il nous restait à considérer la gravité par rapport aux corps qui sont placés à la surface de la terre; et, sous ce point de vue, on la nomme *pesanteur*. Nous avons d'abord jeté un coup d'œil sur les différens systèmes imaginés pour expliquer ce phénomène, qui de tout temps a fait l'admiration des philosophes; et nous avons pris de-là occasion de faire sentir la différence qu'il y a entre un *système* et une *théorie*. Le premier marche

hardiment à travers les ténèbres, rien ne l'embarrasse, rien ne l'arrête; il explique tout, il franchit tous les obstacles. La nature sait se plier elle-même aux suppositions gratuites qu'il imagine; et, si par hasard il survient une observation propre à le renverser, il se relève bientôt à l'aide de quelque supposition nouvelle. La théorie au contraire, plus timide, observe sans cesse, attend de l'expérience l'explication de ce qu'elle cherche, et recueille péniblement tous les faits, à mesure qu'ils se présentent. Tantôt elle unit ceux que l'erreur avait séparés, tantôt elle éloigne ceux que l'ignorance avait rapprochés. C'est alors qu'elle les enchaîne entr'eux, qu'elle les met dans une dépendance réciproque les uns des autres, et qu'elle en forme un faisceau duquel jaillit la lumière de toutes parts. Enfin, elle ne croit sa marche assurée que lorsqu'elle est parvenue à satisfaire à tous les phénomènes d'un même genre, et à ne donner pour certains que les résultats conformes à l'expérience.

Cependant, il est bon de l'observer, telle est la marche de l'esprit humain, qu'il a dû naturellement commencer par des systèmes. A l'origine des sciences, on connaissait à peine quelques faits, que déjà l'envie de tout expliquer, de tout approfondir, avait emporté des génies ardens au-delà des limites qu'ils ne pouvaient franchir sans s'exposer à se perdre dans un dédale d'erreurs inextricables. De-là des hypothèses plus ou moins ingénieuses, plus ou moins vraisemblables. Pleins de leurs opinions, séduits peut-être par les illusions de l'amour-propre, ils se persuadèrent bientôt qu'ils avaient déchiré le voile de la nature; et, à mesure que des faits nouveaux se présentèrent, ils dûrent chercher à les soumettre à leurs systèmes. Toutefois il faut leur savoir gré de leurs efforts. S'ils ne nous ont rien appris le plus souvent, ils ont au moins été utiles sous ce rapport, qu'ils ont dirigé les recherches vers la vérité. Ne nous hâtons donc pas de les juger trop sévèrement. Riches aujourd'hui de toutes les découvertes des siècles qui nous ont précédés, il nous est facile de verser sur eux le ridicule ou le mépris : mais il doit en être des erreurs des hommes de génie, comme de ces monumens de désolation que le temps respecte, qui attestent les grandes révolutions dont quelques parties du globe ont été le théâtre, que le voyageur impatient va contempler avec admiration, et dans lesquels tout lui rappelle encore les beautés de la nature.

Revenons à la pesanteur. Nous avons fait voir que la loi générale à laquelle elle est soumise, se modifie dans cette circonstance; parce qu'à la surface de la terre les corps ne tombant que de hauteurs médiocres, on peut regarder la pesanteur qui les anime, comme une force accélératrice constante, pendant tout le temps qu'ils emploient à tomber : de sorte qu'ils observent dans leur chute les lois du mouvement uniformément accéléré; lois qui se simplifient encore par une considération particulière, et d'où il résulte 1.° que leurs vîtesses finales sont comme les temps employés à les acquérir; 2.° que les espaces parcourus sont comme les quarrés des temps; 3.° enfin, que si un corps, après être tombé d'une certaine hauteur, vient à se mouvoir d'un mouvement uniforme, avec la vîtesse acquise, il parcourra dans le même temps un espace double de celui qu'il a parcouru en tombant.

Après avoir confirmé ces différentes lois par l'expérience, nous les avons appliquées aux corps qui tombent sur des plans inclinés et au mouvement de projection. Enfin, des considérations sur le mouvement oscillatoire ont terminé cette théorie de la pesanteur, et en même temps tout ce qui regarde la physique générale.

Passant de-là à la *physique particulière*, c'est-à-dire, à celle qui considère les propriétés qui caractérisent les corps et les affectent d'une manière variable, nous avons commencé par la *porosité*. Après avoir établi cette propriété par des exemples pris dans les différens règnes de la nature, nous l'avons démontrée d'une manière générale, soit par la propriété qu'a le calorique de dilater tous les corps suivant toutes leurs dimensions, soit par celle qu'ils ont de se condenser par le froid : et, comme nous ne connaissons pas le terme où peut s'arrêter cette condensation, il suit de-là qu'il n'y a aucun corps dont les molécules soient rigoureusement en contact, et qu'elles sont toutes séparées les unes des autres par des quantités de calorique qui sont variables pour chacun d'eux.

Nous avons ensuite exposé les différens phénomènes qui dépendent de l'*élasticité*, et dont les arts nous ont fourni de nombreuses applications; et nous avons tâché de les rallier à une théorie toute fondée sur l'expérience.

Enfin, nous nous sommes occupés des propriétés mécaniques de l'air,

cet être fugitif, qui a si long-temps échappé à toutes nos recherches; dans le sein duquel se forment tous les météores, d'où sortent également et ces rosées réparatrices, et ces foudres destructeurs, qui tour-à-tour viennent féconder et désoler la terre; ce principe actif, qui sans cesse allume en nous le flambeau de la vie, étend son influence sur toute la nature végétante, rappelle sur l'horizon les rayons éteints de l'astre du jour, convertit des matières inertes en substances corrosives, va jusque dans les entrailles de la terre attaquer les métaux les plus durs, tantôt les fait briller des couleurs les plus vives, tantôt enfin les dépouille de tout leur éclat. Considérant celles de ses propriétés mécaniques qui sont relatives à l'équilibre, et qui sont l'objet de la *pneumatologie,* nous avons parcouru tous les phénomènes qui dépendent de la pesanteur, de la compressibilité et de l'élasticité de ce fluide. Nous en avons fait ensuite l'application aux diverses machines et instrumens qui ont pour principe la pression de l'atmosphère, tels que le baromètre, les pompes, &c.; et nous avons terminé cette théorie par des observations sur les atmosphères des corps célestes.

Tels sont les objets qui ont fait la matière des quatre premiers mois de leçons du cours annuel de physique.

BARRUEL.

ARCHITECTURE.

PREMIÈRE PARTIE.

Moyens de construction appliqués aux travaux publics.

LES mois de messidor et de thermidor ont été employés à l'étude des travaux du pont de Mantes. Les élèves en ont construit les dessins suivans :

1.° Plan et élévation de la moitié du pont, avec les enceintes de bâtardeaux, qui en ont facilité la fondation.

2.° Une forme de cintre, retroussée, avec ses développemens.

3.° L'épure cotée de deux arches.

4.° Les ponts de service, le levage des cintres et la pose des voussoirs.

La moitié de fructidor a été consacrée à un grand pont en charpente, dont on a dessiné le plan, la coupe et l'élévation. Ce pont renfermait les principales difficultés qui se présentent dans ce genre d'édifice, et je m'étais efforcé d'y disposer les bois, dans les directions que demandent le calcul et l'expérience.

Pendant le reste de fructidor, les élèves ont dessiné des profils du canal des deux mers (de Languedoc) et de celui de Bourgogne, et tous les développemens d'un sas d'écluse de navigation, en maçonnerie, avec portes d'amont et d'aval.

Là le cours a cessé, par défaut de temps, et non de matières, pour laisser trois mois à l'enseignement de la deuxième partie, ou de l'architecture proprement dite; car je n'en avais envisagé la première partie, que comme le recueil raisonné des procédés du maître maçon, de l'appareilleur et du charpentier, mis en usage par un ingénieur, et dirigés vers l'exécution des travaux publics qu'exigent les communications intérieures et extérieures d'un vaste territoire.

CH. GRIFFET.

FORTIFICATION.

Le cours de fortification de l'année dernière n'a duré que sept mois ; les trois premiers mois ayant été employés par les cours préliminaires, et les deux suivans ayant été destinés à donner aux élèves de la troisième division les principes de géométrie descriptive qui leur étaient absolument nécessaires, et qu'ils n'avaient pu recevoir les années précédentes. C'est donc au mois de prairial que s'est faite l'ouverture de ce cours.

On a donné d'abord aux élèves les notions générales sur l'art militaire, qui servent de fondement à celui des fortifications. Le plan qu'on devait suivre ensuite exigeait qu'avant d'exposer aux élèves les principes de la fortification, on leur fît connaître la forme des objets dont on devait leur parler; qu'on leur apprît à les dessiner; qu'on leur donnât en quelque sorte la définition des termes qu'on devait employer.

Pour parvenir à ce but, on leur a décrit un front de fortification, et on leur a fait résoudre les quinze cas du problème suivant, qui offrait une application de la géométrie descriptive à la fortification.

Construire un front de fortification régulier à lignes de défense rasantes, étant données quatre des six choses suivantes :

Le côté extérieur,

La face,

Le flanc,

La ligne de défense,

La courtine,

L'angle de défense (1).

Le mois suivant, les élèves ont appliqué ces problèmes à la construction d'un front avec tous les détails. Afin de leur montrer ces mêmes détails sur une grande échelle, on leur a fait copier des dessins tirés d'un

(1) Par angle de défense, on entend ici l'angle que fait le flanc avec la ligne de défense.

manuscrit de *Cormontaigne*, l'un des meilleurs ingénieurs du commencement de ce siècle.

Pendant le mois de thermidor, ils ont continué la suite de ces dessins; vers le milieu de fructidor, ils l'ont achevée. Cette suite consiste en 30 dessins, dont quelques-uns exigent plusieurs jours de travail, et qui contiennent tous des détails de construction très-utiles.

Le reste du mois a été employé par des leçons sur le lever des cartes et des plans, sur le nivellement et sur les différentes manières de représenter le terrain dans les cartes. Ces leçons étaient étrangères au cours de fortification; mais elles étaient nécessaires aux élèves qui devaient, le mois suivant, s'exercer sur le terrain au lever de la carte.

Tel a été l'emploi du temps des élèves de la troisième division jusqu'à la fin de fructidor.

DESSINS contenant les détails d'un front de Fortification, formant une partie du travail des Élèves de la division des fortifications, pendant les mois de messidor, thermidor et fructidor.

1. Profils de différentes sortes d'escarpe en gazon et en maçonnerie.
2. Suite des profils précédens.
3. Profils des remparts des différentes pièces de fortification.
4. Tracé général d'un front de fortification.
5. Plan détaillé d'un front de fortification avec les fondations de ses revêtemens.
6. Profil coupé sur la face du bastion et celle du réduit de la place d'armes rentrante du chemin couvert.
7. Profil coupé sur le milieu de la courtine et de la tenaille, et passant par le milieu des faces de la demi-lune et de son réduit.
8. Plan de la poterne sous la courtine.
9. Profil coupé sur le milieu de la même poterne.
10. Élévation extérieure de la porte d'entrée de la même poterne.
11. Élévation extérieure de la porte de sortie de la même poterne.
12. Plan, profil et élévation d'une grande barbette sur le saillant d'un bastion.
13. Profil sur la longueur et la largeur de la communication de la tenaille.
14. Élévation de l'escalier à la gorge de la tenaille.

15. Plan des fondations de la gorge de la demi-lune et de son réduit avec la communication du réduit et les escaliers, et élévation de ladite gorge.
16. Plan et élévation de l'escalier pour communiquer au terre-plein de la demi-lune.
17. Plan et profil de la caponnière et de l'aqueduc dans le fossé du corps de place.
18. Plan de la place d'armes rentrante du chemin couvert et de son réduit.
19. Plan de l'une des communications du réduit de la place d'armes rentrante au chemin couvert.
20. Profil coupé sur le milieu de la même communication.
21. Profil pour faire voir les arceaux en décharge sous les pieds-droits de la même communication.
22. Profil pour faire voir les contreforts de buttée de la même communication.
23. Profils coupés sur le travers de la même communication.
24. Élévation de la porte d'entrée de la même communication.
25. Élévation de l'escalier à la gorge du réduit de la place d'armes rentrante du chemin couvert.
26. Plan d'une traverse de la place d'armes rentrante du chemin couvert du côté de la demi-lune.
27. Plan et élévation du profil de maçonnerie de la même traverse.
28. Plan d'une traverse de la place d'arme saillante du chemin couvert de la demi-lune.
29. Plan et élévation du profil de maçonnerie de la même traverse.
30. Plans et profils des passages de sortie du chemin couvert.

H. SAY.

CHIMIE.

Iere DIVISION.

SUBSTANCES SALINES.

Exposé des objets qui ont été traités dans le laboratoire de Chimie de l'École polytechnique, section des matières salines, pendant les mois de messidor, thermidor et fructidor, an 3.

De l'acide nitrique.

LA marche qui a été suivie dans ce cours, a conduit à l'histoire de l'acide nitrique, de l'acide muriatique et de leurs combinaisons avec les matières terreuses et alcalines, pour les mois de messidor, thermidor et fructidor.

Quoique le radical de cet acide soit bien connu aujourd'hui, les chimistes modernes n'ont cependant pas cru, par respect pour le nom qu'il porte depuis un temps immémorial, lui en donner un nouveau, tiré de sa base, comme ils l'ont fait pour la plupart des substances de cette nature.

Caractères physiques.

L'acide nitrique est un liquide blanc, transparent comme de l'eau, qui répand des vapeurs blanches lorsqu'il a le contact de l'air, qui brûle les matières végétales et animales, et leur donne une couleur jaune. Sa pesanteur spécifique est, suivant *Kirwan*, de 14.000.

Caractères chimiques ; action de la lumière.

L'acide nitrique concentré, exposé aux rayons du soleil, dans un flacon portant un tube reçu sous une cloche pleine d'eau, se remplit d'une foule de petites bulles qui passent par le tube, et se rassemblent dans le récipient.

A mesure que ce phénomène a lieu, l'acide se colore d'abord en jaune-verdâtre, et ensuite en rouge-brun ; à cette époque l'effervescence cesse

d'avoir lieu, quelques vives que soient la lumière et la chaleur du soleil.

En examinant le gaz dégagé de l'acide nitrique, *Scheele* et *Berthollet*, qui les premiers ont fait cette expérience, reconnurent que c'était du gaz oxigène.

Dès ce premier pas fait sur la nature de l'acide nitrique, l'on peut tirer cette conclusion, que cet acide est susceptible d'exister dans deux états différens; l'un, où il est blanc; l'autre, où il est d'un rouge plus ou moins foncé, et que celui-ci diffère du premier, en ce qu'il contient moins d'oxigène. La cause du changement qu'éprouve l'acide nitrique de la part de la lumière du soleil, sera exposée plus bas, lorsque nous aurons acquis les bases qui doivent appuyer ce raisonnement; j'observerai seulement ici que, pour conserver cet acide parfaitement blanc et sans altération, il faut le renfermer dans des vases opaques, ou le placer dans un lieu obscur.

Action du calorique.

Lorsqu'on distille de l'acide nitrique concentré dans une cornue de verre, à l'appareil pneumato-chimique, à l'aide d'une température assez forte pour le faire bouillir, il s'en dégage une vapeur rouge qui se condense dans le récipient en un liquide de la même couleur, et il passe, dans la cloche remplie d'eau, du gaz oxigène. L'on peut convertir ainsi une quantité donnée d'acide nitrique blanc, en un acide rouge et en gaz oxigène.

La cause qui agit ici, est la même que celle de l'expérience précédente, mais le résultat est un peu différent; car à mesure que l'acide rouge se forme, il se sépare de la masse sous la forme d'une vapeur, qui ne peut rester en dissolution dans l'acide nitrique, à cette température.

Action de l'eau sur l'acide nitrique.

L'eau se combine à l'acide nitrique dans toutes proportions, et il se dégage du calorique pendant cette combinaison; l'on peut faire monter le mercure dans le thermomètre de *Réaumur*, jusqu'à 35 degrés, en employant deux parties de cet acide concentré sur une partie d'eau.

Glace et acide nitrique.

En se servant de neige au lieu d'eau, il se produit des effets contraires, c'est-à-dire, qu'il y a absorption de calorique; l'on peut faire descendre le thermomètre de zéro jusqu'à 22 au-dessous, en mêlant quatre parties de neige avec une partie d'acide nitrique; en refroidissant

dans ce premier mélange de nouvel acide et de nouvelle glace, en les mêlant ensuite au milieu de ce bain, l'on parvient à abaisser la température à 32 ou 33 degrés — o —. Cette propriété de l'acide nitrique de produire un si grand froid avec la glace, dépend de la grande affinité qu'il a pour s'unir à l'eau, et force, en quelque sorte, sa base avec laquelle il ne peut s'unir en cet état, d'enlever aux corps voisins le calorique dont elle a besoin pour devenir liquide. Elle fournit aux chimistes des moyens très-utiles, dont ils ne font peut-être pas assez d'usage, pour étudier les propriétés des corps à une basse température; c'est elle qui a fait connaître que le mercure se solidifiait à 31 à 32 degrés — o —.

Action des corps combustibles sur l'acide nitrique.

La plupart des combustibles agissent sur l'acide nitrique, et lui font éprouver une altération qui a, dans ces derniers temps, éclairé les chimistes sur la nature de ses principes : c'est *Priestley* qui a fait les premiers pas dans cette carrière importante.

Lorsqu'on met un métal, du mercure par exemple, avec de l'acide nitrique dans un appareil pneumato-chimique, on voit se former à la surface du métal, une foule de bulles de gaz, qui l'agitent en s'en détachant, qui s'élèvent à quelque distance de là, et disparaissent avant d'avoir atteint la surface du liquide. Dans le lieu où se fait la dissolution de ce gaz, la liqueur prend d'abord une couleur bleue qui passe bientôt au vert; en même temps la matière s'échauffe, le mercure diminue, le gaz s'élève alors jusqu'au haut de la liqueur, et passe dans le récipient pneumatique; enfin, le tout s'éclaircit et le mercure disparaît.

Priestley a trouvé que le fluide élastique, développé pendant la dissolution du mercure dans l'acide nitrique, était transparent et sans couleur comme l'air atmosphérique, indissoluble dans l'eau; qu'il ne jouissait plus de la propriété acide, enfin qu'il ne pouvait servir à la combustion des bougies, ni à la respiration des animaux; mais qu'il se combinait avec rapidité au gaz oxigène, et formait avec lui une vapeur rouge très-épaisse, dissoluble dans l'eau, à qui il communique les propriétés de l'acide nitrique.

On voit donc que le gaz nitreux est de l'acide nitrique, moins une portion d'oxigène, puisqu'on le convertit en acide parfaitement semblable

à ce qu'il était auparavant, en lui rendant l'oxigène qu'il avait perdu.

On se convainc de la vérité de cette assertion, en séparant, par un alcali caustique, le mercure de la portion d'acide non décomposée qui le tient en dissolution. Il se présente alors sous la forme d'une poussière jaune-rougeâtre, qui, soumise à l'action du feu dans un appareil pneumato-chimique, fournit du gaz oxigène et du mercure coulant.

En répétant cette expérience avec soin, *Lavoisier* a trouvé que 100 parties d'acide nitrique décomposé ainsi, ont fourni environ 41.44 de gaz nitreux, et 58.59 de gaz oxigène; d'où il a conclu que l'acide nitrique était composé d'oxigène et de gaz nitreux. Cette conséquence était bien naturelle, puisqu'elle était donnée par l'expérience même; mais en mêlant ces deux principes pour recomposer l'acide nitrique, il lui restait toujours quelques centièmes de gaz qui refusait de se combiner, et qui jetait un peu d'incertitude sur sa théorie. Ce résidu, qui ne s'élevait jamais au-delà de 4 à 0.05, n'entretenait point la combustion comme le gaz oxigène, et ne rougissait point à l'air comme le gaz nitreux.

Cavendisch leva ensuite les difficultés qui restaient encore sur la véritable nature des principes de l'acide nitrique, lorsqu'en électrisant dans une cloche de verre placée sur le mercure, et dans laquelle il avait mis une dissolution de potasse caustique, sept mesures de gaz oxigène et trois d'air atmosphérique, ou en poids 72.2 de gaz oxigène, et 27.8 de gaz azote, il leur fit perdre leur fluidité élastique, et trouva, après l'expérience, dans la dissolution de potasse, une certaine quantité de salpêtre. Il convertit donc, par le choc électrique, le gaz oxigène et le gaz azote en acide nitrique, ou plutôt la pression que le passage rapide du fluide électrique fit éprouver à ces gaz, en rapprocha les parties en en exprimant le calorique, et favorisa par-là leur combinaison; il faut cependant observer que la présence de la potasse, ou de toute autre matière alcaline, est un auxiliaire nécessaire au succès de l'opération, car on ne parvient pas sans cela à unir les deux principes de l'acide nitrique, au moins en quantité sensible.

La potasse exerce donc une force sur les principes de l'acide nitrique, et détermine leur combinaison, en facilitant la séparation du calorique qui tient leurs molécules trop éloignées dans les gaz oxigène et azote.

Cette

Cette expérience de *Cavendisch* est confirmée par une autre de *Priestley*, que nous avons répétée avec succès ; elle consiste à faire passer à travers un tube de porcelaine incandescent, de l'acide nitrique concentré ; il se forme une grande quantité de gaz, qui fait brûler les bougies beaucoup plus rapidement que l'air atmosphérique, dans lequel le phosphore brûle jusqu'à ce qu'il l'ait réduit environ aux 0.2 de la masse : le résidu est du gaz azote. Si l'on fait cette expérience dans un tube de sept à huit décimètres de long, et qu'il soit bien rouge, l'acide est presqu'entièrement décomposé, il n'en échappe pas les 0.05 de son poids.

On voit maintenant que la première analyse que *Lavoisier* avait présentée de l'acide nitrique, était encore incomplète, puisqu'il considérait le gaz nitreux comme un principe primitif de cet acide, tandis qu'il n'en est véritablement qu'un produit secondaire ; l'on remarque en effet qu'à cette époque il n'admettait dans cent parties d'acide nitrique sec, que 58.56 d'oxigène, et que *Cavendisch* en avait employé 72.2 dans son expérience, quoique son acide ne fût pas encore entièrement saturé de ce principe.

Lavoisier n'avait donc pas séparé tout l'oxigène de l'acide nitrique par le moyen du mercure, et il s'est assuré depuis que le gaz nitreux contenait encore beaucoup de cette substance, avec laquelle il a plus d'affinité que le mercure, ce qui sera démontré plus bas.

Gaz ou acide nitreux.

On a vu plus haut comment on obtient du gaz nitreux : il suffit de mettre l'acide nitrique en contact avec un corps qui ait plus d'affinité avec l'oxigène que n'en a l'oxide nitreux ; mais pour avoir cette substance pure et exempte de gaz azote, comme il convient pour les essais eudiométriques, il n'est pas indifférent d'employer tel ou tel combustible ; car il en est qui exercent une action si forte sur l'oxigène, qu'ils en dépouillent entièrement quelques parties de l'azote, et alors le gaz nitreux est mêlé de gaz azote. L'argent et le cuivre sont les métaux qui conviennent le mieux pour cet objet ; il est nécessaire que la densité de l'acide nitrique ne passe pas 20 à 25 degrés à l'aréomètre de *Baumé;* sans cela son action est trop vive, le gaz nitreux se dégage trop rapidement, et peut faire briser l'appareil ; il est d'ailleurs beaucoup moins pur.

Propriétés physiques du gaz nitreux.

Le gaz nitreux, préparé comme il vient d'être dit, est un fluide élastique sans couleur, ni saveur sensibles, indissoluble dans l'eau, ne rougissant point la couleur de tournesol, et répandant des vapeurs rouges par le contact de l'air. Sa pesanteur spécifique est de 0. 0014.

Caractères chimiques.

Exposé à l'action du calorique dans un tube de porcelaine rougi au feu, il n'éprouve aucune altération ; il paraît singulier que ce corps ne soit pas décomposé par la chaleur rouge, tandis que l'acide nitrique subit, par le même agent, une décomposition complète ; il semblerait, d'après cette expérience, qu'il n'aurait dû perdre tout au plus que la portion d'oxigène excédant à la composition de l'acide nitreux : c'est cependant ce qui n'arrive pas.

Van Marum annonce que l'acide nitreux à travers lequel on fait passer l'étincelle électrique, se réduit à un tiers de son volume; qu'il ne rougit plus avec l'air atmosphérique, mais qu'il se trouve converti en gaz azote, et en acide nitreux.

Mis en contact avec le gaz oxigène, il perd son élasticité, ainsi que le gaz oxigène ; il se dégage beaucoup de calorique, il se forme des vapeurs rouges, et il en résulte de l'acide nitreux.

Lavoisier a observé que 0.73 de gaz nitreux peuvent absorber 0.40 de gaz oxigène. L'acide qui résulte de cette combinaison n'est pas parfaitement blanc ; il répand des vapeurs rouges lorsqu'on l'unit avec les alcalis ou la chaux, il n'est donc pas entièrement saturé d'oxigène, ainsi qu'on le verra plus bas.

Ce gaz, laissé pendant quelque temps sur une dissolution de sulfure de chaux ou de potasse, diminue peu-à-peu de volume; la dissolution de sulfure se couvre d'une pellicule saline, et se trouble : lorsque le volume est réduit environ au tiers, si on examine le gaz, on trouve qu'il ne rougit plus à l'air, qu'il entretient la combustion des bougies avec plus d'énergie que l'air atmosphérique, que c'est enfin un mélange de gaz oxigène et de gaz azote; mais si ces matières restent en contact jusqu'à ce qu'il ne se forme plus de croûte à la surface du sulfure, on ne trouve plus que du gaz azote dans l'appareil; il y a donc une époque où l'oxigène et l'azote se séparent, lorsqu'une partie du premier a été absorbée par du sulfure alcalin.

Le gaz nitreux enflamme le pyrophore ; il perd une partie de son volume, et le résultat de cette combustion est du gaz azote, du gaz acide carbonique, et de l'acide sulfureux.

Le gaz oxigène phosphoré est aussi décomposé par le gaz nitreux ; on trouve, après l'opération, du gaz azote et du phosphore à l'état concret.

Le principe qui sert à la combustion existe donc encore dans le gaz nitreux, puisqu'il favorise l'inflammation de certains corps combustibles qui ont avec l'oxigène une grande affinité, tels que le sulfure de potasse, le pyrophore, le gaz hydrogène phosphoré, le fer, &c. D'après les expériences de *Lavoisier*, 100 parties de ce gaz contiennent 68 d'oxigène et 32 de gaz azote.

Le gaz nitreux se combine avec quelques acides, et notamment avec l'acide nitrique, auquel il donne des caractères nouveaux. Si l'on fait passer dans un flacon rempli d'acide nitrique blanc et concentré, du gaz nitreux, on observe qu'il s'y dissout aussitôt, que l'acide devient verdâtre; enfin, qu'il prend une couleur jaune ou brunâtre, suivant la quantité qu'il en a absorbée.

Priestley a trouvé que 100 parties d'acide nitrique, dont la pesanteur était 14, ont absorbé, en deux jours, 90.29 de gaz nitreux; il annonce que lorsqu'il y en eut environ 7 parties d'absorbées, l'acide prit une couleur orangée ; une couleur verte, lorsqu'il y en eut 18 parties ; et que quand les 90.29 furent combinées, il s'éleva sous la forme de vapeurs rouges. Nous avons constamment observé un ordre contraire dans la succession des couleurs, c'est-à-dire, que le vert-bleuâtre parut d'abord ; ensuite le vert-jaunâtre, enfin le brun-foncé.

De l'acide nitreux.

On voit, par cette expérience, que l'acide nitrique, rouge ou vert, contient moins d'oxigène que lorsqu'il est blanc; car il est évident qu'en y combinant du gaz nitreux qui a déjà été privé lui-même d'une partie de ce principe, on en diminue la quantité dans l'acide nitrique. Comme dans cette modification l'acide acquiert des propriétés nouvelles, les chimistes modernes lui ont donné le nom d'*acide nitreux*, pour le distinguer de celui où l'azote est complétement saturé d'oxigène.

Lavoisier ayant établi, par l'expérience, que l'acide nitrique blanc

contenait 80.5 d'oxigène et 19.5 d'azote, il s'ensuit que celui qui a absorbé 90.29 de gaz nitreux, ne contient que 74 par cent d'oxigène, puisque 100 parties de gaz nitreux contiennent 68 d'oxigène et 32 d'azote. Le gaz acide muriatique oxigéné et du gaz oxide nitreux, mis en contact, perdent tout-à-coup leur état de gaz, et il se produit de l'acide nitrique et de l'acide muriatique ordinaire.

Il est aisé de rendre raison maintenant des altérations que subit l'acide nitrique par le contact des rayons solaires, du calorique, des corps combustibles, &c. Dans toutes ces circonstances, une portion d'oxigène est absorbée, ou dégagée à l'état de gaz, et l'oxide nitreux reste combiné avec une portion d'acide non décomposé, et forme l'acide nitreux, ou il se volatilise, si la température est assez élevée.

Des propriétés de l'acide nitreux.

L'acide nitreux est un liquide orangé, d'une odeur forte et désagréable, qui répand des vapeurs rougeâtres.

Distillé à une chaleur douce, à l'appareil pneumato-chimique, il fournit une portion de gaz nitreux, et perd sa couleur; mais jamais on ne peut retirer entièrement tout ce qu'il en contient, parce qu'une portion d'acide nitrique s'élève avec lui, et le retient en dissolution, ce qui prouve qu'il y a, entre l'acide nitrique et le gaz nitreux, une affinité assez forte. C'est par ce procédé simple que l'on blanchit l'acide nitrique obtenu de la décomposition du nitrate de potasse, et qu'on le rend propre à quelques essais qui exigent de l'exactitude.

Lorsqu'on mêle de l'eau avec de l'acide nitreux, il se fait une effervescence rapide; il se dégage du gaz nitreux; l'acide devient d'abord vert, si l'on ajoute un peu d'eau; ensuite bleu, en en ajoutant un peu plus; enfin blanc, en en mettant encore davantage.

On convertit donc, par cette expérience, l'acide nitreux en acide nitrique, d'une part, par la séparation d'une partie de gaz nitreux, à l'aide du calorique qui se dégage de l'eau pendant sa combinaison avec l'acide nitrique; de l'autre, en portant dans l'oxide nitreux une portion d'oxigène contenu dans l'eau, ce qui le constitue acide nitrique.

Il résulte de tout ce qui vient d'être exposé, que l'azote est susceptible de prendre différentes modifications, suivant qu'il est plus ou moins

chargé d'oxigène ; lorsqu'il n'en contient que 68 sur 32, il reste dans l'état de gaz ; il n'est pas encore acide, c'est le gaz ou l'oxide nitreux ; s'il en contient 74 à 75 sur 25, il donne naissance à un acide liquide rouge, volatil et odorant, c'est l'acide nitreux ; enfin, s'il est combiné à l'oxigène, dans la proportion de 80.5 sur 19.5, c'est l'acide nitrique blanc.

On entendra facilement pourquoi l'acide nitrique brûle, enflamme et désorganise une foule de matières, telles que le charbon, le phosphore, les huiles, les substances métalliques, les matières animales, &c., si l'on se rappelle avec quelle facilité il perd son oxigène par le simple contact de la lumière ou du calorique, c'est que ses principes ont peu d'affinité ensemble. Il est également aisé de concevoir la formation naturelle de l'acide nitrique dans tous les lieux où il existe de l'oxigène et de l'azote à l'état solide et sur-tout liquide ; c'est ainsi, par exemple, qu'il se forme du salpêtre, lorsque des matières animales et végétales sont livrées à la putréfaction, et qu'elles sont en contact avec des substances calcaires ou alcalines. La présence de la matière calcaire ou alcaline, est une condition absolument nécessaire pour la formation de l'acide nitrique ; car sans elle il ne se développe que du carbonate d'ammoniaque ; elle apporte donc dans les matières animales une force qui détermine la combinaison de l'azote avec l'oxigène, tandis que, sans cela, les forces de l'hydrogène pour l'azote, celles de l'oxigène pour le carbone, et de l'acide carbonique qui en résulte pour l'ammoniaque, l'emportent sur les premières.

Dans le premier cas il se dégage du gaz hydrogène, et dans le second il s'échappe de l'acide carbonique ; car il y a plus de carbone qu'il n'en faut pour former l'acide carbonique nécessaire à la saturation de l'ammoniaque.

L'acide nitrique est très-utile en chimie pour former différens sels, pour dissoudre et séparer différens métaux les uns des autres : on s'en sert chez les orfévres, les jouailliers, les doreurs pour décaper la surface de l'argent ; dans les monnaies, pour séparer l'argent d'avec l'or ; chez les graveurs, pour graver sur les métaux ; chez les chapeliers, pour le secretage des poils, et les disposer au feutrage ; en pharmacie, pour la préparation de beaucoup de médicamens.

Des nitrates.

Après avoir exposé les propriétés les plus importantes de l'acide nitrique et de ses modifications, nous avons fait connaître ses combinaisons avec les alcalis et les terres.

Ces combinaisons portent le nom de *nitrates;* ils sont au nombre de sept; savoir, le nitrate de potasse ou salpêtre, le nitrate de soude, d'ammoniaque, de chaux, de magnésie, de baryte et d'alumine.

Caractères génériques des nitrates.

Les nitrates ont, 1.° une saveur fraîche et piquante; 2.° ils donnent du gaz oxigène par la chaleur, et laissent un résidu alcalin ou terreux; 3.° ils brûlent avec flamme beaucoup de corps combustibles lorsqu'on élève suffisamment leur température; 4.° enfin ils répandent des vapeurs blanches avec de l'acide sulfurique concentré.

Du nitrate de potasse.

Ce sel, ainsi que son nom l'exprime, est composé d'acide nitrique et de potasse; il existe dans la nature, mais en petite quantité, tantôt à la surface du sol, comme dans l'Inde, tantôt à la surface des murailles calcaires, aux voûtes de caves, sous des arceaux de ponts, &c. : on l'appelle dans le commerçe *nitre de houssage*, parce qu'on le ramasse avec des balais.

Le nitrate de potasse a une saveur fraîche et piquante; sa forme la plus ordinaire est celle d'un prisme à six pans, terminé par six faces irrégulières; quelquefois il se présente sous la forme de tables quarrées, dont les bords sont taillés en biseau; il affecte aussi, mais rarement, celle d'un dodecaèdre formé de deux pyramides hexaèdres unies base à base.

Le nitrate de potasse exposé au feu, est décomposé; les élémens de l'acide nitrique se séparent en se combinant au calorique qui les met à l'état de gaz: mais cette décomposition présente quelques circonstances qu'il faut faire remarquer ici. Rappelons d'abord que l'azote peut être dans différens états d'oxigénation; qu'il forme alors ou de l'oxide nitreux ou de l'acide nitreux, ou enfin de l'acide nitrique. On sait que l'acide nitreux a une certaine affinité avec la potasse: or, lorsque la chaleur agit sur le nitrate de potasse, elle commence par dégager la portion d'oxigène excédante à la constitution de l'acide nitrique; en sorte que le gaz oxigène que l'on obtient au commencement de l'opération, est parfaitement pur; mais lorsque

les 8 à 9 centièmes de l'oxigène qui entre dans la composition de l'acide sont passés, celui qui vient ensuite est mêlé de gaz azote, ce dont on peut s'assurer en fractionnant les produits, et en y mettant du phosphore, qui ne brûle pas sans les premières portions, tandis qu'il brûle dès que l'acide nitreux commence à se décomposer, parce qu'alors il passe du gaz azote.

Berthollet a obtenu de 100 parties de nitrate de potasse décomposé par le feu, 46 à 47 parties de gaz composé d'oxigène et d'azote.

L'attraction de la potasse pour l'acide nitreux s'oppose donc à ce que l'acide nitrique soit complétement décomposé au commencement de l'opération; et telle est la raison pour laquelle il passe à cette époque de l'air vital pur, ou presque pur.

En arrêtant la décomposition du nitrate de potasse à l'instant où le gaz azote commence à paraître, on forme du nitrite de potasse; aussi le résidu fait-il une vive effervescence avec l'acide nitrique, et répand des vapeurs rougeâtres, ce qui prouve que l'acide nitrique a été changé en acide nitreux.

Le nitrate de potasse décompose, à l'aide du calorique, plusieurs corps combustibles, tels que le soufre, le charbon, les métaux, les substances végétales et animales sèches.

Si l'on fait chauffer trois parties de nitrate de potasse et une partie de soufre, il se produit, dès que le mélange commence à rougir, une combustion vive; il se dégage beaucoup de gaz, dans lequel on trouve une petite quantité de gaz nitreux et du gaz azote: le résidu est du sulfate de potasse. Le soufre a donc, à une haute température, plus d'affinité avec l'oxigène que n'en a l'azote. On observe ici une différence sensible entre la nature du gaz obtenu et celui que fournit l'acide nitrique que l'on fait bouillir sur du soufre: cette différence tient à ce que, dans ce cas, le nitrate de potasse présente à l'acide sulfurique formé aux dépens de l'acide nitrique, une base avec laquelle il tend à s'unir avec beaucoup de force, ce qui augmente l'affinité du soufre pour l'oxigène, et favorise la décomposition complète ou presque complète de l'acide nitrique, tandis que dans l'autre cas le soufre n'y trouvant pas cette même base, il ne peut enlever d'oxigène à l'acide nitrique, que ce qui est excédant à la constitution du gaz nitreux.

C'est en raison de l'action du nitrate de potasse sur le soufre, qu'on l'emploie pour la fabrication de l'acide sulfurique en grand ; son usage a principalement pour objet de favoriser la combustion du soufre, en y développant du calorique : il est important de ne pas employer une trop grande quantité de ce sel, car quoique l'acide sulfurique formé par l'oxigène de l'acide nitrique, ne soit pas capable de saturer la même quantité de potasse, cependant la plus grande partie serait convertie en sulfate de potasse. La dose à laquelle on l'emploie est ordinairement d'un 10.e

Le charbon décompose avec beaucoup de rapidité le nitrate de potasse, lorsqu'on élève leur température : cette décomposition se fait avec tant de vélocité, qu'elle produit une détonation considérable et presque instantanée. Il se développe dans cette opération un grande quantité de gaz composé d'acide carbonique et d'azote.

D'après les proportions établies entre les principes de l'acide nitrique, du nitrate de potasse et de l'acide carbonique, 100 parties de nitrate de potasse doivent produire 39.55 d'acide carbonique et 6.90 de gaz azote, qui prennent tout-à-coup, en se développant, un volume peut-être trois cents fois plus grand que celui de la masse qui les a produits.

Quoique le gaz oxigène ait perdu beaucoup de calorique en se combinant à l'azote, et que l'acide nitrique lui-même en ait laissé échapper en s'unissant à la potasse, il en conserve cependant encore beaucoup, puisqu'il se produit une chaleur considérable pendant la détonation du nitrate de potasse avec le charbon, et que l'acide carbonique en garde une certaine quantité pour se mettre à l'état de gaz.

Lavoisier a déterminé, à l'aide du calorimètre, que 100 parties de salpêtre détonées avec la quantité de charbon nécessaire, laissent échapper une masse de calorique capable de fondre 1200 parties de glace; et en comparant cette quantité avec celle qui est dégagée de la même quantité de gaz oxigène libre, il a trouvé qu'il y avait environ 0,15 de différence, c'est-à-dire, que l'oxigène de l'acide nitrique du nitrate de potasse contenait 0,15 de calorique de moins.

Le nitrate de potasse mêlé à 0.15 de charbon et à 0.10 de soufre, forme la poudre à canon. On divise ces trois matières par l'action des pilons ou d'une meule : on en rapproche les molécules par l'effort d'une presse

presse ou du pilon qui a servi à les broyer, en y mêlant un peu d'eau; il en résulte une masse solide, qu'on laisse sécher légérement, et qu'ensuite on granule en l'écrasant sur un crible de peau ou de fil de cuivre, qui laisse passer les grains à mesure qu'ils se détachent. Lorsqu'on a divisé la masse de la poudre en grains de la grosseur convenable pour l'usage auquel on la destine, on la fait sécher au soleil, et on la renferme dans des barils pour la priver de l'humidité de l'air. On distingue deux espèces de poudre, la poudre de guerre et la poudre de chasse; la première est plus grosse et non lissée; la seconde est plus fine et lissée. Le lissage se fait en la mettant dans des tonneaux qui tournent sur leur axe au moyen d'une roue à eau. Cette préparation n'augmente pas la bonté de la poudre, elle la rend seulement moins altérable à l'air, et lui donne un coup-d'œil agréable. D'après ce qui a été exposé plus haut, on conçoit aisément les effets prodigieux que produit l'explosion de la poudre; c'est la combustion rapide du charbon et du soufre par l'oxigène de l'acide nitrique, et la production presque instantanée d'une grande quantité de gaz, qui occupent un volume extrêmement considérable, sur-tout à l'aide du calorique qui devient libre et qui augmente encore leur volume ordinaire.

Quoique le soufre ne produise pas de gaz permanent par son union avec l'oxigène, il donne cependant beaucoup d'énergie à la poudre, en dégageant sans doute de l'oxigène une grande quantité de calorique, et en accélérant conséquemment la combustion du charbon.

Le nitrate de potasse est décomposé par l'acide sulfurique; c'est le moyen qu'on emploie dans les laboratoires de chimie et de pharmacie pour se procurer l'acide nitrique: pour cela on met dans une cornue de verre ou de grès 100 parties de salpêtre pur et 0,75 parties d'acide sulfurique concentré; on adapte à la cornue un récipient dans lequel on met un peu d'eau pour y plonger un tube de sûreté; on ajuste sur ce récipient un tube courbé qui doit plonger par une de ses extrémités dans un flacon plein d'eau, afin de recueillir les vapeurs nitreuses: on chauffe la cornue par degrés, et on donne un bon coup de feu sur la fin de l'opération.

Si la cornue dont on se sert est de verre, il faut la mettre au bain de sable, car sans cela elle pourrait se briser.

Le nitrate de potasse distillé avec l'acide sulfurique, fournit environ les 0,43 de son poids d'acide nitrique légérement orangé.

Il pourra paraître singulier que dans cette expérience le nitrate de potasse donne un acide orangé, quoiqu'il y soit complétement saturé d'oxigène : on se rendra facilement compte de cet effet, en se rappelant que l'oxigène se sépare aisément de l'acide nitrique par le contact de la lumière ou d'une chaleur moyenne, et en se souvenant que l'acide nitrique a une affinité assez forte pour le gaz nitreux. C'est en effet en vertu d'une double affinité qu'une portion de l'acide nitrique est décomposée, l'une qui s'exerce entre le calorique, la lumière et l'oxigène; l'autre entre l'acide nitrique et l'oxide nitreux. Cette théorie est confirmée par le gaz oxigène qui se dégage sur la fin de la distillation de l'acide nitrique, et que l'on peut recueillir avec l'appareil pneumato-chimique, et par le gaz nitreux qui se sépare de l'acide coloré lorsqu'on le mêle avec de l'eau.

On suit, dans les arts, un autre procédé pour extraire l'acide nitrique du salpêtre : il consiste à mêler six parties de terre glaise qu'on a préalablement calcinée pour en chasser la plus grande partie de l'humidité, et à convertir les pyrites martiales dont elle n'est presque jamais exempte, en acide sulfurique, qui reste interposé entre les parties de la terre. On introduit ce mélange dans des espèces de cornues, nommées *cuines*, placées sur deux rangées, dans un fourneau alongé, appelé *galère ;* on y adapte des récipiens de la même matière et à-peu-près de la même forme, qu'on lute ensemble avec de l'argile. Lorsque les cornues ont été recouvertes, et qu'elles sont bien ajustées avec les récipiens, on allume le fourneau, on chauffe par degrés, et dès que les vapeurs rouges commencent à paraître, on délute les récipiens; on en retire le liquide qu'ils contiennent, que les ouvriers appellent *flegme ;* on les replace et on continue la distillation, jusqu'à ce qu'il ne passe plus de vapeurs. La décomposition du nitrate de potasse n'a pas lieu ici, comme par l'acide sulfurique, en raison d'une affinité plus grande de l'argile pour la potasse, mais par une double attraction; l'une qui s'exerce entre l'acide nitrique et le calorique; l'autre entre l'alumine et la potasse, avec laquelle elle forme une espèce de fritte demi-vitreuse. Il faut cependant avouer qu'il y a, dans cette opération, beaucoup d'acide nitrique décomposé, ce qui est prouvé par

les vapeurs rouges qui sortent à travers les luts. On a remarqué que la présence des pyrites favorisait singulièrement la décomposition du nitrate de potasse, car plus les argiles en contiennent, et plus on obtient d'acide, et à un degré de chaleur moins élevé. Le résidu de cette opération est appelé *ciment* des distillateurs d'eau-forte; il sert à plusieurs ouvrages de maçonnerie.

L'acide muriatique décompose aussi le nitrate de potasse, mais par un mécanisme différent de celui de l'acide sulfurique: ce n'est point en lui enlevant directement la potasse qu'il opère cette décomposition, c'est au contraire en attaquant l'acide nitrique dont il s'empare d'une partie de l'oxigène, d'où naissent l'acide muriatique oxigène et l'acide nitreux en vapeurs. Ainsi, à mesure que l'acide muriatique prend une partie de l'oxigène de l'acide nitrique, il passe à l'état d'acide nitreux; et comme celui-ci a moins d'affinité avec la potasse que l'acide muriatique, il en est chassé, et il se forme du muriate de potasse. Il faut observer que ces effets n'ont lieu qu'à l'aide de la chaleur, et qu'il faut employer beaucoup d'acide muriatique, parce qu'une partie se combine à l'oxigène, tandis que l'autre s'unit à la potasse. Il y a donc encore ici une double affinité.

Le nitrate de potasse contient par 100, d'après *Bergman*, 0,49 parties de potasse, 0,33 d'acide nitrique, et 0,18 d'eau.

D'après *Kirwan*, il contient 63 de potasse, 30 d'acide et 7 d'eau. Plusieurs autres analyses de ce sel, faites par différens chimistes, prouvent que les proportions établies par *Kirwan* s'approchent plus près de la vérité que celles de *Bergman*.

Ce sel est extrêmement utile dans les arts, dans la chimie et la pharmacie: les orfévres s'en servent pour purifier l'or et l'argent; on l'emploie pour la fabrication de la poudre, de l'acide sulfurique; on en retire l'acide nitrique, qui lui-même est d'un grand usage dans les arts et dans les sciences. Nous parlerons des procédés à l'aide desquels on l'extrait des matériaux qui le recèlent dans la nature, et de la manière dont l'acide s'y forme, lorsque nous traiterons du muriate de chaux.

Du nitrate de soude.

Le nitrate de soude ne se rencontre presque jamais dans la nature, il est donc le produit de l'art; cependant *Bowles* assure qu'il se trouve en Espagne.

Sa saveur est fraîche et piquante à-peu-près comme celle du nitrate de potasse, seulement un peu plus forte.

Sa pesanteur spécifique, suivant *Kirwan*, est 1,87.

Il attire légérement l'humidité de l'air, sur-tout si celui-ci est humide. Sa dissolubilité dans l'eau est très-grande; il en demande environ trois parties à la température moyenne de l'atmosphère; l'eau bouillante en dissout plus que son poids; il se présente ordinairement sous la forme d'un rhomboïde ou de prismes rhomboïdaux.

Il se comporte au feu de la même manière que le nitrate de potasse; ainsi il fournit d'abord du gaz oxigène pur, qui est ensuite mêlé de gaz azote, et il reste dans la cornue de la soude caustique.

Le nitrate de soude est décomposé par la potasse et la baryte; il se forme dans un cas du nitrate de potasse, et dans l'autre du nitrate de baryte, ce qui prouve que ces substances ont plus d'affinité avec l'acide nitrique que la soude.

Les acides sulfurique et muriatique font éprouver au nitrate de soude la même altération qu'au nitrate de potasse.

Mais il y a cette différence entre l'action de ces deux acides, que le premier s'unit immédiatement à la base du nitrate de soude, et que le second décompose préalablement l'acide nitrique, et le convertit en acide nitreux.

Le nitrate de soude est de peu d'usage dans la société, son utilité est presque bornée aux expériences chimiques.

Si ce sel se trouvait quelque jour abondamment, ce serait une grande richesse, car on en pourrait retirer la soude avec beaucoup de facilité.

Il est composé, suivant *Kirwan*, de 0,50 de soude, de 0,29 d'acide, et de 0,21 d'eau.

Il agit sur les matières combustibles comme le nitrate de potasse, cependant il ne les enflamme pas avec la même énergie, et ne produit pas avec elles des détonations aussi rapides: ainsi de la poudre fabriquée avec le nitrate de soude n'aurait pas autant de force que celle qui est faite avec le nitrate de potasse. Cependant il contient beaucoup plus d'oxigène lorsqu'il est sec que le nitrate de potasse, et d'une autre part la soude tient beaucoup moins à l'acide nitrique que la potasse. Pour bien connaître la

cause de cette différence, il serait nécessaire d'examiner avec plus de soin qu'on ne l'a fait encore, les circonstances qui accompagnent les combustions opérées par chacun de ces sels. Au reste, quand on parviendrait à fabriquer de bonne poudre avec le nitrate de soude, on ne pourrait pas s'en servir, 1.° parce que la nature ne nous l'offre pas en assez grande quantité, 2.° parce que ce sel attirant l'humidité de l'air, il serait difficile de conserver la poudre sans altération.

Du nitrate d'ammoniaque.

Le nitrate d'ammoniaque a la forme d'un prisme à six pans avec des pyramides à six faces; sa saveur est piquante et extrêmement vive; il est déliquescent, sur-tout dans l'hiver: on ne le trouve que rarement natif; cependant on dit l'avoir rencontré quelquefois dans les eaux mères du nitre, ce qui me paraît difficile à croire.

Si on le jette sur un tesson de porcelaine rouge, il déflagre en faisant entendre un bruissement assez considérable et en répandant une flamme jaunâtre très-vive.

En faisant cette expérience dans un appareil pneumato-chimique, il passe d'abord un peu d'eau, ensuite il fournit du gaz oxigène, enfin il détone avec beaucoup de vivacité.

La cause de cette singulière détonation a été expliquée pour la première fois par *Berthollet;* elle est aisée à entendre. L'acide nitrique est composé de 80,5 d'oxigène et 19,5 d'azote: l'ammoniaque est formée, suivant *Berthollet*, de 80,7 d'azote et de 19,3 d'hydrogène. Tant que la température n'excède pas certaines limites, l'équilibre persiste entre ces différens corps; mais dès qu'elle les outre-passe, les affinités quiescentes sont rompues; l'hydrogène de l'ammoniaque s'unit à l'oxigène de l'acide nitrique; il se forme de l'eau et il se dégage une grande quantité d'azote. Il est singulier qu'il se dégage toujours au commencement de cette distillation une certaine quantité de gaz oxigène, car l'oxigène et l'hydrogène sont dans ce sel, suivant le calcul de *Kirwan*, à-peu-près dans les rapports convenables pour former de l'eau. Le nitrate d'ammoniaque se dissout dans deux parties d'eau froide; une demi-partie d'eau bouillante suffit pour le dissoudre, aussi la plus grande partie de ce sel se sépare par le refroidissement de la dissolution.

La potasse, la soude, la chaux, la baryte, décomposent le nitrate d'ammoniaque en s'unissant à son acide, d'où résultent différens nitrates et de l'ammoniaque libre qui se manifeste par son odeur vive et pénétrante.

On pourrait donc extraire de l'ammoniaque de ce sel, comme on le fait avec le muriate d'ammoniaque et la chaux. L'acide sulfurique décompose le nitrate d'ammoniaque, il se forme du sulfate d'ammoniaque, et l'acide nitrique devient libre.

L'acide muriatique lui fait aussi éprouver une altération, mais dont les résultats sont différens: l'acide muriatique agit d'abord sur l'acide nitrique, auquel il prend une portion d'oxigène et le convertit en acide nitreux; il se forme donc de l'acide muriatique oxigène qui se volatilise à l'aide du calorique, et du muriate d'ammoniaque qui reste en dissolution dans l'eau.

On fait avec deux parties de nitrate d'ammoniaque et une partie d'acide muriatique une liqueur qui peut dissoudre l'or. Dans ce cas, la décomposition du nitrate d'ammoniaque a lieu d'une autre manière: l'oxigène de l'acide nitrique se porte immédiatement sur l'or; l'oxide d'or formé se dissout à mesure dans une portion de l'acide muriatique; il se dégage du gaz nitreux, et il reste dans la liqueur du muriate d'or et du muriate d'ammoniaque. En précipitant ensuite cette dissolution d'or avec un alcali fixe, on fait de l'or fulminant, ou *orate d'ammoniaque;* car non-seulement l'alcali décompose le muriate d'or, mais encore le muriate d'ammoniaque, de manière qu'à mesure que l'oxide d'or se sépare, il s'unit à l'ammoniaque, et forme la combinaison particulière dont on vient de parler.

100 parties de nitrate d'ammoniaque sont composées de 40 d'ammoniaque, de 46 d'acide nitrique et de 14 d'eau.

Il ne faut pas préparer ce sel dans des vases métalliques, et particulièrement de fer et de cuivre, parce qu'il les dissout facilement.

Du nitrate de chaux.

Le nitrate de chaux se trouve très-abondamment dans les anciens bâtimens qui ont été pendant long-temps habités par les hommes ou par les animaux; mais pour que cette substance puisse prendre naissance, il est nécessaire que les parois ou le sol de ces demeures soient formés, ou au

moins contiennent des matières calcaires : c'est pourquoi les sols des écuries, des étables, des colombiers, des bergeries, fournissent beaucoup de nitrate de chaux s'ils recèlent assez de carbonate calcaire pour recevoir l'acide nitrique, tandis qu'ils n'en fournissent pas du tout s'ils sont formés d'argile ou de silice pure.

La présence de la chaux est donc indispensable pour la formation de l'acide nitrique ; c'est en exerçant une attraction sur l'acide nitrique qu'elle favorise la combinaison de l'azote avec l'oxigène. Cela est si vrai, que jamais il ne se forme d'acide nitrique par tout où il n'existe pas de matière calcaire ou alcaline, lors même que les principes de l'acide nitrique y sont dans les dispositions les plus convenables à leur combinaison, c'est-à-dire, à l'état liquide.

Ainsi des matières animales qui, comme on sait aujourd'hui, jouissent éminemment de la propriété de former du salpêtre, abandonnées seules aux forces de la nature, ne fournissent que du carbonate d'ammoniaque, et point, ou presque point, de nitrate d'ammoniaque. Mais si au contraire on les mêle avec de la terre calcaire ou avec des substances végétales, il se forme alors du nitrate de chaux, et même du nitrate de potasse, puisque les végétaux contiennent une certaine quantité de cette substance alcaline.

Parmi les pierres, toutes ne sont pas également bonnes à la salpêtrisation ; en général les pierres qui méritent la préférence sont celles dans lesquelles les parties sont écartées, qui laissent entre elles beaucoup de pores par où l'air, les vapeurs et les liqueurs animales peuvent facilement pénétrer comme dans autant de tuyaux capillaires : c'est pour cette raison que la pierre calcaire du département d'Indre et Loire, et particulièrement de Bouré, se salpêtre si promptement et si complétement, parce qu'elle contient beaucoup de sable grossier qui y laisse beaucoup d'interstices : cette pierre a encore l'avantage de contenir dans la carrière une grande quantité d'eau, qui, en s'évaporant, laisse aussi beaucoup de petits tubes qui favorisent la salpêtrisation. Quoiqu'on ne puisse pas douter que toutes les parties de la pierre calcaire ne soient également propres à la salpêtrisation, on n'a cependant jamais trouvé de terre entièrement changée en salpêtre, ou *nitrate de chaux ;* on a reconnu qu'il y a un *maximum* de

salpêtrisation au-delà duquel l'opération s'arrêtait, mais qu'après avoir séparé par le lessivage cette matière saline, elle recommençait comme auparavant, et que l'on pouvait réduire ainsi toutes les parties d'une pierre qui en sont susceptibles, en nitrate de chaux. Il y a donc un point de saturation entre le sel formé et la pierre elle-même, où toute action cesse, si, par quelques circonstances naturelles ou artificielles, le salpêtre qu'elle contient ne lui est pas enlevé.

Le *maximum* de salpêtrisation ne passe pas, dans les cas les plus ordinaires, 4 à 5 pour cent dans les matériaux de meilleure qualité.

Si la saturation complète de la pierre met obstacle à une nouvelle formation de sel, on a remarqué au contraire qu'une petite quantité de cette matière favorisait et accélérait l'opération : aussi dans les pays où les salpêtriers ont de l'avantage à prendre par remplacement les matériaux salpêtrés, ils ont grand soin de laisser de place en place des pierres dans lesquelles la salpêtrisation est commencée. Ils appellent assez ingénieusement ces pierres des *levains salpêtriques* ; en effet, elles communiquent aux pierres voisines la propriété de se salpêtrer plus vîte, en se mettant avec elles en équilibre d'humidité et de salpêtre. Dans les édifices construits en pierre, la salpêtrisation ne s'élève le plus souvent qu'à 3 à 4 mètres, et ne passe jamais le premier étage. C'est ordinairement le milieu qui est le plus riche en salpêtre : la raison de ce fait est sensible ; c'est ordinairement de la partie inférieure que l'humidité, chargée de parties animales et végétales, monte et s'infiltre dans la pierre. Or, c'est dans cette partie que la salpêtrisation commence, et elle y est complète lorsque le haut n'a pas encore commencé ; mais dans les temps humides le sol se met en équilibre de salure avec les pierres les plus voisines, et elles ne peuvent conséquemment jamais acquérir qu'un très-léger degré de salpêtrisation, tandis que le milieu est entièrement saturé.

On a remarqué depuis long-temps que le contact de l'air était nécessaire à la salpêtrisation, et cela est prouvé par l'observation journalière ; on a vu que des pierres de trois à quatre décimètres d'épaisseur, par exemple, n'étaient souvent salpêtrées que jusqu'à la profondeur de 10 à 12 centimètres, et par le seul côté qui avait été baigné par l'air.

L'humidité influe aussi singulièrement sur les progrès de cette opération naturelle;

naturelle; aux lieux élevés et secs, il n'y a point, ou presque point de salpêtrisation; dans les endroits bas, où l'air est humide, où il ne circule point trop promptement, elle est au contraire très-facile et très-abondante. Il y a cependant certaines limites observées, car trop d'humidité nuit.

Les chimistes ont pensé avec raison que la présence des matières animales et végétales était nécessaire à la salpêtrisation; mais est-elle exclusivement nécessaire? Ne se forme-t-il jamais de nitrate de chaux que là où sont ces substances? Beaucoup de faits militent en faveur de cette opinion, et sur-tout la présence du sel marin, qui accompagne presque constamment le salpêtre calcaire. Cependant je crois qu'il y a des circonstances dans lesquelles le salpêtre prend naissance sans le concours des matières animales; et telles sont celles où des rochers très-élevés, éloignés de toute habitation animale, des tours d'une hauteur prodigieuse, sont salpêtrés presque jusqu'au sommet et seulement à l'extérieur. Ainsi, sans nier que les débris des corps organiques ne contribuent et ne favorisent même singulièrement la salpêtrisation, je suis presque convaincu qu'elle a également lieu par la seule force qu'exerce la matière calcaire sur les élémens de l'air, dont elle détermine la combinaison dans les rapports propres à former l'acide nitrique.

Quelques personnes croient que l'eau est décomposée pendant la salpêtrisation; que son oxigène s'unit à l'azote des matières animales pour former l'acide nitrique; que son hydrogène se dégage chargé de carbone et de soufre, et que c'est principalement sous ce rapport que l'eau est utile dans cette opération. Il ne paraît pas que ce raisonnement soit conforme aux faits, car 1.° la salpêtrisation pourrait avoir lieu sans la présence de l'air, et les matériaux salpêtrés devraient l'être autant au centre qu'à la surface, ce qui est contraire à l'observation; 2.° pendant la putréfaction des matières animales il devrait se former du nitrate d'ammoniaque, et c'est au contraire du carbonate d'ammoniaque qui se développe. Il me paraît donc plus naturel de penser, jusqu'à ce que le contraire soit démontré par des expériences directes, que c'est l'oxigène des matières végétales et animales, concurremment avec l'air atmosphérique, qui met l'azote à l'état d'acide nitrique.

On a également pensé que l'acide carbonique, dans le carbonate de

chaux, et l'acide sulfurique, dans le plâtre, étaient décomposés par l'azote des matières animales, et que telles étaient les raisons pour lesquelles les plâtres prenaient, dans un cas, en se salpêtrant, une couleur noire, et, dans l'autre, une odeur sulfureuse.

Je crois que ceci demande confirmation, car beaucoup de faits, qu'il serait trop long de rapporter ici, semblent contraires à cette proposition.

J'ai fait quelques essais sur le plâtre salpêtré de Paris, qui m'ont prouvé que le carbonate de chaux, qui accompagne le sulfate de chaux, est le seul qui se salpêtrait; que le nitrate de chaux était toujours, dans cette matière, en raison inverse du carbonate de chaux; que plus le plâtre contenait de ce dernier, et plus il fournissait, à la longue, de nitrate de chaux; qu'enfin le plâtre fin, lorsqu'il n'est pas infiltré par des liqueurs alcalines ou calcaires, ne se salpêtre point. Conséquemment, je ne crois pas que l'acide sulfurique du plâtre, et encore moins l'acide carbonique de la pierre calcaire, soient décomposés par l'azote des matières animales.

Les chimistes fondent leur sentiment, à cet égard, sur ce que la chaux vive ne peut servir à la salpêtrisation; mais cela tient à ce que la chaux a une action sur les principes des matières animales, dont elle rompt l'équilibre et les force de se réunir de manière à former de l'ammoniaque et une espèce d'huile qui se combine avec la chaux elle-même; ainsi, dès que l'azote est entré dans la composition de l'ammoniaque, il ne peut plus servir à la salpêtrisation.

Il résulte de ce qui vient d'être exposé, que cinq conditions sont nécessaires pour favoriser, accélérer et augmenter la salpêtrisation; la première, c'est la présence des matières animales, où l'azote se trouve plus disposé que par tout ailleurs à se combiner à l'oxigène; la deuxième, l'accès de l'air atmosphérique; la troisième, la terre calcaire, ou toute autre matière alcaline; la quatrième, un certain degré d'humidité; la cinquième enfin, une température moyenne.

Quelques-unes de ces conditions ne sont pas de rigueur; telles sont, par exemple, le contact de l'air et tel ou tel degré dans la température, car il est possible qu'il se forme du salpêtre par l'influence de l'oxigène naturellement contenu dans des mélanges de matières animales et calcaires, et que ce sel s'y forme depuis quelques degrés au-dessous de zéro jusqu'à

30 ou 40 au-dessus. Mais il est constant que ce sont des auxiliaires très-avantageux. En effet, il est vraisemblable que la quantité d'oxigène contenu dans les corps organiques ne suffit pas pour saturer l'azote, et qu'alors la masse de salpêtre est moins grande ; il paraît également démontré qu'une température de 15 à 25 degrés facilite beaucoup cette opération, et qu'en général il se forme plus de salpêtre dans les régions chaudes que dans les pays froids.

Si l'eau est nécessaire à la formation du salpêtre, ce n'est pas en lui fournissant quelque principe, c'est comme exerçant sur le nitrate de chaux une action qui paraît d'abord éloignée, mais qui n'en est pas moins réelle ; c'est en le dissolvant, en le répartissant dans toutes les parties de la matière calcaire, en favorisant enfin la combinaison des principes de l'acide nitrique, et conséquemment celle de ce dernier avec les matières terreuses.

L'art de former des nitrières artificielles consiste donc à mélanger des matières animales et végétales avec des terres calcaires, divisées en petits fragmens, de leur faire présenter les contacts les plus multipliés possible avec l'air, en en formant des murs de 3 à 4 mètres d'élévation et de 25 à 30 centimètres d'épaisseur, avec l'attention de ne pas trop presser ces matières les unes contre les autres, afin qu'elles conservent un grand nombre d'ouvertures par lesquelles l'air puisse s'introduire et se combiner. Lorsque la terre a des molécules trop fines, et qu'elle fait facilement pâte avec l'eau, il est bon d'y mêler un peu de sable, de cendres neuves, ou lessivées, ou encore des *détritus* de matières végétales, comme de la sciure de bois, des balayures de maison, &c.

Pour imbiber les matières devant être salpêtrées, il est avantageux, lorsque les circonstances le permettent, de se servir d'eaux qui contiennent elles-mêmes quelques-uns des principes du salpêtre, comme des eaux de fumier, des eaux de vaisselle, de lessive, de l'urine, des excrémens, &c.

A défaut de ces liqueurs, on pourrait employer de l'eau dans laquelle on aurait fait fondre un peu de muriate de soude ; ce sel, en retenant long-temps et fortement l'humidité, favorise d'une part la salpêtrisation, et, de l'autre, dispense d'arroser aussi souvent.

L'influence du muriate de soude, dans la salpêtrisation, a été remarquée

depuis long-temps par les salpêtriers, et son effet est si prompt, que quelques-uns croient, mais faussement, qu'il se change en salpêtre.

J'ai vu beaucoup de ces artistes jeter sur les matériaux lessivés, et déposés sous des angars, une partie du sel qu'ils avaient retiré pendant leurs cuites; et, en remuant de temps en temps ces dépôts, y retrouver, au bout d'un an ou dix-huit mois, autant de salpêtre que la première fois.

Il ne faut pas cependant que la quantité de cette matière soit trop considérable, car la terre s'en saturerait et ne pourrait plus se salpêtrer, 3 à 0.004 suffisent.

Propriétés physiques du nitrate de chaux.

Le nitrate de chaux a une saveur âcre très-piquante, bien reconnaissable pour tous ceux qui l'ont éprouvée. C'est le seul indice qu'aient les salpêtriers pour reconnaître les terres salpêtrées, et il est rare qu'ils s'y trompent; il en est même qui ont une telle habitude, qu'ils peuvent estimer, à très-peu près, les rapports de la nature saline avec ceux de la terre.

La première opération qu'ait à faire le salpêtrier, c'est la dégustation des terres; lorsqu'il les trouve suffisamment salpêtrées pour être exploitées avec avantage, il les enlève, et leur fait subir les opérations suivantes.

Comme le nitrate de chaux est très-soluble dans l'eau, et que les terres où il est contenu ne le sont pas, il est évident que le procédé le plus simple est de les lessiver.

Lessivage des terres.

Pour cela, on dépose les terres dans des tonneaux disposés sur deux rangées, et placés sur des chantiers; on verse de l'eau par-dessus jusqu'à ce qu'elles en soient recouvertes de la hauteur d'un décimètre. Lorsque l'eau a séjourné pendant cinq à six heures sur ces terres, on la laisse écouler par des ouvertures pratiquées au fond des tonneaux, d'où elle tombe dans un demi-canal qui la conduit dans une recette commune, enfoncée dans la terre.

Dans un atelier bien monté, il doit y avoir au moins trois doubles rangées, composées chacune de quarante tonneaux.

La première lessive n'étant ordinairement pas assez chargée de salpêtre pour être brûlée avec profit, on la repasse sur une seconde bande de terre neuve, et même une troisième, si elle n'a pas acquis, par la

seconde, au moins dix à douze degrés à l'aréomètre de *Baumé*, ce qui annonce environ dix à douze livres de matière saline dans un quintal de liqueur.

Les terres qui n'ont été lavées qu'une fois, ne sont pas entièrement dépouillées des sels qu'elles contiennent; l'eau qu'elles retiennent en garde, à proportion, autant que celle qui s'est écoulée : ainsi, en supposant, comme cela arrive souvent, qu'il reste dans la terre la moitié de l'eau qu'on y a mise, on n'en aura séparé que la moitié du salpêtre; il est donc nécessaire, pour en tirer tout le parti possible, de la lessiver plusieurs fois avec de nouvelle eau; la seconde, la troisième, et même la quatrième lessive sont appelées petites eaux; elles sont beaucoup trop faibles pour être évaporées; on les repasse sur des bandes qui n'ont été lessivées qu'une fois, et même sur des terres neuves, si elles ne sont pas assez fortes. Lorsque les derniers lessivages ne donnent plus à l'aréomètre qu'un quart de degré, on vide les tonneaux pour les remplir de nouvelles terres.

On rassemble toutes les eaux de cuite dans de grandes cuves appelées *cuves de saturation*, parce que c'est là où se fait la décomposition du nitrate de chaux par le moyen d'une dissolution de potasse du commerce qu'on y mêle.

La saturation des eaux de cuite est l'opération la plus délicate de l'art, et celle qui demande le plus d'attention de la part du salpêtrier, pour varier les quantités de potasse suivant la force et la nature des ces eaux; il y a là un milieu difficile à saisir, en-deçà et en-delà duquel il est presque également dangereux de rester : on conçoit aisément, en effet, que si la potasse n'est pas assez abondante, il reste une partie du nitrate de chaux non décomposé, qui nuit à la cristallisation du véritable salpêtre; qu'au contraire, si on en a trop ajouté, le muriate de chaux qui accompagne constamment le nitrate calcaire, est décomposé.

Malheureusement il n'y a point de règle certaine pour connaître le véritable point de saturation, c'est l'habitude qui conduit l'ouvrier dans cette opération; mais, en général, il vaut mieux demeurer en-deçà que de passer au-delà; ce dont on s'assure en mettant un peu de la lessive dans un verre, et en y versant quelques gouttes de dissolution d'alcali : s'il ne s'y produit qu'un léger nuage, la saturation est faite. La saturation étant

faite, on laisse déposer les boues, et on fait couler la liqueur claire dans la chaudière de cuite, pour être soumise à l'évaporation.

De la cuite des eaux.

Pendant la cuite des eaux il se présente plusieurs phénomènes intéressans; la liqueur forme d'abord, aux premiers bouillons, une grande quantité d'écume blanche qui est due à des parties de matières animales et végétales muqueuses; bientôt elle se trouble et devient blanche comme du lait, par une portion de carbonate de chaux et de magnésie qu'elle tenait en dissolution, à l'aide d'un excès d'acide carbonique que la chaleur volatilise.

Ce sont ces matières terreuses qui forment ce que les salpêtriers appellent *les boues*. Il est essentiel pour la conservation de la chaudière, que ces boues ne se déposent point au fond; aussi suspend-on au milieu de la liqueur une petite chaudière de fonte, ou un panier garni de toile; et comme l'ébullition dirige le mouvement des eaux de la circonférence vers le centre, la plus grande partie de la terre se précipite dans le vase qui y est suspendu. De temps en temps on retire la chaudière, à l'aide d'une corde qui glisse sur une poulie attachée au plancher, pour vider les boues.

A mesure que l'évaporation consume l'eau dans la chaudière, il en arrive de nouvelle d'un bassin d'évaporation placé sur le même fourneau du côté de la cheminée, et qui est échauffée par la chaleur de la fumée, qui s'échapperait, sans cela, en pure perte.

L'écoulement de l'eau du bassin dans la chaudière, a deux objets très-utiles, l'un, l'économie du combustible, puisqu'elle arrive presque au degré de l'ébullition et n'arrête point l'évaporation; l'autre, le remplissage de la chaudière, de manière que la liqueur reste constamment au même point: pendant le progrès de la cuite, lorsque l'eau a acquis vingt à vingt-deux degrés de l'aréomètre, il se sépare du muriate de soude ou sel marin, qu'on recueille également dans le panier placé, comme il a été dit plus haut, au milieu de la liqueur.

Lorsqu'on a une chaudière contenant environ trois mille livres d'eau, comme cela a lieu dans les grands ateliers, il est nécessaire d'avoir une quantité de lessive suffisante pour entretenir, sans interruption, l'évaporation, et qu'à la fin la chaudière soit presque pleine d'eau cuite, bonne à cristalliser,

On reconnaît que la cuite est assez avancée, lorsqu'en en mettant une goutte sur un morceau de fer froid, elle se fige, et présente la forme d'un globule blanc et solide; alors on arrête le feu, on laisse reposer la liqueur pendant vingt-quatre heures, afin que les matières étrangères qui y étaient suspendues par le mouvement de l'ébullition, se déposent. Au bout de ce temps, on puise la liqueur avec de grandes cuillers, on la met dans des vases de cuivre appelés *poêlettes ;* en refroidissant elle abandonne la portion de sel tenue en dissolution à la faveur du calorique; cette quantité est considérable, puisqu'à froid il demande sept parties d'eau, et qu'à chaud il en exige à peine une partie; ainsi, par le refroidissement il doit s'en séparer au moins les $\frac{6}{7}$ ou à-peu-près les 0.86. Comme les poêlettes ont une grande contenance, il faut plusieurs jours pour que la cristallisation soit complète; car non-seulement il est nécessaire que la température diminue jusqu'au degré convenable aux molécules salines pour s'unir, mais encore que l'air enlève le calorique que chaque molécule de sel laisse échapper, en se combinant avec les autres, ce qui est très-long. Au reste, ce temps est subordonné à la température extérieure; en été, la cristallisation se fait moins promptement qu'en hiver.

Lorsque la cristallisation est achevée, on décante la liqueur qui surnage la masse saline, et on pose ensuite les poêlettes sur leur bord, les unes contre les autres, pour qu'elles se soutiennent et que le salpêtre s'égoutte; l'eau mère tombe dans un demi-canal de bois qui la porte dans une recette en bois ou en pierre. Cette eau mère contient encore près du sixième de son poids de salpêtre; de plus, du nitrate de chaux, de magnésie, du muriate de soude, de chaux et de magnésie; on la mêle avec les eaux de cuite qui doivent être brûlées dans l'opération suivante.

Il arrive une époque à laquelle les eaux mères sont tellement chargées de muriate de chaux et de magnésie, qu'elles sont plutôt nuisibles qu'utiles à la cuite, parce qu'elles la graissent, c'est-à-dire, quelles s'opposent à la cristallisation du véritable salpêtre; en conséquence, les uns les travaillent à part; ils commencent par en faire un essai en petit, en saturant la liqueur de potasse, et par la quantité de salpêtre qu'ils obtiennent, ils calculent s'il y aura du bénéfice à les traiter ainsi.

Les autres les étendent de cinq à six parties d'eau et les passent sur des

cendres pour les dégraisser ; ils produisent le même effet que ceux qui les traitent par la potasse.

Les autres enfin les jettent sur des matériaux salpêtrés, ou lessivés, pour les faire salpêtrer plus promptement.

Il en est quelques-uns qui les vendent aux distillateurs d'eau forte, pour en retirer l'acide.

De l'essai du salpêtre.

Les salpêtres que les salpêtriers livrent dans les magasins de la République, contiennent encore beaucoup de sels étrangers, parce qu'il leur est défendu de les purifier par des opérations ultérieures. Comme cette substance saline doit être très-pure pour la fabrication de la poudre et pour plusieurs autres usages importans, on la soumet à une suite de travaux pour l'amener à cet état.

Les salpêtres bruts livrés aux raffineries, étant plus ou moins purs, on a cherché une méthode de reconnaître exactement la quantité de matières étrangères qu'ils contiennent, afin de rendre la justice due aux travaux et aux soins des salpêtriers, et pour éviter les fraudes de la mauvaise foi, qui pourrait y mêler exprès des corps étrangers.

Voici qu'elle est cette méthode ingénieuse ; elle est due au citoyen *Riffault*, commissaire des poudres et salpêtres au département d'Indre-et-Loire.

On prend cent parties de salpêtre brut, on verse par-dessus cent vingt-huit parties d'une dissolution saturée de salpêtre de trois cuites ; on laisse macérer pendant trois à quatre heures, en ayant soin d'agiter le mélange de temps en temps ; ensuite on décante la liqueur, on la remplace par soixante-quatre parties de nouvelle dissolution, et l'on décante, comme la première fois, au bout d'un quart d'heure. Alors on met le salpêtre égoutter sur des papiers brouillards, afin d'en séparer la portion de dissolution qui mouille le sel, et qu'elle n'ajoute point à la masse ; ensuite on le fait dessécher au feu dans des capsules de verre, on le pese, et on voit la diminution qu'il a éprouvée. Mais comme il peut y avoir aussi dans le salpêtre brut quelques matières insolubles, on le dissout dans l'eau ; et s'il contient de la terre, elle reste ; et après l'avoir lavée et séchée on en déduit le poids de celui du salpêtre. Il résulte des observations multipliées des raffineurs, que

que les salpêtres bruts déchoient par ce moyen de vingt-cinq à trente pour cent.

Cette opération est fondée sur ce principe, qu'une dissolution de salpêtre pur ne peut plus dissoudre du même sel, si sa température ne s'élève pas; mais qu'elle peut dissoudre du sel marin, du nitrate, et du muriate de chaux, sels qui existent constamment dans le salpêtre brut; de-là il est évident que lorsqu'on met sur ce sel une dissolution saturée de nitrate de potasse, on n'enlève exactement que les sels étrangers au véritable salpêtre.

Il est très-important que la température du lieu où l'on travaille ne change pas pendant l'opération, car si elle diminuait, la dissolution déposerait une portion de salpêtre qui serait au profit du salpêtrier, si elle s'élevait au contraire, la propriété dissolvante de la dissolution augmentant dans la même proportion, elle prendrait une nouvelle quantité de salpêtre, qui alors serait au détriment du salpêtrier.

Du raffinage du salpêtre.

Après avoir rendu, par l'essai précédent, la justice due au travail du salpêtrier, et assuré la marche et la responsabilité du commissaire des salpêtres, en déterminant la véritable quantité de cette substance saline livrée à la République, on la soumet à l'opération du raffinage.

1.er Procédé

On suit plusieurs procédés dans les différentes raffineries. Par le premier, on dissout dans l'eau bouillante la totalité du salpêtre brut; on mêle à la dissolution trois à quatre livres de potasse par cent, afin de décomposer le nitrate de chaux que les salpêtriers ont laissé dans leur brut; ensuite on colle, on fait bouillir et l'on écume. En supposant, comme cela se rencontre le plus communément, que le muriate de soude soit dans le salpêtre brut, dans la proportion de 0.25, il faudrait employer cent pour cent d'eau pour dissoudre complétement ce salpêtre, puisque le sel marin demande quatre fois son poids de ce liquide pour se dissoudre, et que la dissolution de sel marin peut se charger de la même quantité de salpêtre pur que l'eau simple. Ainsi, dans la dissolution de cent parties de salpêtre brut, il y aura 0.75 de salpêtre, et 0.25 de sel marin, et autres sels déliquescens.

L'on conçoit que si l'on met ensuite cette dissolution en cristallisation,

le sel marin restera en dissolution, puisqu'il est aussi dissoluble dans l'eau froide que dans l'eau chaude; mais le nitrate de potasse étant environ sept fois moins dissoluble à froid qu'à chaud, il s'en séparera, par le refroidissement, environ 0.61 sur 0.75. Mais, pour avoir une plus grande quantité de salpêtre par la première cristallisation, on réduit l'eau environ aux 0.60 de son poids par l'évaporation; il se dépose, pendant cette opération, 0.10 de sel marin, que l'on recueille à mesure qu'il se dépose au fond de la chaudière; le nitrate de potasse ne se sépare pas de la même manière, parce que 0.60 d'eau peuvent dissoudre, à chaud, 0.80 de salpêtre; et comme il n'y en a que 0.75 dans cent, on voit qu'elle n'en est pas encore saturée. Ainsi, par la première cristallisation, on aura 0.67 du salpêtre brut employé, et il ne restera dans l'eau qu'environ 0.07 à 0.08 de ce sel, et environ 0.15 de muriate de soude et de muriate calcaire.

Il est rare cependant que, dans la première cristallisation du raffinage, le salpêtre, qu'on appelle *de seconde cuite*, ne retienne pas quelques atomes de sel marin, que la liqueur, par l'évaporation spontanée à l'air, dépose sur le salpêtre cristallisé.

En conséquence, on le redissout de nouveau dans 0.80 de son poids d'eau; on lui fait jeter quelques bouillons; on l'écume et on le met en cristallisation. Cette fois, tout le sel marin reste en dissolution dans l'eau mère, et le salpêtre est pur; on le nomme alors salpêtre de trois cuites. On traite ensuite les eaux mères de la première et de la seconde cristallisation dans une chaudière particulière, en y ajoutant encore quelques portions de potasse, si cela est nécessaire; on fait évaporer la liqueur; on ramasse le muriate de soude qui se sépare, et lorsque l'évaporation est assez avancée, on la met à cristalliser; le sel qu'elle fournit est purifié de nouveau, absolument comme le salpêtre brut. Après un certain nombre de raffinages, les eaux mères qui restent sont abandonnées.

On peut les employer pour en retirer une espèce d'eau régale, dont on pourrait se servir dans plusieurs opérations des arts; elles pourraient également servir à faire du sel ammoniac, en y mêlant le produit aqueux des *détritus* de matières végétales et animales distillées, comme la tourbe, le charbon de terre, &c. &c. On peut également en retirer la magnésie,

ainsi que l'a indiqué *Bergman*, dans une dissertation insérée dans le Ve volume de ses Opuscules.

Le second procédé ne diffère du premier, qu'en ce qu'on n'ajoute au salpêtre brut que la quantité d'eau nécessaire seulement pour dissoudre à chaud le nitrate de potasse qu'il contient; ainsi, au lieu de mettre cent pour cent d'eau et plus, comme on le fait dans l'autre procédé, on n'en met que 56 ou 0.60; par ce moyen, à l'aide de la chaleur, on dissout tout le salpêtre pur, et il n'y a que 14 à 0.15 de sel marin de dissous, et les 0.11 de ce sel non dissous sont séparés avec des cuillers. L'on voit donc que, par ce moyen, on n'a que soixante parties d'eau à évaporer, et conséquemment une économie de presque moitié du combustible.

2.e Procédé.

Le reste de l'opération se fait comme dans la première.

Le troisième procédé est fondé sur ce que le sel marin et les sels déliquescens sont plus dissolubles à froid que le nitrate de potasse; en conséquence, on met dans des caisses de bois le salpêtre brut; on verse par-dessus 1.2 d'eau; on agite le mélange pendant quelque temps, et on lâche l'eau par des robinets : le sel restant dans les cuves est ensuite dissous dans la quantité d'eau chaude nécessaire, et on le fait cristalliser; au lieu de laisser le salpêtre prendre en masse, comme dans les procédés précédens, on agite la dissolution, afin d'obtenir le salpêtre sous la forme de petits grains, ce qui abrège l'opération de la division qu'on lui fait subir dans la fabrication de la poudre.

3.e Procédé.

Il est bien sensible que cette méthode fournit une beaucoup plus grande quantité d'eaux à évaporer, et qu'elle demande infiniment plus de combustibles pour les réduire. En effet, par le premier lavage, on a cent parties d'eau qui retiennent en dissolution vingt-cinq à trente parties de sels étrangers au salpêtre, et environ quinze à seize parties de celui-ci; l'eau mère de la cristallisation contient encore environ seize parties de salpêtre, en sorte qu'on a deux cents parties d'eau à évaporer, et l'on n'obtient que 0.51 de salpêtre brut, tandis que, dans le deuxième procédé, l'on n'a que cent-vingt-trois parties d'eau, et l'on obtient cinquante-une parties de salpêtre. Si l'on ajoute à cela la célérité des opérations,

on ne balancera pas à préférer le deuxième procédé au lavage à froid.

Telles sont en abrégé les différentes opérations que l'on fait sur le salpêtre brut, pour l'amener à l'état où il est nécessaire qu'il soit pour pouvoir servir à une foule d'opérations très-utiles des arts, et particulièrement à la fabrication de la poudre à canon.

Du Nitrate de baryte.

Le nitrate de baryte a été encore peu examiné par les chimistes; sa saveur est piquante et styptique comme les sels métalliques : sa forme est ordinairement celle d'un octaèdre particulier. On prépare ce sel en décomposant le sulfure de baryte par l'acide nitrique, ou en saturant cet acide avec du carbonate de baryte naturel ou artificiel.

Il demande au moins dix à douze parties d'eau froide pour se dissoudre; l'eau chaude en dissout beaucoup plus, de manière que la plus grande partie se cristallise par le refroidissement.

Exposé à l'action du calorique, il se décompose, fournit du gaz oxigène mêlé de gaz azote, dans les proportions où ils sont dans l'acide nitrique; il se forme cependant quelques vapeurs d'acide nitreux, en sorte que l'air doit être un peu plus pur que si l'acide était complétement décomposé.

Cette opération qui, je crois, n'a été faite par personne, m'a fourni la baryte dans un degré de pureté tel qu'on ne peut l'obtenir par les procédés ordinaires.

Dans cet état, elle a une couleur grisâtre, une saveur caustique beaucoup plus énergique que celle de la chaux. L'eau dissout à froid 0.04 de son poids de cette terre. Sa dissolution, exposée à l'air, présente une pellicule comme l'eau de chaux; elle se trouble par l'air expiré de la poitrine, et forme un précipité très-abondant par l'acide sulfurique.

Cette dissolution réduite au quart de son volume par l'évaporation dans des vaisseaux fermés, ne se trouble point, mais elle fournit par le refroidissement, de très-beaux cristaux transparens, de plusieurs centimètres de long. Ces cristaux, exposés à l'air, s'effleurissent et acquièrent la propriété de faire effervescence avec les acides. C'est une chose assurément très-remarquable que la grande dissolubilité et la facile cristallisabilité de

la baryte ; elle menera sans doute, quelque jour, à des connaissances plus exactes sur la nature de cette substance intéressante.

Cette terre, exposée à l'air, se réduit en une poussière blanche extrêmement fine, qui occupe au moins cinq à six fois son premier volume.

Lorsqu'on met quelques gouttes d'eau sur cette terre, aussitôt elle s'échauffe beaucoup, répand des vapeurs, et se réduit en une poussière d'une blancheur éclatante, qui occupe au moins cinq à six fois plus de volume. Si l'on met assez d'eau pour en faire une pâte, on la voit blanchir et s'élever à vue d'œil ; mais elle prend, en refroidissant, la dureté de la pierre.

C'est donc un très-bon moyen d'obtenir la baryte pure ; il doit être préféré à celui que l'on suit ordinairement en calcinant le carbonate de baryte, dont on ne peut jamais séparer entièrement l'acide carbonique.

Le nitrate de baryte n'est pas décomposé par les terres ni par les alcalis ; mais une foule de sels le décomposent, tels que les sulfates, les carbonates, &c. Plusieurs acides le décomposent aussi ; l'acide sulfurique, l'acide oxalique et tartareux sont de ce nombre.

Ce sel est utile pour reconnaître la présence de l'acide sulfurique.

On peut s'en servir pour séparer cet acide, qui se trouve quelquefois dans l'acide nitrique, et qui empêche de l'employer à plusieurs usages importans.

J'ai trouvé que le nitrate de baryte est composé de

Baryte	0.50.
D'acide nitrique	0.38.
D'eau	0.12.
	1 00.

Du nitrate de Magnésie.

Le nitrate de magnésie se rencontre quelquefois natif, mais toujours en petite quantité. Ce sel a une saveur piquante, qui a quelque analogie avec celle du nitrate de chaux ; il ne demande tout au plus qu'une demi-partie d'eau pour se dissoudre ; il cristallise par le refroidissement, ou même par l'évaporation de l'acide à la chaleur du soleil ; ses cristaux ont la forme de prismes à quatre faces obliques, tronqués au sommet ; le plus

souvent il se présente en aiguilles, qui, en s'unissant les unes aux autres, se masquent réciproquement, et donnent naissance à des masses informes.

Ce sel est déliquescent, sur-tout en hiver.

Exposé au feu dans un appareil fermé, il donne d'abord quelques bulles de gas oxigène, et des vapeurs d'acide nitreux : mais bientôt l'acide nitrique passe sans décomposition, et la magnésie reste pure dans la cornue. La décomposition du nitrate de magnésie exige peu de chaleur, ce qui indique que ses élémens n'ont pas entr'eux une très-grande affinité ; cela prouve aussi que la magnésie ne tend pas à s'unir à l'acide nitreux, comme la chaux, la baryte, &c.

Ce sel est décomposé par la potasse, la soude, la chaux, la baryte, et en partie par l'ammoniaque : dans ces cas il se dépose de la magnésie pure, et il se forme des nitrates qui restent en dissolution ; mais avec l'ammoniaque, c'est du nitrate ammoniaco-magnésien, dont les propriétés ont été examinées par le citoyen *Fourcroy*. (*Mém. de l'Acad.*) Il est aussi décomposé par l'acide sulfurique et muriatique, absolument comme le nitrate de potasse. (*Voyez ce sel.*)

Cent parties de nitrate de magnésie contiennent, suivant *Bergman*,

De magnésie	27.
D'acide nitrique	43.
D'eau	30.
	100.

Mais il ne faut pas trop compter sur cette analyse, ainsi que l'avoue *Bergman* lui-même ; car il n'est pas possible de lui enlever l'eau de cristallisation sans en séparer en même-temps une partie de l'acide nitrique ; les proportions établies entre les principes de ce sel, ne sont donc qu'approximatives.

Du nitrate d'alumine.

Ce sel n'est presque pas encore connu ; on sait seulement que l'acide nitrique dissout l'alumine ; que cette combinaison est susceptible de cristalliser en lames ou feuillets ductiles et de peu de consistance ; qu'une chaleur médiocre la décompose et en sépare l'acide nitrique sans décom-

position ; enfin, que tous les alcalis et les terres les décomposent, ainsi que plusieurs acides.

Ce sel est toujours légérement acide, quelque quantité d'alumine que l'on emploie.

Telles sont les connaissances qui ont été présentées aux élèves sur la nature et les propriétés de l'acide nitrique et des nitrates ; on aurait pu y joindre encore beaucoup d'autres faits, mais les bornes qui nous ont été prescrites ne permettent pas plus d'extension, sans emprunter des autres parties de la chimie.

De l'Acide muriatique, muriatique oxigéné, et de leurs combinaisons.

L'acide muriatique, appelé autrefois *acide marin*, *esprit de sel*, *acide du sel*, est un liquide blanc, d'une saveur aigre, d'une odeur particulière, que les uns ont comparée à l'odeur du safran, et les autres à celle des pommes de reinette. Les chimistes anciens avaient donné à cet acide, pour caractère distinctif, d'avoir une couleur de citron ; mais depuis que la chimie possède des instrumens plus exacts, on a reconnu qu'il devait cette couleur à des corps étrangers qui s'élevaient avec lui pendant la distillation, c'est presque toujours à de l'oxide de fer.

Gaz acide muriatique.

L'acide muriatique, libre de toute entrave, est toujours sous la forme d'un gaz permanent, et que rien jusqu'à présent n'a pu rendre liquide.

Ce gaz n'a point de couleur ; il est plus lourd que l'air ordinaire ; il répand des fumées blanches lorsqu'il est en contact avec l'atmosphère, et laisse échapper une portion de calorique, qui devient sensible même aux sens.

L'eau s'unit avec beaucoup de rapidité au gaz acide muriatique, dont elle absorbe, à la température de douze degrés environ, les 0.30 de son poids. A mesure que le gaz se combine avec l'eau, il perd sa fluidité élastique, le calorique qui la lui donnait devient libre et échauffe la liqueur. Moins la température est élevée, et plus l'eau en dissout, et *vice versâ ;* en sorte que de l'eau qui en a été saturée au terme de zéro, par exemple, bout à soixante et quelques degrés, et peut être dépouillée de la plus grande partie de cet acide à quatre-vingts degrés.

Comme on ne trouve point l'acide muriatique pur dans la nature, et les élémens qui le composent n'étant pas encore connus, on ne peut le former de toutes pièces, ainsi qu'il se pratique pour l'acide sulfurique; on est donc forcé de l'extraire des combinaisons où il entre, par des procédés que nous indiquerons à l'article du muriate de soude.

On reconnaît aisément la présence de l'acide muriatique par tout où il existe, par la propriété qu'il a de décomposer presque tous les sels métalliques, et sur-tout le sulfate d'argent, avec lequel il forme un précipité blanc fort pesant, qui devient bleu à la lumière; et de donner, avec la soude, un sel d'une saveur agréable, que tout le monde connaît.

L'acide muriatique uni à l'eau, ou l'acide muriatique liquide, est plus lourd que l'eau; les rapports entre eux sont comme 1250 à 1000. L'affinité entre ces deux corps n'est pas très-forte, car il suffit d'exposer cette combinaison à l'air, pour qu'elle perde une partie de son acide, qui paraît dans l'atmosphère sous la forme de fumée blanche.

Cet acide, mis avec de l'acide sulfurique concentré dans un long tube, donne naissance à une vive effervescence, et à un gaz qui remplit toute la capacité du tube. Ce gaz n'est autre chose que de l'acide muriatique, duquel l'acide sulfurique s'est emparé de l'eau de dissolution, et auquel celle-ci a fourni le calorique qu'elle a perdu en se combinant à l'acide sulfurique. Cette expérience prouve que l'acide sulfurique a plus d'attraction pour l'eau que l'acide muriatique.

L'acide muriatique s'unit facilement à l'acide nitrique, et c'est cette combinaison qui, parce qu'elle dissout l'or, a été appelée autrefois *eau régale.*

Pendant la combinaison de l'acide muriatique avec l'acide nitrique, il se passe des phénomènes assez intéressans. Si ces acides sont concentrés, il se fait un mouvement dans tout le liquide; il se développe un gaz qui produit une effervescence vive; la liqueur s'échauffe et prend une couleur rouge plus ou moins foncée.

En examinant ce gaz on trouve que c'est de l'acide muriatique oxigéné; et en mêlant ensuite l'acide nitro-muriatique avec de l'eau, il laisse échapper du gaz nitreux et perd sa couleur rouge.

D'après ces expériences, il paraîtrait naturel de conclure que l'acide muriatique

muriatique a plus d'affinité avec l'oxigène que n'en a le gaz nitreux ; mais en faisant l'expérience inverse, c'est-à-dire, en mêlant du gaz ou *oxide nitreux* avec du gaz acide muriatique oxigéné, on se convainc bientôt du contraire. En effet, dès que ces deux gaz sont en contact, ils se pénètrent, perdent leur élasticité, et donnent naissance à des vapeurs rouges, qui sont de véritable acide nitreux. Si l'on emploie des quantités convenables, il ne reste pas un atome de résidu.

Ce n'est donc qu'à l'aide d'une double attraction que l'acide muriatique décompose l'acide nitrique, savoir, celle de l'oxigène pour l'acide muriatique, et celle du gaz nitreux pour l'acide nitrique. Ce raisonnement paraît si conforme à la vérité, que dès que l'acide nitrique est saturé de gaz nitreux, la décomposition s'arrête, et il ne se forme plus d'acide muriatique oxigéné : de même, si l'on affaiblit l'affinité de l'acide nitrique pour le gaz nitreux, en l'étendant d'eau, il n'est plus décomposé par l'acide muriatique. On a encore une autre preuve de cette théorie, en ce qu'en faisant bouillir de l'acide nitro-muriatique rouge, c'est-à-dire, qui contient de l'oxide nitreux et de l'acide muriatique oxigéné en dissolution, on sépare ces deux corps, qui, dès qu'ils se rencontrent au-dessus du liquide, forment une vapeur rouge d'acide nitreux, et la liqueur devient blanche.

Le radical de l'acide muriatique n'est point encore connu ; les expériences par lesquelles on a cru tout récemment trouver sa nature, ont été mal faites, et les conclusions mal tirées : d'ailleurs, la différence qui existe entr'elles est une preuve assez forte contre leur réalité ; en effet, les uns ont annoncé que la base de l'acide muriatique était l'hydrogène ; d'autres, au contraire, assurent qu'elle est de la nature du zinc : résultats diamétralement opposés ; car, jusqu'actuellement, on n'a trouvé aucune analogie entre ces deux substances. Au surplus, ces assertions se sont trouvées entièrement fausses entre les mains des autres chimistes, qui ont répété, avec beaucoup de soin, les expériences sur lesquelles on les avait établies.

On ignore donc absolument de quels élémens l'acide muriatique est formé ; mais comme la plupart des acides qui ont été analysés ont fourni un radical combustible simple ou composé uni à l'oxigène, on en a induit, par analogie, que celui-ci était également composé d'une substance

combustible mise à l'état d'acide par l'oxigène. Mais cela est une pure hypothèse, fondée seulement sur la force de l'analogie, qui, comme on le sait, est quelquefois trompeuse, sur-tout en chimie.

Si l'on ignore l'existence de l'oxigène dans l'acide muriatique, on sait au moins qu'il peut se combiner à ce principe par des moyens que nous allons exposer.

Schèle a découvert que cet acide, distillé avec de l'oxide de manganèse, prenait tout-à-coup la forme de gaz ; que ce gaz avait une couleur jaune, une odeur analogue à l'acide nitro-muriatique ; était peu dissoluble dans l'eau; jaunissait le liége comme l'eau forte ; détruisait la couleur du tournesol, des fleurs bleues, rouges, &c. couleurs que les alcalis ne peuvent rétablir; donnait aux huiles la consistance de la graisse, une couleur blanche au cinabre, avec lequel il forme du sublimé corrosif; enfin, qu'il dissolvait l'or, comme l'acide nitro-muriatique; tuait sur-le-champ les insectes qu'on y plongeait, et agissait avec beaucoup d'énergie sur l'ammoniaque, de laquelle il dégageait beaucoup d'air, qui formait, en se répandant dans l'atmosphère, une épaisse fumée blanche.

Comme, dans cette expérience, l'oxide de manganèse se rapprochait de l'état métallique, *Schèle* pensait qu'il avait enlevé à l'acide muriatique une portion de son phlogistique, et ce fut pour cette raison qu'il lui donna le nom d'*acide muriatique déphlogistiqué.* Mais les expériences de *Berthollet*, et de plusieurs autres chimistes, ont prouvé de la manière la plus évidente, que le manganèse n'emprunte rien de l'acide muriatique; que c'est au contraire celui-ci qui enleve à l'oxide métallique une partie de son oxigène.

La désoxigénation du manganèse par l'acide muriatique n'est pas l'effet de la simple attraction de cet acide pour l'oxigène ; elle est subordonnée à plusieurs forces qui agissent simultanément, et déterminent un changement d'équilibre dans les proportions des principes. Pour bien entendre ces phénomènes, il faut partir de cette vérité bien avérée, que chaque acide demande, dans les métaux, un degré d'oxidation particulier pour pouvoir s'y unir. Or, comme l'oxide de manganèse ordinaire contient une trop grande quantité de ce principe, il ne peut se dissoudre dans les acides, si ces derniers n'ont pas la faculté de lui en prendre une partie. L'acide

muriatique seul jouit de cette propriété ; et voici comment cela se passe : l'oxide de manganèse attire l'acide muriatique ; mais celui-ci, ne pouvant s'y combiner à l'état où il le trouve, se divise en deux parties ; l'une se charge de l'oxigène excédant, et devient acide muriatique oxigéné ; l'autre s'unit à l'oxide métallique à mesure qu'il perd l'oxigène, et forme du muriate de manganèse. C'est donc, comme on voit, à l'aide d'une double affinité que la combinaison a lieu entre ces deux corps; cela explique pourquoi l'acide nitrique et l'acide sulfurique ne dissolvent point à froid l'oxide de manganèse natif, tandis que l'acide nitreux et l'acide sulfureux le dissolvent facilement, parce qu'ils ne sont pas saturés d'oxigène.

On entend aussi pourquoi l'oxide blanc de manganèse se combine à tous les acides, et particulièrement à l'acide muriatique, sans donner d'acide muriatique oxigéné.

En reprenant les expériences de *Schèle*, *Berthollet* a découvert dans l'acide muriatique oxigéné beaucoup de propriétés utiles pour les arts, que nous allons exposer succinctement.

Manière de préparer l'acide muriatique oxigéné.

Au lieu d'employer de l'acide muriatique, comme l'avait fait *Schèle*, on se sert maintenant de 100 parties de muriate de soude, de 0.75 parties d'acide sulfurique étendu de cinquante parties d'eau et de 37.5 d'oxide de manganèse en poudre.

On introduit toutes ces matières dans une cornue, ou dans un matras auquel on adapte un tube qui plonge dans de l'eau. Comme cet acide est peu dissoluble, on lui présente une grande quantité d'eau, contenue dans plusieurs vases, ou disposée en colonne très-élevée, afin qu'en comprimant le gaz, et en lui offrant une plus longue route à parcourir, elle l'oblige à se dissoudre plus complétement.

La théorie de cette opération est aisée à comprendre. L'acide sulfurique agit d'abord sur le muriate de soude, à la base duquel il s'unit ; l'acide muriatique, à son tour, attaque l'oxide de manganèse ; une partie se combine à l'oxigène, et l'autre à l'oxide ramené vers l'état métallique, d'où résultent du sulfate de soude, du muriate de manganèse, qui restent dans le vase distillatoire, et de l'acide muriatique oxigéné, qui passe à l'état de gaz dans l'eau des bouteilles de *Woulfe*, où il se dissout.

Les dimensions de l'appareil doivent varier en raison des quantités d'acide muriatique oxigéné dont on a besoin. Au lieu de flacons de *Woulfe*, on peut se servir de tonneaux ou de réservoirs en pierre, comme cela se pratique à Jouy, où l'on emploie une grande quantité de cet acide pour le blanchîment des toiles.

Des propriétés du gaz muriatique oxigéné.

Cet acide peut être obtenu gazeux, en le faisant passer à travers une petite quantité d'eau. Dans cet état, il a une couleur jaune, une odeur désagréable et suffoquante; il entretient la combustion des bougies, mais ne peut servir à la respiration des animaux; il brûle et enflamme une foule de corps combustibles, tels que les métaux, le soufre, le phosphore, les sulfures alcalins et métalliques, les huiles volatiles, &c. C'est ainsi qu'en y jetant du fer, de l'antimoine, de l'arsenic et plusieurs autres métaux réduits en poudre fine, ils s'enflamment et présentent une espèce de pluie de feu extrêmement étonnante pour ceux qui ne connaissent pas ces phénomènes.

Ce gaz est plus pesant que l'air atmosphérique.

Exposé à une température de quelques degrés au-dessous de zéro, il se solidifie en prenant une forme cristalline; mais il faut, pour que cet effet ait lieu facilement, que le gaz ait passé à travers l'eau; car si on le reçoit immédiatement, au sortir de la cornue, dans un vase sec, l'expérience ne réussit pas, au moins aussi complétement. Le calorique et la lumière ne lui font éprouver aucune altération sensible; il se combine en petite quantité avec l'eau, à laquelle il communique quelques-unes de ses propriétés, telles que sa couleur, son odeur et sa saveur.

Propriétés de l'acide muriatique oxigéné dissous dans l'eau.

Dans cet état, l'acide muriatique oxigéné n'est pas sensiblement plus pesant que l'eau pure, ce qui indique qu'il ne perd pas, en s'y combinant, une grande quantité de calorique; et ce qui le prouve, c'est la station de la température de l'eau à laquelle cet acide se combine.

Plus l'eau est froide, et plus elle dissout d'acide muriatique oxigéné; et si elle s'approche du terme de la glace, et qu'on y fasse passer une grande quantité de gaz, dès qu'elle en est saturée, le surplus se solidifie et prend la forme de petites paillettes qui nagent dans la liqueur, et qui

finissent par l'épaissir entièrement, en continuant long-temps l'opération.

L'acide muriatique liquide a une saveur acerbe et astringente.

Exposé aux rayons du soleil dans un flacon transparent, il s'en dégage du gaz oxigène que l'on peut recueillir dans une cloche remplie d'eau, à l'aide d'un tube adapté au flacon; à mesure que ce gaz se sépare, l'acide perd sa couleur, son odeur, et repasse à l'état d'acide muriatique simple. Il ne rougit point les couleurs bleues végétales, mais il les détruit presque toutes. C'est cette propriété qui l'a fait proposer par *Berthollet*, il y a déjà plusieurs années, pour blanchir les fils, les toiles et les cotons. Plusieurs établissemens formés sur ce principe, avaient eu le plus grand succès; mais le fléau de la guerre a étendu ses ravages jusque sur ces manufactures, et a forcé les entrepreneurs de suspendre leurs travaux, faute de pouvoir se procurer les matières premières. L'espace qui est donné à ce résumé ne nous permettra pas de décrire en détail cet art important, sur lequel d'ailleurs l'auteur a donné lui-même tous les développemens nécessaires, tant dans les annales de chimie que dans une petite brochure séparée. Cependant je ne puis me dispenser d'en exposer, en quelques mots, la pratique et la théorie générales.

D'abord on fait tremper dans l'eau chaude les fils, les toiles ou cotons, pour leur enlever l'apprêt ou *parou*, et les parties colorantes qui sont déjà disposées à se dissoudre dans ce liquide. Par cette première opération on économise une portion de lessive et d'acide muriatique oxigéné, qui serait employée en pure perte pour détacher ces substances étrangères que l'eau seule peut enlever.

On les fait bouillir ensuite dans une lessive préparée avec vingt parties d'eau et une partie de potasse, ou de soude, qu'on a rendue plus active avec un tiers de chaux. Lorsque les fils, ou les toiles, ne colorent plus sensiblement les lessives, on les plonge dans de grands cuviers remplis d'acide muriatique oxigéné; on agite de temps en temps ces matières, pour que toutes les parties soient également baignées par la liqueur, et que le blanchîment soit uniforme par tout. Au bout de trois à quatre heures, lorsque la plus grande partie de l'action de l'acide muriatique est épuisée, on remet les fils, ou les tissus, dans la lessive alcaline, et on opère comme

la première fois, et ainsi alternativement, jusqu'à ce que ces matières cessent de s'y colorer.

Le nombre des immersions des toiles dans les lessives varie suivant la grosseur des fils, ou des toiles, suivant la nature de la partie colorante, et la force des lessives alcalines et acides.

Les grosses toiles exigent plus de temps, et des liqueurs plus concentrées; elles se blanchissent plus facilement, lorsque les filasses ont été bien rouies, lorsque le fil n'a pas été trop tordu, et la toile trop serrée, parce que l'acide muriatique oxigéné les pénètre plus aisément jusqu'au centre.

Cependant on peut les fixer à cinq ou six pour les grosses toiles, et à trois ou quatre pour les toiles fines, batistes et cotonnades.

Lorsque les toiles ne se colorent plus dans les lessives bouillantes, on les frotte avec du savon noir dans de l'eau chaude; on les lave ensuite avec soin pour enlever toutes les parties du savon, et on les met dans un mélange de cinquante parties d'eau et d'une partie d'acide sulfurique.

Ce bain, légérement acide, remplace le lait aigri qu'on a coutume d'employer dans les blanchisseries ordinaires; il donne aux toiles un blanc très-éclatant, qu'elles ne prendraient point sans cela; c'est en dissolvant une portion d'oxide de fer et de terre calcaire contenue dans les végétaux, ou même déposée sur les toiles par la lessive alcaline, qu'il produit cet effet. Il faut laver ces toiles avec beaucoup de soin, car s'il y restait quelques portions d'acide sulfurique, elles brûleraient indubitablement la toile lorsqu'elle serait sèche.

Le savonnage a pour objet d'effacer la couleur noire de certains fils, qui résiste plus fortement à l'action des lessives, et de donner conséquemment une couleur blanche plus uniforme aux tissus. Il a encore l'avantage de détruire l'odeur d'acide muriatique oxigéné qui, sans cette précaution, se conserve long-temps dans les toiles, et leur donne, au bout d'un certain temps, une couleur rousse.

Il est rare qu'on puisse épuiser une lessive, dans un premier blanchissage, de tout ce qu'elle coutient d'acide muriatique oxigéné, parce qu'il s'établit une espèce d'équilibre entre la matière colorante et l'acide muriatique pour l'oxigène; en sorte que, lorsqu'elle en est déjà en partie saturée,

elle ne l'attire plus aussi fortement ; et, d'une autre part, la quantité d'acide muriatique oxigéné diminuant dans l'eau, celle-ci le retient plus fortement et s'oppose encore au passage de l'oxigène dans la toile. Mais ces eaux peuvent servir à dégrossir de nouvelles toiles, et principalement des toiles de coton, parce qu'il leur faut moins d'oxigène pour blanchir, et qu'elles paraissent avoir plus d'affinité avec ce principe.

Il en est de même pour les lessives alcalines ; elles conservent toujours une portion d'alcali, qui n'agit point sur la matière colorante des végétaux ; elles ne doivent cependant pas être rejetées comme inutiles ; elles peuvent encore servir à enlever l'apprêt des toiles écrues. On peut aussi leur rendre une partie de leur action, en les faisant bouillir quelque temps avec un peu de chaux, ou bien en évaporant la dissolution à siccité, et en calcinant le résidu pour brûler les matières végétales qui en masquent les propriétés.

En examinant avec attention ce qui se passe dans l'opération du blanchîment par l'acide muriatique oxigéné, *Berthollet* a reconnu qu'il y avait analogie presque parfaite avec ce qui a lieu dans la même opération par les moyens ordinaires ; dans l'un et l'autre cas, en effet, c'est l'oxigène qui se fixe dans la matière colorante des végétaux, et qui la rend dissoluble dans les alcalis ; il y a cette différence seulement, que l'on présente aux matières à blanchir l'oxigène plus concentré, en plus grande quantité sous le même volume, et que l'on fait en quelques jours ce qui demande plusieurs mois par les anciennes méthodes. Cette théorie est confirmée par un grand nombre d'expériences et d'observations. On savait que le blanchîment des toiles et des fils se faisait beaucoup mieux et plus promptement dans le printemps et l'automne que dans les autres saisons de l'année ; que les arrosemens et la rosée de mai étaient très-favorables au blanchîment, sur-tout lorsqu'ils sont aidés des rayons du soleil. D'un autre côté, la chimie a trouvé que l'oxigène de l'acide muriatique se combinait réellement dans la substance végétale, et que cet acide repassait à l'état d'acide muriatique ordinaire ; que la matière colorante, saturée d'oxigène, devenait dissoluble dans les alcalis, d'où on peut la séparer toute entière, en faisant évaporer la lessive, et en la mêlant avec un acide ; elle a trouvé de plus que la rosée de mai contient beaucoup

d'oxigène, et que la lumière du soleil facilitait sa séparation de l'eau, et sa combinaison avec les matières végétales.

Les toiles, les fils, les cotons, &c., blanchis par le nouveau procédé, ne le cèdent point en blancheur, ni en qualité aux mêmes marchandises, blanchies sur le pré; on a même remarqué qu'elles avaient beaucoup plus de force, mais qu'elles ne jouissaient pas, à la vérité, de cette douceur, de ce moelleux qui plaisent aux marchands; cet agrément, qui est toujours au détriment de la force, leur est facilement donné; il suffit de les faire passer plusieurs fois sur un cylindre, ou un autre corps qui en use la surface.

Les personnes qui feront blanchir pour leur compte, et qui n'ont pas besoin de ce coup d'œil marchand, trouveront un grand avantage dans l'usage des toiles blanchies par ce procédé.

On a remarqué que ces toiles prenaient encore plus d'éclat par une exposition de quelques jours sur le pré; qu'elles conservaient plus constamment leur beau blanc; et qu'enfin elles perdaient complétement et sans retour la légère odeur d'acide muriatique oxigéné qu'elles retiennent pendant quelque temps, lorsqu'on n'a pas pris les précautions indiquées plus haut.

Le procédé de *Berthollet* a, comme on voit, plusieurs avantages sur les anciens; il est prompt, économique, et sur-tout n'altère point la qualité des toiles, comme quelques personnes, conduites sans doute par l'intérêt, ont voulu le persuader; il a principalement le grand mérite de pouvoir être exercé dans un petit espace, et dans toutes les saisons de l'année.

Dans les anciens procédés, au contraire, il fallait faire une grande mise de fonds, dont on ne retirait l'intérêt qu'au bout d'un an ou quinze mois; il fallait une grande étendue de terrain, et l'on ne pouvait travailler qu'au printemps et dans l'été; ainsi le fabricant et le consommateur trouveront, chacun de leur côté, un bénéfice et une commodité très-importante dans le blanchîment par l'acide muriatique; l'un gagnera davantage par la briéveté du temps et des opérations, la petite étendue de terrain, &c.; l'autre paiera moins, n'attendra pas si long-temps, et aura une toile de meilleure qualité.

Mais, dira-t-on, il faut préparer de l'acide muriatique, dont le prix ne laisse pas d'être considérable. J'observerai que si l'on fabriquait

soi-même

soi-même l'acide sulfurique sur les lieux, et que l'on tirât habilement parti des résidus pour en avoir la soude, je suis bien convaincu qu'on trouverait un très-grand avantage dans cette méthode, et qu'on n'hésiterait pas à l'adopter par tout.

Des muriates.

On donne le nom de *muriates* aux combinaisons de l'acide muriatique avec les matières alcalines, terreuses ou métalliques; et de *muriates suroxigénés*, à celles de l'acide muriatique oxigéné. Nous ne parlerons ici que de leurs combinaisons avec les alcalis et les terres, parce que les autres appartiennent à la division des minéraux.

Ces sels ont des caractères génériques communs à tous, et des caractères spécifiques très-distinctifs.

Des caractères génériques.

Ils ont 1.° une saveur salée, plus ou moins piquante dans quelques-uns; 2.° ils n'éprouvent pas de décomposition par le feu, comme les nitrates; 3.° ils font effervescence avec l'acide sulfurique, et répandent une vapeur blanche dans l'air; 4.° ils précipitent la dissolution de sulfate d'argent sous la forme de flocons blancs très-pesans. Tels sont les caractères communs aux muriates, à l'aide desquels on peut aisément les distinguer des autres genres de sels secondaires.

Du muriate de potasse.

Ce sel se rencontre rarement dans la nature. On dit cependant qu'il existe dans des fondrières en Picardie, et dans quelques eaux minérales de Normandie. Il se trouve assez abondamment dans plusieurs végétaux, et il n'est pas de cendres qui n'en contiennent plus ou moins; cela prouve que ce sel est répandu à la surface du sol, où il est pompé par les vaisseaux des plantes, en même temps que les sucs dont elles se nourrissent; car il est vraisemblable qu'il ne se forme pas pendant l'acte de la végétation.

Ce sel n'est pas décomposé par l'action du feu le plus vif; mais il décrépite, se fond et même se volatilise en fumée. Il a une saveur salée amère, et c'est à cause de cette propriété qu'il portait autrefois le nom de *sel fébrifuge de Sylvius*. Sa pesanteur spécifique est, suivant *Kirwan*, de 1.836. L'eau froide en dissout le tiers de son poids; l'eau chaude en dissout davantage, et la dissolution cristallise par le refroidissement. Sa forme est celle d'un cube régulier, ou d'un parallelipipède rectangle.

Parmi les substances terreuses et alcalines, la baryte seule peut le décomposer.

L'acide sulfurique en sépare les élémens, en s'unissant à sa base; l'acide muriatique se dégage sous la forme de fumées blanches. Si la nature ne fournissait pas du muriate de soude aussi abondamment, l'on pourrait extraire l'acide muriatique du muriate de potasse.

L'acide nitrique agit aussi sur le muriate de potasse, en s'emparant de la potasse; mais à mesure que l'acide muriatique est dégagé, il réagit sur l'acide nitrique dont il prend une portion de l'oxigène, et passe à l'état d'acide muriatique oxigéné, tandis que l'acide nitrique devient acide nitreux. Une partie d'acide nitrique et deux parties de muriate de potasse forment une bonne eau régale, suivant *Kirwan*.

L'acide tartareux forme, dans la dissolution de ce sel un peu concentrée, un précipité cristallin, dû au transport d'une portion de potasse sur l'acide tartareux, avec lequel elle donne naissance à du tartrite acidule de potasse qui ne peut rester en dissolution dans la même quantité d'eau. Cette propriété sert à le faire distinguer du muriate de soude, qui ne produit pas le même effet avec l'acide tartareux. Les acides fixes au feu, tels que ceux du phosphore, du borax, de l'arsenic, du tunstène, &c., le décomposent à une haute température; mais c'est le contraire à froid.

Il est décomposé par le nitrate de chaux; il se forme, dans ce cas, du nitrate de potasse et du muriate de chaux: d'où il suit que ce sel, contenu dans les potasses du commerce, n'est pas inutile pour la fabrication du salpêtre.

Le muriate de potasse n'est d'aucun usage dans les arts; cent parties de ce sel, suivant *Kirwan*, contiennent,

1.° De potasse	63.
2.° D'acide	30.
3.° D'eau	7.
	100.

Et, suivant *Bergman*,

1.° De potasse	61.
2.° D'acide	31.
3.° D'eau	8.
	100.

D'où on a pour terme moyen,

Potasse	62.
Acide	30.5.
Et eau	7.5.
	100.0.

Du muriate sur-oxigéné de potasse.

Ce sel, dont la découverte est due à *Berthollet*, se prépare, en faisant passer dans une dissolution de potasse caustique, ou combinée à l'acide carbonique, du gaz acide muriatique oxigéné. L'appareil dont on se sert pour cette opération, est le même que pour l'acide muriatique oxigéné, à cette différence que, dans les flacons de *Woulfe*, au lieu d'eau, on met une dissolution de potasse. La meilleure proportion à garder entre l'eau et la potasse, c'est six parties de la première, et une de la dernière. Lorsqu'on emploie du carbonate de potasse, il se produit, au bout d'un certain temps, une effervescence due au dégagement de l'acide carbonique; avec la potasse caustique, il n'y a point d'effervescence, mais il se développe un peu de calorique; différence qui s'explique aisément.

Comme le muriate sur-oxigéné de potasse n'est pas, à beaucoup près, aussi dissoluble que la potasse, dès qu'il s'en est formé une certaine quantité, il cristallise au milieu de la liqueur, sous la forme de paillettes brillantes, dont la quantité augmente à mesure que la saturation se fait. En examinant le résultat de cette opération, *Berthollet* a trouvé que l'acide muriatique oxigéné ne se combinait point à la potasse tel qu'il y arrivait; qu'au contraire, il se divisait en deux parties, l'une qui se dépouillait de son oxigène en faveur de l'autre; en sorte qu'il se forme de l'acide muriatique sur-oxigéné et de l'acide muriatique ordinaire qui, s'unissant l'un et l'autre à la potasse, donnent naissance à du muriate de potasse ordinaire, et à du muriate sur-oxigéné de potasse : il s'établit donc trois affinités dans cette opération; celle d'une nouvelle quantité d'oxigène pour l'acide muriatique oxigéné et de celui-ci pour la potasse, et celle de l'acide muriatique ordinaire pour le même alcali.

Séparation du muriate de potasse du muriate sur-oxigéné de potasse.

La dissolubilité de ces sels étant très-différente dans l'eau froide, leur séparation devient facile; il suffit de ramasser le sel qui s'est cristallisé pendant l'opération, de le dissoudre dans la quantité d'eau bouillante nécessaire, de filtrer la dissolution pour en séparer une petite quantité

de terre qui existe dans la potasse commune, et de le laisser refroidir. Le muriate sur-oxigéné se dépose sous la forme de lames brillantes. Pour l'obtenir sec, on décante la liqueur surnageante; on le laisse égoutter, et on le fait sécher ensuite sur des papiers brouillards. Comme le muriate sur-oxigéné de potasse est peu dissoluble dans l'eau froide, il en reste peu en dissolution dans les eaux mères; cependant, si on veut le recueillir entièrement, on y parvient en réduisant la liqueur par l'ébullition, et en la laissant refroidir.

Propriétés du muriate sur-oxigéné de potasse.

Ce sel prend ordinairement la forme de lames quarrées très-minces; quelquefois il se présente sous celle d'un parallélipipède. Sa saveur est fraîche et piquante comme celle du salpêtre; il fuse sur les charbons allumés, à la manière de ce dernier, cependant avec plus de vélocité, et en répandant une flamme plus vive. Broyé sur un porphire, ou dans un mortier de marbre avec un pilon de bois, il pétille, et lance des étincelles. Distillé dans une cornue, il se décompose facilement, et donne, à une chaleur médiocre, du gaz oxigène bien pur.

Cent parties de ce sel donnent environ 0,33 de son poids de gaz oxigène. Lorsqu'il a été préparé avec soin, et que la distillation a été faite artistement, le gaz oxigène que l'on obtient est presque entièrement absorbé par le phosphore; il n'a donné à *Berthollet* que 2 à 0,03 de résidu, encore est-il vraisemblable qu'ils provenaient de l'air de l'appareil, dont il est difficile de se débarrasser.

La chaleur modérée à laquelle l'oxigène quitte le muriate de potasse, indique que ce principe n'y adhère pas très-fortement, ou qu'il retient dans sa combinaison une grande quantité de calorique, ce que semblent annoncer plusieurs faits où le muriate sur-oxigéné est décomposé par les corps combustibles.

Ce sel, jeté dans de l'acide sulfurique concentré, détone, en faisant entendre un bruit sec; il s'élance à une grande distance du vase, et répand une lumière rouge très-foncée.

Avec l'acide nitrique concentré, il pétille et répand quelques étincelles, mais sans explosion, comme dans le cas précédent.

Mélangé à la dose de trois parties avec une de soufre, et trituré dans

un mortier de métal, il produit une suite de détonations très-fortes, qui ressemblent à des coups de pistolet, si l'on fait l'expérience seulement à la dose d'un gramme. Le même mélange détone encore plus fortement sous le choc du marteau; il s'enflamme dans l'acide sulfurique concentré, en répandant une lumière extrêmement vive.

Un mélange de trois parties de ce sel, d'une demi-partie de soufre, et d'une demi-partie de charbon, produit les mêmes effets que le précédent, mais encore plus violens.

Plusieurs métaux très-combustibles, tels que le fer, l'antimoine, le zinc, l'arsenic, et les sulfures métalliques, mêlés avec deux parties de muriate oxigéné, détonent aussi avec flamme par le choc, mais ne s'enflamment pas dans l'acide sulfurique.

Beaucoup de matières végétales, telles que les huiles, le sucre, l'amidon, l'alkool, l'éther, la sciure de bois, &c., présentent les mêmes phénomènes. Tous ces mélanges détonent aussi par le choc électrique, en produisant une flamme extrêmement vive.

Ces expériences prouvent que l'oxigène est beaucoup moins fortement attaché au muriate de potasse, qu'il ne l'est dans le nitrate de potasse, puisque ce sel ne produit pas les mêmes phénomènes avec les corps combustibles traités de la même manière.

Berthollet qui, le premier, avait reconnu la facilité avec laquelle ce sel cédait son oxigène aux corps combustibles, a fait plusieurs tentatives pour en former une poudre plus forte que la poudre à canon ordinaire. Ses soupçons se réalisèrent; mais il reconnut bientôt que l'usage en deviendrait dangereux, tant est grande l'inflammabilité de cette matière, et il a, avec raison, abandonné ce projet.

Cependant il n'est pas douteux que cette substance ne devienne un instrument très-précieux et très-exact, parce que sa nature est bien connue, pour porter de l'oxigène dans beaucoup de corps qu'on ne peut pas brûler par les moyens ordinaires, ou pour faire l'analyse de composés dont on ignore encore la nature des élémens.

Déjà on s'en sert pour se procurer du gaz oxigène bien pur; et il est vraisemblable qu'on l'emploiera quelque jour dans les spectacles et dans les artifices, pour imiter le bruit et les éclairs de la foudre.

Du muriate de soude, ou sel marin.

Ce sel, comme son nom l'exprime, est une combinaison de soude et d'acide muriatique ; il a une saveur salée agréable, une forme cubique, ou de trémies qui sont elles-mêmes formées de la réunion de plusieurs petits cubes. Ce sel existe très-abondamment dans la nature, tantôt en masses considérables, et formant le sel gemme, comme dans la Pologne, la Hongrie, la Russie, &c. ; tantôt en dissolution dans les eaux de la mer, des fontaines salées, &c.

Lorsqu'on rencontre dans le sein de la terre des mines de sel gemme, leur exploitation est facile et peu coûteuse ; il suffit de percer des puits, des galeries, comme cela se pratique pour les mines de houille ou métalliques, et de détacher cette substance à l'aide de pics, de tranches, et de leviers, &c.

Muriate de soude natif.

Le sel gemme présente différentes modifications, relativement à sa couleur, à son grain et à sa saveur. On en voit de blanc, de jaune, de rose, de bleu, &c. On en connaît de dur, de tendre ; enfin, il y en a dont la saveur est agréable, et d'autre qui est amer : il doit communément ses variétés de couleur à la présence de l'oxide de fer plus ou moins chargé d'oxigène ; sa dureté dépend de la vîtesse plus ou moins grande avec laquelle il a été formé, et sa saveur variée tient au mélange de quelques autres substances salines, et particulièrement au muriate de chaux qui l'accompagne presque toujours.

Procédés pour extraire le muriate de soude des eaux de la mer.

Les procédés suivis pour extraire le muriate de soude des eaux où il est dissous, ont tous pour objet d'en séparer l'eau ; mais les moyens qu'on emploie sont différens, suivant les climats et la richesse de ces mêmes eaux. En France, dans les départemens de l'ouest, on amasse, pendant les grandes marées, de l'eau de la mer dans de grands réservoirs généraux qu'on appelle *vasets*, où elles déposent les terres qu'elles tenaient en suspension par le mouvement que le flux et le reflux leur communiquent ; où elles se purgent, par un mouvement de fermentation qui s'y établit, des *détritus* des animaux marins auxquels elles servent de récipient ; où enfin, elles prennent déjà quelques degrés de salure, par un commencement d'évaporation. De là ces eaux coulent par une légère pente dans les réservoirs particuliers nommés *aires*, et séparés les uns des autres par de petits murs en terre, que l'on connaît sous le nom

de *vettes*. Vingt de ces aires, qui ont environ 16 pieds, portent le nom de *livre*, comme autrefois vingt sous formaient la livre tournois. Il n'est pas nécessaire de dire que le sol des aires, ainsi que celui du réservoir général, doivent être de nature argileuse, afin que l'eau ne puisse pas pénétrer dans les terres. Si le lieu sur lequel on veut former un marais salant n'est pas glaiseux, il faut nécessairement le rendre tel en y apportant de l'argile d'un autre endroit, et la presser fortement sur le sol.

Les eaux arrivées dans les aires s'évaporent par le contact de l'air et par la chaleur du soleil: lorsqu'elles ont acquis un certain degré de concentration, elles prennent une couleur rougeâtre, signe par lequel les saliniers reconnaissent que le sel va bientôt paraître. La cause de cette coloration paraît être due à de l'oxide de fer qui se sépare, ou peut-être à quelque matière animale qui change de nature. Lorsque la saturation est complète, l'eau présente à la surface une pellicule saline, que l'on recueille avec des espèces d'écumoirs, si l'on veut avoir du sel blanc, ou que l'on brise de temps en temps pour la faire tomber au fond, et favoriser l'évaporation. A mesure que le sel se dépose, les ouvriers le ramassent, en l'attirant vers les bords, avec des rables en bois; ils le mettent dans des paniers pour le faire égoutter, et ils en forment des pyramides. On n'attend pas communément, pour remplir les aires de nouvelles eaux, qu'elles soient complétement desséchées. Par ce moyen, on obtient le muriate de soude exempt de muriate de chaux. Au bout de plusieurs opérations, on jette les eaux mères, dont on pourrait cependant tirer un grand parti dans plusieurs arts, et spécialement pour la fabrication du sel ammoniac, ou muriate d'ammoniaque.

Le sel qu'on obtient par ce procédé contient beaucoup de matières étrangères, telles que du sable, de l'argile, de la craie, du sulfate de chaux, de l'oxide de fer et du muriate de chaux. L'analyse que *Bergman* a donnée de l'eau de la mer, puisée en 1776, par *Forstere* et *Sparman*, à 300 pieds de profondeur, vers la latitude des îles Canaries, lui a fourni, par l'évaporation, 0,045 de résidu salin, composé d'environ 3,52 de sel marin, de 0,88 de muriate de chaux, et de 0,10 de sulfate de chaux. Ainsi cette eau contient 3 livres 8 onces de muriate de soude par quintal, quoique sa pesanteur spécifique n'ait été trouvée que de

1,0289. D'après ce qui vient d'être exposé, il est facile de concevoir pourquoi le sel préparé à la surface du sol a toujours une couleur grisâtre, une saveur âcre, et attire légérement l'humidité de l'air.

Manière de purifier le sel marin.

Pour obtenir le muriate de soude pur, comme cela est nécessaire pour les expériences de chimie, on le fait dissoudre dans quatre parties d'eau froide, on filtre la dissolution ; les matières qui ne s'unissent point à l'eau, telles que l'argile, le sable, la craie, l'oxide de fer, &c., restent sur le filtre ; mais le muriate de chaux se dissout aussi : on le décompose en mettant dans la dissolution quelques gouttes de carbonate de soude ; sa base se combine à l'acide muriatique, et l'acide carbonique à la chaux, et forme du carbonate de chaux qui, étant insoluble, se précipite au fond.

Il faut avoir l'attention de ne pas ajouter plus de carbonate de soude qu'il n'en faut, car on tomberait dans un autre inconvient aussi désagréable que le premier; on s'aperçoit qu'on en a mis suffisamment, lorsque les dernières gouttes n'occasionnent plus de trouble dans la liqueur. On soumet ensuite la dissolution à l'évaporation ; on ramasse le sel à mesure qu'il se sépare; il est alors très-pur. Si on veut l'avoir régulièrement cristallisé, il faut abandonner la dissolution à l'évaporation spontanée; alors les molécules salines se réunissent facilement et donnent naissance à des cristaux cubiques. Le sel préparé dans les marais salans est conservé dans le voisinage, où on en fait des tas, auxquels on donne la forme de pyramides ; on recouvre ces pyramides avec des toits de chaume, de brandes, ou de tous autres végétaux communs aux environs de la fabrique. Dans quelques ateliers, on a l'habitude de recouvrir les tas de sel avec des fagots de bois menu, auxquels on met le feu ; la chaleur qui se dégage pendant la combustion, fond la surface du sel, et y forme une croûte extrêmement dure, qui résiste long-temps à l'action des eaux pluviales; cette méthode est très-ingénieuse. Mais, malgré ces abris, il y a toujours quelques portions de sel qui sont dissoutes à la longue ; on les recueille dans un fossé creusé dans la terre tout autour de la pyramide de sel. Il arrive quelquefois qu'au milieu, ou vers la fin de l'opération, où les eaux sont déjà fort riches en sel, il survient des pluies abondantes qui rendraient le temps et les travaux sans fruit, si on n'avait pas trouvé un moyen de parer à cet

cet inconvénient. Pour cela, on fait couler les eaux par un canal communiquant de chacune des aires dans une espèce de réservoir pratiqué dans la terre. Lorsque la pluie est passée, et que l'atmosphère donne l'espérance de beau temps, on renvoie cette eau, à l'aide de pompes et de cheneaux de bois, dans les aires, pour achever l'évaporation.

Dans la formation des marais salans, il est avantageux de les disposer de manière qu'ils reçoivent directement le vent de nord-ouest, parce que c'est lui qui, aux environs de la mer, souffle le plus souvent, le soir sur-tout; et comme il arrive sec et froid, il favorise beaucoup l'évaporation de l'eau, qu'il trouve encore échauffée de la chaleur du jour.

Sur les côtes des ci-devant provinces de Bretagne et Normandie, on suit, pour extraire le sel des eaux de la mer, une méthode qui diffère un peu de celle que je viens de décrire.

Au lieu de rassembler l'eau dans des aires séparées par des murs, on la fait couler sur une grande étendue de terrain glaisé et couvert de sable fin, à la hauteur de plusieurs pouces. Le sable, en divisant les molécules de l'eau, hâte singulièrement son évaporation, et on a à la fin un mélange de sable et de sel. On ramasse ce mélange en petits tas, pour achever de le dessécher; on le lave ensuite dans une petite quantité d'eau de mer; et comme elle se sature presque complètement de sel, elle peut être alors évaporée avec avantage.

En conséquence, on fait cuire ces eaux salées dans des chaudières de plomb, par une chaleur artificielle, et l'on obtient le sel blanc. A mesure que le sel se dépose, on a soin d'agiter la liqueur, afin qu'il ne s'attache pas au fond des chaudières; lorsqu'il y en a une certaine quantité, on le retire et on le met égoutter. Ce sel est plus pur que celui qui a été formé sur le sol même; mais il contient plus de muriate calcaire, qui lui donne une saveur âcre. Cette manière de préparer le sel s'appelle *méthode par le bouillon*.

Dans le nord, où la température est très-souvent au-dessous du terme de la glace, on suit une marche toute contraire à celles qui viennent d'être décrites. Elle a pour objet d'enlever, par la congellation, l'eau surabondante à la combinaison saturée du sel et de l'eau. On étend donc l'eau de mer sur un grand espace de terrain argileux; par ce moyen, la

surface de l'eau se gèle, et lorsque la glace a acquis une certaine épaisseur, on l'enlève; bientôt il s'en forme une seconde, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'eau soit entièrement saturée. A cet état où elle ne gèle plus, on la ramasse et on la fait évaporer dans des chaudières, comme dans la *méthode par le bouillon:* on a du sel blanc assez pur.

Il existe dans les départemens de la partie de l'est de la France, et particulièrement dans les départemens de la Meurthe, du Jura, du Mont-Blanc, &c., beaucoup de sources salées d'où l'on retire le sel par différens procédés, dont le résultat est cependant le même. Ces sources étant toujours à une certaine profondeur, on perce des puits pour les rassembler et les puiser. Si le sol est poreux, et qu'il ne retienne pas l'eau, on y construit une maçonnerie, ou au moins on les double en planches que l'on enduit de terre glaise. On élève l'eau de ces puits à l'aide de pompes à chapelets, ou de quelques autres machines hydrauliques mues par des chevaux ou par l'eau.

La salure des eaux des différentes sources varie depuis un degré et demi jusqu'à quinze à seize degrés à l'aréomètre de *Baumé.* Les premières n'étant pas assez riches pour être évaporées immédiatement avec profit, on leur fait subir une opération préliminaire, qu'on appelle *graduation.* Elle a pour objet, en multipliant beaucoup les surfaces de l'eau, et lui communiquant un mouvement rapide dans l'air, d'en séparer l'eau excédante au point de saturation. Pour cela, on l'élève, avec des pompes, sur des fagots d'épines dont les branches sont très-déliées. Les espèces de angars sous lesquels se fait l'opération, se nomment *bâtimens de graduation.* Ces bâtimens ont différentes dimensions, suivant l'abondance des eaux, et leur degré de salure; ils sont composés de plusieurs ailes où passent successivement les eaux faibles.

On continue ainsi de les faire voyager, jusqu'à ce qu'elles aient acquis seize à dix-sept degrés; on les fait couler ensuite dans de grandes chaudières en tôle, appelées *poëles.*

Mais lorsque celles-ci sont en activité, les eaux n'y arrivent pas directement; elles passent d'abord dans une autre chaudière, placée derrière la première, vers la cheminée, et qu'on nomme *poëlon;* là elles s'échauffent, en profitant du calorique qui s'échappe du fourneau, et qui serait, sans cela,

en pure perte, et elles arrivent toutes chaudes dans la chaudière d'évaporation, et n'arrêtent point l'ébullition. Cette disposition a l'avantage de concentrer l'eau déjà de quelques degrés, de ne point refroidir la grande chaudière où elle se rend dans la proportion convenable pour remplacer juste celle qui se volatilise par l'évaporation, en sorte qu'à la fin la chaudière se trouve pleine de sel.

Quoique les eaux aient déjà déposé sur les fagots une grande quantité de sulfate de chaux, que les ouvriers appellent *schlot*, elles en retiennent encore beaucoup; et comme cette substance saline est moins dissoluble que les autres, elle se sépare au commencement de l'évaporation. On la recueille en plaçant sur les bords latéraux de la chaudière des augelots en bois; cette opération porte le nom de *schlotage*. Lorsque la liqueur a acquis 28 à 29 degrés, elle ne peut plus être concentrée davantage, sans abandonner une portion de sel; aussi voit-on, à cette époque, se former à la surface de petits cristaux, que les saliniers appellent *pieds-de-mouches*.

Dès que ce phénomène commence à paraître, on a soin de retirer tout le schlot qui s'est précipité au fond de la poële, afin que le sel soit plus pur. On rable de temps en temps le fond des chaudières pour ramener le sel vers les angles, et l'empêcher de s'attacher, ce qui gênerait l'évaporation, et occasionnerait l'altération de la poële. Quand le salinage est fini, on enlève le sel dans des vases de bois, et on le porte au séchoir situé derrière le fourneau; de là il passe au magasin. Malgré le soin qu'on apporte à rabler les chaudières, il se forme néanmoins une croûte qui augmente à chaque opération. On a coutume de l'enlever au bout de sept à huit cuites, à coups de ciseau; c'est ce qu'on appelle *écailler la chaudière*.

Le C.en *Nicolas*, chimiste de Nanci, qui a été chargé par le gouvernement de porter dans les établissemens des salines les améliorations dont ils étaient susceptibles, a proposé, avec raison, de faire toutes les huitièmes cuites avec des eaux faibles, c'est-à-dire, qui n'ont point été graduées. Par ce moyen, la plus grande partie de l'incrustation se dissout, et on évite le mal, très-grand, que l'opération de l'écaillage fait éprouver aux chaudières.

Chaque cuite dure environ vingt-quatre heures, lorsqu'on a employé de l'eau à quinze degrés ; et dix-huit, lorsqu'elle a vingt à vingt-un degrés. On fabrique, dans une chaudière de vingt-quatre pieds, ou huit mètres environ de long, sur vingt pieds de large, soixante-dix à soixante-quinze quintaux de sel à chaque cuite. Le schlot qu'on retire pendant l'évaporation des eaux, est traité de nouveau pour en séparer le sel marin et le sulfate de soude qu'il contient; pour cela, on le concasse et on le lave dans de grandes caisses de bois, avec de l'eau simple. On fait ensuite évaporer la lessive; le sel marin se sépare le premier ; on le ramasse ; et lorsque la liqueur, mise sur un morceau de fer froid, se prend en une masse solide, on la fait couler dans des tonneaux où, dès qu'elle commence à cristalliser, on l'agite continuellement pour en troubler la cristallisation. Le sulfate de soude qui provient de la première cristallisation, contenant toujours quelques portions de muriate de soude, on le fait fondre une seconde fois dans une partie égale d'eau bouillante, et on le met en cristallisation, en opérant comme la première fois.

Comme on a l'habitude de ne pas entièrement dessécher le sel, pour ne point brûler le fond de la poële, il reste une eau mère, qu'on appelle *muire*, qui contient aussi beaucoup de sulfate de soude, d'où on pourrait le retirer avec bénéfice.

On a vu plus haut que les eaux peu chargées de sel passaient aux bâtimens de graduation pour y être concentrées; mais lorsqu'elles donnent naturellement quinze à seize degrés à l'aréomètre, elles sont conduites immédiatement du puits à la chaudière d'évaporation.

Nicolas a observé qu'on pouvait en élever la salure jusqu'à vingt-un degrés, et il a conseillé, d'après cela, de faire graduer ces mêmes eaux; il observe que, par cette opération très-simple, on économiserait d'un quart environ la quantité de combustible qu'on emploie pour chaque opération, et qu'on aurait encore l'avantage d'en séparer une portion de schlot qui embarrasse toujours pendant le salinage.

Dans quelques salines on est dans l'usage de passer dans des bâtimens de graduation à cordes les eaux toutes bouillantes, concentrées jusqu'à vingt-neuf à trente degrés, époque où le salinage commence ; en coulant à la surface de ces cordes, les contacts avec l'air atmosphérique sont

très-multipliés, ce qui, conséquemment, accélère l'évaporation et la séparation du sel qui se dépose sur les cordes, où il forme un enduit très-épais qu'on détache avec un instrument particulier. Cette opération très-ingénieuse porte dans le combustible une grande économie, et donne de très-beau sel.

Dans le département du Jura, &c., on fait deux variétés de sel; l'une qu'on appelle *à gros grain*, et l'autre *à menu grain*. Le premier se forme par une évaporation lente, parce que, dans ce cas, les molécules salines peuvent se réunir en plus grand nombre autour du même noyau, et fournir un cristal plus volumineux, ce qui ne peut avoir lieu par l'ébullition, qui agite continuellement la liqueur, et écarte les petites masses salines qui se forment.

Le sel à gros grain est un peu plus pur que l'autre; aussi est-il préféré pour beaucoup d'usages; mais il est plus cher, car il demande plus de temps pour sa fabrication.

L'analyse des eaux salées des sources des départemens de la Meurthe, du Jura, du Doubs, &c., a fourni, en général, à *Nicolas*, 1.° du muriate de soude; 2.° du sulfate de soude; 3.° du muriate de chaux et du muriate de magnésie, dans des proportions différentes pour chaque espèce d'eau. On ne doit pas être étonné de retrouver des traces plus ou moins grandes de ces sels dans le sel marin de ces lieux; j'y ai trouvé quelquefois le sulfate de soude jusqu'à la dose de 0.06. Il est moins abondant dans le sel à gros grain.

Après avoir exposé d'une manière très-abrégée les différens procédés suivis pour extraire le sel marin, ou muriate de soude, des eaux où il est dissous, je dois faire connaître ses principales propriétés.

Propriétés du muriate de soude.

Le muriate de soude a une forme cubique régulière; sa saveur est salée et agréable; il est très-dissoluble dans l'eau, dont il ne demande que 2.5 parties suivant *Kirwan*, et 2.82, suivant *Bergman*; il n'est pas très-sensiblement plus dissoluble à chaud qu'à froid, car, d'après le même chimiste, il exige 2.76 d'eau bouillante, aussi ne cristallise-t-il pas par le refroidissement, comme la plupart des autres sels; il faut, pour l'obtenir dans cet état, faire évaporer la dissolution, soit par l'action du

feu, soit spontanément à l'air. Comme le muriate de soude se combine très-promptement à l'eau, il se produit un grand froid, c'est-à-dire que, dans un temps très-court, il y a beaucoup de calorique absorbé. Il n'en faudrait cependant pas conclure qu'il demande plus de chaleur qu'un autre pour se dissoudre; il y a même quelques faits qui semblent prouver qu'il en a moins besoin que beaucoup d'autres.

Il paraît avoir plus d'affinité avec l'eau que la plupart des autres sels, car à l'exception de ceux qui sont déliquescens, il les précipite tous de leurs dissolutions, et pendant ces précipitations, il se dégage constamment une certaine quantité de calorique.

Le muriate de soude n'éprouve aucune altération de la part de l'air atmosphérique, à moins que celui-ci ne soit très-humide; alors il s'humecte légérement.

Exposé à une chaleur brusque, il se divise en fragmens, fait entendre un pétillement assez fort, qu'on appelle *décrépitation*. Ces effets sont dus à l'eau de cristallisation qui est réduite tout-à-coup en vapeurs, et qui, en écartant les lames cristallines avec beaucoup de vîtesse, produit le bruit et l'explosion du sel. Si l'on continue l'action du feu sur ce sel, après qu'il a perdu l'eau, il rougit, se fond, et même se volatilise, s'il a le contact de l'air, sous la forme de fumées blanches. Le muriate de soude fondu et sublimé n'a point éprouvé d'altération dans sa nature intime : ses élémens ne sont point désunis par cette opération; ils se volatilisent plutôt ensemble que de se séparer, ce qui indique qu'ils ont entr'eux une grande affinité.

Parmi les substances terreuses, il n'y a que la baryte qui puisse le décomposer à froid; elle s'empare de l'acide muriatique, et en sépare la soude à l'état caustique. De-là il suit que si l'on trouvait quelque jour, ce qui paraît peu vraisemblable, la baryte caustique dans la nature, on aurait un moyen simple et facile d'obtenir la soude du sel marin. Quoique dans les circonstances les plus ordinaires, la soude ait plus d'affinité que l'alumine avec l'acide muriatique, cependant, en élevant beaucoup la température, on sépare une certaine quantité d'acide muriatique, et tel est le procédé qu'on emploie dans les fabriques d'eau forte pour faire ce que les artistes en ce genre appellent *esprit de sel*. Il est très-vraisemblable

que cette décomposition est en grande partie due à la présence des pyrites, presque toujours contenues dans les argiles siliceuses qui servent à cette opération.

La potasse est la seule entre les alcalis qui décompose le muriate de soude, il se forme du muriate de potasse, et la soude devient libre.

Extraction de l'acide muriatique du muriate de soude par l'acide sulfurique.

Plusieurs acides agissent sur le muriate de soude, et en dégagent l'acide muriatique; c'est sur cette action qu'est fondée l'opération de la distillation de l'acide muriatique, dans les laboratoires de chimie; pour cela on prend 100 parties de sel réduit en poudre, on l'introduit dans une cornue, ou dans un matras, et après avoir adapté à ce premier vase l'appareil de *Woulfe*, on y introduit peu-à-peu 0.75 parties d'acide sulfurique concentré, à l'aide d'un tube à double courbure. L'acide sulfurique s'unit à la soude; l'acide muriatique se dégage à l'état de gaz, et est reçu dans l'eau qu'on a placée sur son passage dans les bouteilles de *Woulfe*. La quantité d'eau est relative à celle du muriate de soude qu'on a employé: elle doit être à-peu-près égale à celle du muriate de soude. Lorsque l'effervescence est finie, on met un peu de feu sous l'appareil, et l'on augmente la chaleur par degrés, jusqu'à ce qu'il ne se dégage plus rien. Il est bon de ne mettre dans le premier flacon qu'une petite quantité d'eau, pour y placer un tube de sûreté, et retenir la portion d'acide sulfurique et d'oxide de fer qui s'élève vers la fin de l'opération, à la faveur du calorique et de l'acide muriatique.

L'acide muriatique obtenu par ce procédé, est très-concentré et très-blanc, tandis que celui des arts est peu concentré et toujours impur. Il a encore l'avantage de ne laisser perdre aucun vestige d'acide, comme cela a lieu par les procédés anciens.

Le résidu de cette opération est du sulfate de soude, ou sel de *Glauber*, dont on peut tirer parti pour l'usage de la médecine, ou pour la fabrication de la soude, ainsi qu'il sera exposé plus bas.

Comme ce résidu contient toujours de l'acide sulfurique en excès, il faut, lorsqu'on le destine à l'usage de la pharmacie, le saturer avec de la soude; mais cet alcali étant très-cher, relativement au sulfate de soude, la quantité qu'on obtiendrait de celui-ci ne paierait pas les frais; en

conséquence, il vaut mieux le saturer avec le carbonate de chaux, ou craie, et en faire le sacrifice. La saturation étant faite, on laisse reposer la liqueur, on filtre, on évapore et on fait cristalliser par le refroidissement; le sulfate de soude qu'on obtient est parfaitement pur, et peut servir à tous les usages auxquels est employé celui du commerce.

L'acide nitrique décompose à froid le muriate de soude; mais l'acide muriatique qui se dégage n'est pas pur; il est à l'état d'acide nitreux mêlé d'acide muriatique oxigéné (*Voyez l'article du muriate de potasse.*), où les mêmes effets ont lieu.

Les autres acides n'ont pas d'action à froid sur le muriate de soude; mais quelques-uns le décomposent à l'aide de la chaleur: tels sont l'acide phosphorique et l'acide boracique.

La raison de cette différence dépend de ce que l'acide muriatique tend à se combiner au calorique, lorsque celui-ci est accumulé et condensé, en quelque sorte, dans le muriate de soude, ce qui conséquemment affaiblit l'affinité entre les principes, tandis que les acides phosphorique et boracique n'ayant pas la même attraction par le calorique, leur tendance pour se combiner à la soude n'étant pas disséminée, il arrive une époque où l'affinité du calorique pour l'acide muriatique, et celle des acides fixes pour la base du sel marin, l'emportent, et la décomposition a lieu.

Dans un cas, il se forme du phosphate de soude; et, dans l'autre, du borate de soude.

Il n'y a point de réactif connu qui puisse faire découvrir la présence du muriate de soude en dissolution dans l'eau, parce qu'aucun ne précipite sa base; mais lorsqu'on s'est assuré, par des expériences préliminaires, que l'incertitude n'existe plus qu'entre le muriate de potasse et lui, on arrive à la solution du problème en versant quelques gouttes d'acide tartareux; s'il s'y forme, au bout de quelques jours, de petits cristaux brillans, ce sera un signe qu'on aura à faire au muriate de potasse; si au contraire il ne se forme point de précipité, ce sera du muriate de soude: c'est donc par une propriété négative qu'on reconnaît la présence de ce sel dans les eaux; il contient par quintal, suivant *Bergman*, 1°. de soude, 42; 2.° d'acide muriatique, 52; 3.° d'eau, 6; et suivant *Kirwan*, de soude, 50; d'acide, 33, et d'eau 17.

Depuis

Depuis plusieurs années on s'est beaucoup occupé des moyens d'extraire la soude du sel marin : presque tous les procédés qu'on a proposés se réduisent au même principe, c'est-à-dire, à convertir le muriate de soude en sulfate de soude, à décomposer celui-ci par le charbon, et à absorber le soufre par une terre calcaire, ou par le fer.

Extraction de la soude, du sel marin ou muriate de soude.

A Franciade ou Saint-Denis, on décomposait le sel marin par l'acide sulfurique, dans un fourneau de réverbère doublé en plomb, d'où l'acide muriatique dégagé se rendait, par des tuyaux, dans une chambre de plomb, et s'y combinait avec des vapeurs ammoniacales provenant de la décomposition de matières animales, qui se faisait dans un autre appareil, et donnait naissance à du sel ammoniac, ou muriate d'ammoniaque.

On prenait ensuite la matière restée dans le fourneau ; on la portait dans un autre fourneau de réverbère, où on la calcinait pour achever la décomposition du sel marin, et pour en chasser en même-temps la portion d'acide sulfurique excédante. Après cela on la mêlait avec autant de craie de Meudon, et 0.55 de charbon en poudre; on la soumettait de nouveau à un feu de réverbère : lorsque la masse entrait en fonte pâteuse, on la brassait avec des rables de fer, afin d'en multiplier les contacts avec le calorique, et de faciliter le dégagement du soufre. Lorsque l'effervescence due au dégagement des gaz formés pendant cette opération, est passée, et que la masse devient plus liquide, on diminue le feu, et on retire la matière encore toute rouge. A mesure qu'elle refroidit, elle se prend en masse dure qui a une couleur noirâtre ; on la casse par morceaux pour la mettre en magasin.

Pendant cette opération, le charbon s'unit à l'oxigène de l'acide sulfurique, et forme de l'acide carbonique, dont une partie reste en combinaison avec la soude; le soufre, séparé de l'oxigène, se divise en trois parties ; l'une qui se volatilise et brûle, l'autre s'unit à la chaux, et la troisième se combine à l'hydrogène provenant de la décomposition de l'eau, et se dégage à l'état de gaz hydrogène sulfuré, qui brûle à peu de distance de la matière. Comme la quantité de charbon qu'on emploie est beaucoup plus que suffisante pour décomposer l'acide sulfurique, et même l'eau retenue dans les matériaux, il en reste une portion qui lui donne une couleur grisâtre et quelque ressemblance avec la soude ordinaire du commerce. Il paraît que la grande quantité de craie qu'on mêle au sulfate de soude, favorise la séparation

du soufre, et en absorbe une certaine quantité avec laquelle il forme une composition peu soluble dans l'eau. Cent parties du mélange des matières énoncées plus haut, fournissent à-peu-près 0.58 de soude brute.

Cette soude, exposée pendant quelque temps à l'air, se divise en absorbant de l'eau et de l'acide carbonique de l'atmosphère; lessivée dans cet état, elle produit 0.64 de carbonate de soude cristallisé. Cette soude peut servir à tous les usages auxquels on emploie la soude ordinaire, comme dans les verreries, les savonneries, les blanchisseries, &c.

A Javelle on suit à-peu-près le même procédé pour décomposer le sulfate de soude, à cette différence, qu'au lieu de se servir de craie pour absorber le soufre, on emploie des rognures de fer-blanc, de tôle et toute sorte de vieilles ferrailles.

Voici les proportions qu'on observe entre les différentes matières:

1.° Sulfate de soude 100;
2.° Charbon 0.31;
3.° Rognures de fer . . . . 0.33.

Mais la soude qui en résulte ne peut pas être d'un usage aussi étendu à cause du sulfure de fer qu'elle contient: il faut nécessairement en séparer, par le lessivage, la partie alcaline. Les manipulations, et les appareils employés à Javelle, ressemblent presqu'entièrement à ceux de Saint-Denis: mais on a pour objet principal dans cette fabrique, en décomposant le muriate de soude, de faire de l'acide muriatique oxigéné, que l'on reçoit dans une dissolution de soude retirée des résidus d'opérations antérieures, et qu'on a rendue caustique par la chaux (1).

Pour extraire l'alcali pur de la matière brute, on l'expose pendant quelque temps à l'air, où elle se divise, absorbe de l'eau et de l'acide carbonique; ensuite on la lessive dans des tonneaux avec de l'eau froide.

On a encore proposé plusieurs autres procédés pour retirer la soude du sel marin; les uns ont employé le sulfate de fer et le charbon; les autres le sulfure de fer ou la pyrite martiale; quelques-uns la chaux, l'oxide de

---

(1) Ils font avec ce mélange une liqueur pour blanchir les toiles, les fils, &c.; elle porte le nom de *lessive de Javelle;* elle blanchit assez bien: cependant elle a l'inconvénient de ne pouvoir être chauffée sans perdre une portion d'acide; et si l'on travaille à froid, la dissolution de la matière colorante dans l'alcali se fait difficilement.

plomb, les tourbes pyriteuses, &c. Mais comme ces moyens n'ont pas encore été exécutés en grand, et qu'on ne connaît pas bien les avantages qu'on pourrait en retirer, nous n'entrerons ici dans aucun détail à cet égard. Les personnes qui désireraient avoir des connaissances plus étendues sur cela, pourront consulter un excellent rapport des citoyens *Pelletier*, *Lelièvre* et *Darcet*, imprimé, par ordre du Gouvernement, en pluviôse, an 2.

Le muriate de soude est d'un usage très-multiplié dans les arts et dans les opérations domestiques; on s'en sert dans les manufactures de poterie et de faïence, pour aider la vitrification de la surface; en chimie, pour faire l'acide muriatique simple et oxigéné, pour faciliter la fusion des substances métalliques et les garantir du contact de l'air; chez les tanneurs, pour préparer les cuirs de Hongrie; enfin on l'emploie dans les salaisons pour conserver les matières végétales et animales, et à mille autres usages.

Du Muriate d'ammoniaque.

Le muriate d'ammoniaque est l'union de l'ammoniaque, ou alcali volatil, avec l'acide muriatique ou marin.

Ce sel a une saveur piquante et ammoniacale, il est légérement ductile, c'est-à-dire qu'il est flexible, qu'il s'aplatit lorsqu'on le presse; sa pesanteur spécifique est 1,42 ; la chaleur ne le décompose pas, mais elle le réduit en vapeurs.

L'eau, à la température de 10 degrés, en dissout 0.35 de son poids; l'eau bouillante en dissout beaucoup davantage, de manière qu'elle en dépose une grande quantité par le refroidissement. Sa forme est celle d'un prisme à quatre pans terminés par des pyramides à quatre faces.

On le rencontre souvent aux environs des volcans, où il se présente sous différentes couleurs, savoir le gris, le noirâtre, le rouge, le vert, &c. On le trouve quelquefois en dissolution dans les eaux de certains lacs de Toscane; il existe aussi dans quelques montagnes de la Tartarie et du Thibet, dans les cavernes ou grottes de Pouzzole, &c.

Manière de fabriquer le sel ammoniac en Égypte.

Le muriate d'ammoniaque du commerce est le produit de l'art; c'est particulièrement en Égypte qu'on fabrique cette substance saline, avec les excrémens des animaux qui se nourrissent de plantes salées. Pour cela on ramasse la fiente des bœufs, des chameaux, et de plusieurs autres animaux;

on la fait dessécher en l'appliquant à la surface des murs, et on la brûle ensuite dans les foyers domestiques pour se chauffer.

La suie qui résulte de la combustion de ces matières est recueillie avec soin, et on la met dans de grandes bouteilles de verre d'un pied et demi de diamètre, terminées par un cou de deux doigts de haut. On les expose à l'action d'un feu assez vif, que l'on continue pendant 72 heures. Le sel ammoniac s'élève à la partie supérieure du ballon, où il s'attache et prend la forme d'une demi-sphère creuse ; les matières charbonneuses et fuligineuses restent au fond, parce qu'elles ne sont pas volatiles ; il y a cependant toujours un peu d'huile empyreumatique, à moitié décomposée, qui se volatilise aussi, et qui colore les pains de sel ammoniac par la partie supérieure. La suie de fiente de chameau donne communément 0.3 de son poids de sel ammoniac.

Ce sel ne se forme point pendant la combustion des excrémens, comme quelques personnes l'ont pensé ; il existe, et dans les fientes, et dans les urines de ces animaux. Il est vraisemblable que c'est le sel marin contenu dans les végétaux dont les animaux se nourrissent, qui est décomposé pendant la digestion et l'assimilation, et changé en muriate d'ammoniaque. *Chaptal* a fait quelques observations qui semblent prouver ce fait : il a vu que lorsque les bestiaux mangeaient des herbes fraîches et non salées, leurs excrémens ne fournissaient presque point de muriate d'ammoniaque ; mais que dans l'hiver, où ils mangent des plantes salées, faute de douces, ils en fournissent beaucoup : il paraît donc évident que le sel marin éprouve une décomposition par l'action des forces animales ; mais je ne crois pas, comme *Chaptal*, que la soude soit convertie en ammoniaque, puisqu'il n'y a pas d'expériences directes qui le prouvent ; il est plus vraisemblable que l'acide muriatique s'unit à l'ammoniaque qui se forme continuellement dans l'économie animale, et que la soude reste en combinaison dans les humeurs animales, qui n'en sont jamais exemptes, et sur-tout avec l'acide phosphorique, qui semble être aussi un produit animal.

Procédés suivis en France pour faire le sel ammoniac.

Il s'est élevé plusieurs manufactures, dans lesquelles on fabrique le sel ammoniac de toutes pièces, en distillant toutes sortes de matières animales dans des espèces de fourneaux qui font l'office de grandes cornues,

et en mêlant le produit aqueux, chargé de carbonate d'ammoniaque, avec des eaux mères des salines des départemens de la Meurthe, du Jura, du Mont-Blanc, &c. qui contiennent des muriates de chaux et de magnésie : ces sels sont décomposés par le carbonate d'ammoniaque, à l'aide d'une double attraction, dans laquelle l'acide muriatique s'unit à l'alcali volatil, et l'acide carbonique à la chaux et à la magnésie. Ces deux dernières combinaisons étant insolubles, se précipitent, et le muriate d'ammoniaque reste dans la liqueur : on fait évaporer celle-ci jusqu'à siccité; on sublime ensuite le sel dans des vases de terre, qui, en s'ouvrant en deux parties, facilitent l'extraction de la matière, et peuvent servir à plusieurs opérations.

A Franciade (Saint-Denis), on combinait directement l'acide muriatique retiré du sel marin par l'acide sulfurique, avec le produit de matières animales distillées dans des tuyaux de fonte.

Le muriate d'ammoniaque est décomposé par la baryte, la chaux et même la magnésie, à l'aide de la chaleur : c'est sur cette propriété qu'est fondé l'art de préparer l'ammoniaque.

Préparation de l'ammoniaque, ou alcali volatil.

Pour cette opération, l'on prend ordinairement deux parties de chaux et une partie de sel ammoniac, l'un et l'autre pulvérisés; on les introduit dans une bonne cornue de grès, à laquelle on adapte un ballon tubulé, d'où part un tube communiquant dans une bouteille pleine d'eau; si une ne suffit pas, on en met deux, trois, &c.

La quantité d'eau mise dans ces bouteilles doit être à-peu-près égale à celle du sel employé. A mesure que l'ammoniaque se dégage à l'état de gaz, elle est dissoute par l'eau, et forme ce qu'on appelait autrefois l'*alcali volatil fluor*. L'acide muriatique reste dans la cornue uni à la chaux. Le muriate qui résulte de cette combinaison, est avec excès de chaux; il a été nommé *phosphore de Baudoin*, parce que, frotté dans l'obscurité, il répand des traces de lumière assez vive. Exposé dans un lieu humide, il se fond en partie et se réduit en un liquide épais et doux au toucher, ce qui lui avait valu la dénomination d'*huile de chaux*.

Quelques acides, et spécialement l'acide sulfurique, décomposent

ce sel ; il résulte de l'acide muriatique et du sulfate d'ammoniaque : mêlé avec l'acide nitrique, il forme une espèce d'eau régale, qui dissout très-bien l'or. A froid, le muriate d'ammoniaque est décomposé par l'acide nitrique ; mais c'est le contraire à chaud.

Les carbonates alcalins et terreux décomposent aussi le muriate d'ammoniaque. En traitant ce sel avec le carbonate de chaux, on fait le carbonate d'ammoniaque. A une haute température, l'acide muriatique s'unit à la chaux, et l'acide carbonique à l'ammoniaque, qui s'élèvent en vapeurs à l'état de carbonate d'ammoniaque. A froid, le contraire arrive.

Cent parties de muriate d'ammoniaque sont composées,

1.° D'ammoniaque 40;
2.° D'acide muriatique................ 52;
3.° D'eau .... 8.

Ce sel est très-utile dans les arts, en chimie et en médecine ; il sert en teinture pour aviver certaines couleurs, pour étamer les métaux dont il décape la surface et l'empêche de s'oxider ; on l'emploie, en docimasie, pour reconnaître la présence du fer dans les minéraux, parce qu'il en favorise la sublimation ; enfin, il est très-usité en médecine pour la préparation de médicamens tant externes qu'internes.

Du Muriate de chaux.

Le muriate de chaux est la combinaison de l'acide muriatique avec la chaux ; il existe presque par tout, mais en petite quantité. On le trouve dans les matériaux salpêtrés, dans les terres calcaires, dans les eaux de la mer, les eaux mères des salines, des puits de Paris, &c.

Celui dont nous nous servons est fait de toutes pièces, en décomposant du carbonate de chaux transparent et cristallisé par l'acide muriatique. Ce sel a beaucoup d'affinité avec l'eau ; c'est pourquoi il attire puissamment l'humidité de l'air, et il ne cristallise que difficilement : cependant, par une évaporation convenable, sa dissolution fournit des cristaux dont la forme est celle d'un prisme à six pans égaux, avec des pyramides à faces. Lorsqu'on a beaucoup rapproché la dissolution du muriate calcaire, elle se refroidit sans cristalliser si elle est dans un repos absolu ; mais si l'on vient à l'agiter, tout-à-coup elle se prend en une masse solide et

dure comme de la pierre, d'où il se dégage une grande quantité de calorique. Cent parties de muriate calcaire contiennent, suivant *Bergman*, 1.° de chaux, 44; 2.° d'acide, 31; 3.° d'eau, 25. Sa saveur est âcre et amère; il perd une portion de son acide par l'action d'un feu violent, mais jamais la totalité.

La baryte et les alcalis fixes décomposent le muriate de chaux, parce qu'ils ont avec l'acide muriatique plus d'affinité que cette terre. L'ammoniaque ne l'altère en aucune manière lorsqu'elle est bien pure.

Les acides sulfurique, nitrique et oxalique, le décomposent aussi, en s'emparant de sa base. Comme le dernier de ces acides enlève la chaux à tous les autres, et qu'il forme une combinaison entièrement insoluble, on s'en sert avec beaucoup de succès pour reconnaître la présence de cette substance par tout où elle existe, soit libre, soit à l'état de combinaison.

Tous les sulfates, excepté celui de chaux, avec le muriate calcaire, éprouvent réciproquement des décompositions; il se forme dans toutes ces circonstances du sulfate de chaux, et des muriates différens, suivant la nature des sulfates employés. Les borates et carbonates alcalis produisent le même effet sur le muriate de chaux; dans un cas, c'est du borate calcaire qui est formé; dans l'autre, c'est du carbonate. Lorsqu'on mêle une dissolution de muriate de chaux concentrée, avec une dissolution également chargée de carbonate de potasse du commerce, il se précipite une si grande quantité de carbonate de chaux, que les liqueurs deviennent épaisses comme du mortier; et c'est ce phénomène qu'on avait appelé autrefois *miracle chimique*.

On a vu à l'article du muriate d'ammoniaque, que le carbonate de chaux était décomposé par ce sel, au moyen du calorique : cela paraît contradictoire avec l'énoncé, où il est dit que les carbonates alcalins, parmi lesquels est compris celui d'ammoniaque, décomposent le muriate calcaire; mais en examinant avec attention les circonstances qui accompagnent l'une et l'autre opération, on s'apercevra bientôt qu'il n'y a véritablement point de contradiction, car elles ne sont pas les mêmes : d'un côté, en effet, on agit à froid, et au milieu de l'eau; de l'autre, au contraire, on opère à sec et à une température élevée: or, ici les affinités changent, le calorique tend

à s'unir à l'acide et à le séparer de la chaux; d'une autre part, celle-ci exerce sur l'acide muriatique une action très-considérable, qui affaiblit celle de l'ammoniaque pour le même acide, tandis que l'acide carbonique l'attire pour se volatiliser avec elle. C'est de la réunion de ces différentes forces que naît le changement d'équilibre entre les principes de ces sels et leur décomposition réciproque : de-là il suit que dans l'expression des affinités relatives des corps les uns pour les autres, il faut toujours faire état du degré de chaleur. Le muriate de chaux n'est guère d'usage qu'en médecine, où on l'emploie comme fondant : il est très-dissoluble dans l'alkool, ce qui donne une grande facilité pour le séparer des autres sels auxquels il est mêlé.

Du Muriate de baryte.

Ce sel est toujours le résultat de la combinaison artificielle de la baryte avec l'acide muriatique; cependant *Bergman* dit qu'il existe dans quelques eaux minérales de Suède.

On le prépare ordinairement en décomposant le sulfure de baryte avec l'acide muriatique; mais comme le sulfate de baryte contient souvent de l'oxide de fer, l'acide muriatique s'y unit en même temps qu'à la baryte; d'où il arrive que ce sel a une couleur jaune. On le débarrasse facilement de cette matière étrangère, en l'exposant au feu pendant quelques instans dans un creuset; dès qu'il commence à rougir, le muriate de fer se décompose, son acide se volatilise, et il ne reste plus que l'oxide de fer avec le muriate de baryte, qu'il suffit de dissoudre dans l'eau pour l'avoir pur.

Ce sel a une saveur amère, et comme métallique. Sa forme est celle de tables quarrées, dont les bords sont bisellés et les sommets dièdres; il a une pesanteur spécifique très-considérable; il exige pour se dissoudre entre cinq et six parties d'eau froide. Cette combinaison se fait plus abondamment à l'aide de la chaleur, et elle cristallise par le refroidissement.

Le muriate de baryte n'est décomposé par aucune substance terreuse ni alcaline, parce que la baryte a en général plus d'affinité avec les acides que toutes ces matières : mais plusieurs acides en opèrent la décomposition; tels sont l'acide sulfurique, l'acide nitrique et l'acide oxalique. Comme l'acide sulfurique forme avec la baryte un sel parfaitement insoluble dans

l'eau,

l'eau, *Bergman* propose ce sel, avec beaucoup de raison, pour découvrir les plus petites traces d'acide sulfurique dissous dans les eaux, ou dans toute autre matière. Ce chimiste a vu que de l'eau qui tient seulement 0.0004 de son poids de sulfate de soude récemment cristallisé, donne sur-le-champ un précipité très-sensible, en y mettant une seule goutte de dissolution de muriate de baryte; que 0.00009 de ce sel dissous dans la même quantité d'eau, fournissent en quelques minutes un nuage très-évident, qu'enfin 0.00003 de sulfate de soude dans la même quantité d'eau, occasionnent un nuage léger, qui demande plusieurs heures pour devenir visible.

On voit, d'après ces expériences, combien le sulfate de baryte est indissoluble, puisque 100 parties de sulfate de soude cristallisé ne contiennent que 0.27 d'acide sulfurique.

L'acide nitrique décompose aussi le muriate de baryte : on s'assure facilement de ce fait, en mettant dans une dissolution un peu concentrée de ce sel quelques gouttes d'acide nitrique, elles y forment un précipité cristallisé, qui demande ensuite 10 à 12 parties d'eau pour se dissoudre. De-là il suit que si l'on veut savoir si de l'acide nitrique contient de l'acide sulfurique ou quelques sulfates, en se servant du muriate de baryte, il faut avoir soin d'étendre d'eau les liqueurs, car sans cela l'on pourrait être induit en erreur, en attribuant à l'acide sulfurique ce qui ne serait dû qu'à la combinaison de l'acide nitrique avec cette substance terreuse.

L'acide oxalique produit le même effet sur le muriate de baryte; il forme dans sa dissolution un dépôt cristallin qui est dissoluble dans à-peu-près 20 parties d'eau. Après l'acide sulfurique, c'est celui qui a le plus d'affinité avec la baryte, puisqu'il décompose tous les autres sels barytiques.

Les carbonates alcalins décomposent aussi ce sel, et forment d'une part du carbonate de baryte, et différens muriates, suivant qu'on a employé tel ou tel carbonate.

Cent parties de muriate de baryte contiennent,

1.° de baryte. 60;
2.° d'acide muriatique. 24;
3.° d'eau. . . . . 16.

Le muriate de baryte est un réactif extrêmement précieux pour l'analyse

de l'acide sulfurique, mais encore pour s'assurer si les alcalis sont purs, et beaucoup d'autres substances encore.

On l'a employé, il y a déjà quelques années, en Angleterre pour l'usage de la médecine : à la dose de quelques grains, il est, dit-on, fondant ; une plus grande quantité purge violemment, et même excite le vomissement. Depuis que des expériences multipliées, faites sur des chiens, ont appris que le carbonate de baryte, soit natif, soit artificiel, est un poison mortel, les médecins doivent mettre beaucoup de prudence dans l'administration en médecine de ses différentes combinaisons.

Du Muriate de magnésie.

Ce sel a peu de propriétés importantes ; il se rencontre très-fréquemment en dissolution dans les eaux, dans des terrains calcaires, dans des matériaux salpêtrés, où il accompagne constamment les nitrate & muriate de chaux, &c.

Sa saveur est amère et désagréable ; il attire l'humidité de l'air, et se résout en liqueur : sa dissolution dans l'eau cristallise difficilement ; le sel qu'elle fournit est mou, et n'offre que rarement des formes régulières.

Il est décomposé par la chaleur qui en chasse l'acide, et la magnésie reste pure.

Les alcalis & les terres, excepté l'alumine, décomposent le muriate de magnésie ; cependant l'ammoniaque n'en opère pas la décomposition complète, parce qu'il se forme une espèce de sel triple, comme avec les autres sels de magnésie. L'acide sulfurique et nitrique décomposent le muriate de magnésie : les carbonates alcalis en séparent la magnésie à l'état de carbonate ; mais lorsqu'ils sont entièrement saturés d'acide carbonique, ils ne forment aucun précipité dans sa dissolution, parce qu'alors ils contiennent assez d'acide carbonique pour opérer la dissolution du carbonate de magnésie dans la liqueur. En la faisant bouillir ensuite pendant quelques minutes, l'acide carbonique se dissipe, et le carbonate terreux se dépose.

Ce fait prouve que la quantité de potasse, de soude ou d'ammoniaque nécessaire à la saturation de l'acide muriatique uni à la magnésie, contient

plus d'acide carbonique qu'il n'en faut pour saturer la magnésie.

Le muriate de magnésie n'est presque d'aucun usage; ses principes sont, suivant *Bergman*, dans les rapports suivans: magnésie 41, acide muriatique 34, eau 25.

Du Muriate d'alumine.

Ce sel est encore moins connu que le précédent; on sait seulement que l'acide muriatique s'unit facilement à l'alumine, dont il est difficile de le saturer parfaitement; que sa dissolution prend une couleur jaune par l'évaporation, et qu'elle fournit une masse gélatineuse, demi-transparente, de la même couleur que la dissolution;

Qu'enfin il est décomposé par tous les alcalis et les terres, et par plusieurs acides.

Voilà les principaux objets qui ont rempli les séances des mois de messidor, thermidor et fructidor de l'an 3, à l'école polytechnique. On ne trouvera dans ce récit que peu de choses de neuf; mais j'ai cru qu'il serait agréable aux élèves et à ceux qui s'intéressent aux arts fondés sur les propriétés des matières salines, de trouver réunies ces principales propriétés.

VAUQUELIN.

2.e DIVISION.

SUBSTANCES VÉGÉTALES.

Les végétaux, ainsi qu'il a été remarqué dans une des séances précédentes, n'exigent, pour leur nutrition, leur développement, qu'un petit nombre de substances simples, ou du moins peu composées, et cependant les produits de la végétation sont très-nombreux, très-différens par leurs propriétés, et conséquemment par l'ordre de leur composition plus ou moins complexe; ils ne se trouvent pas également dans toutes les plantes, dans tous les climats, dans tous les périodes de la végétation; plusieurs n'existent que dans certaines plantes, et seulement dans leur état de

vigueur et de maturité; quelques-uns sont l'effet d'une altération accidentelle, de la piqûre d'un insecte, ou sont déposés et séparés dans un organe particulier; d'autres sont uniformément répandus dans tout le tissu de la plante, et mêlés d'une manière plus ou moins intime avec toutes les parties; quelquefois la nature en fait une excrétion spontanée, où, pour les obtenir isolés, il suffit d'employer des procédés simples, tels que l'expression, le repos, la filtration, la lotion, l'infusion, la décoction (1), ou la distillation; mais souvent aussi il faut avoir recours à l'action de

---

(1) On a compris jusqu'à présent, sous la dénomination d'*infusion*, deux objets très-différens; savoir, l'opération, et son produit: mais actuellement que la chimie a porté dans sa langue l'exactitude, la précision la plus rigoureuse, qu'elle a même créé des termes pour distinguer les différens états d'un acide, d'une combinaison, il faut étendre ces principes à toutes les parties de la science, rejeter les expressions vagues qui confondent deux objets essentiellement distincts, ou au moins il faut en limiter la véritable signification et y attacher une acception précise.

D'après ces considérations, il nous paraît que le mot *infusion* doit être réservé uniquement pour désigner l'action, l'opération d'extraire, de séparer d'une substance, quelques-uns de ses principes par l'affusion et le séjour d'un liquide dont la température ne s'élève pas au degré de l'ébullition; et nous nommons *infusum* le produit de l'opération, le fluide qui s'est chargé d'une partie de la substance sur laquelle il a été appliqué. Enfin, comme l'opération peut se faire avec différens fluides, on exprime ces différences en ajoutant à la dénomination première une épithète convenable: ainsi nous nommons *infusum aqueux de menthe*, le produit que l'on obtient en versant et en laissant séjourner une certaine quantité d'eau sur la menthe; *infusum vineux de quinquina*, la préparation que l'on nomme ordinairement *vin de quinquina*; *infusum alkoolique de coloquinte*, *de noix de gale*, ces préparations que les pharmacopées désignent sous les noms de *teinture spiritueuse de coloquinte*, *de noix de gale*; *infusum huileux d'absinthe*, ou huile d'absinthe par infusion.

On doit également distinguer la *décoction*, de son produit que nous nommons *decoctum*; enfin, ces observations doivent s'étendre à plusieurs dénominations analogues, et sous lesquelles on a confondu, dans notre langue, l'opération et le produit.

Ces distinctions nominales pourront paraître minutieuses, peut-être même déplacées, à quelques personnes; mais outre que la clarté, la justesse, la précision des idées et des mots qui les rappellent, ne sont jamais des objets indifférens pour la jeunesse qui entre dans la carrière des sciences, cet esprit d'ordre et de méthode établi dans la nomenclature chimique, s'introduira peu-à-peu dans les arts qui en dépendent; il s'introduira sur-tout dans la pharmacie; il contribuera à en écarter ces dénominations absurdes, emphatiques, qui ne servent qu'à cacher, sous un voile mystérieux, la nature des préparations les plus simples; il contribuera ainsi à dissiper cette obscurité que le charlatanisme, l'ignorance et la cupidité ont tant d'intérêt à défendre et à conserver.

différens dissolvans, tels que l'alkool, l'éther, les acides, &c. Enfin, dans l'application de ces divers moyens, toujours il faut apporter la plus grande attention sur la nature, la quantité de fluide dissolvant que l'on emploie; sur le mode, la durée de l'opération, et principalement sur le degré de température : car les produits de l'organisation s'altèrent, se décomposent facilement; leurs principes se séparent d'abord, se réunissent ensuite dans un nouvel ordre, et forment ainsi des combinaisons qui n'existaient pas auparavant dans la plante. Ainsi l'analyse végétale présente bien des difficultés; elle exige non-seulement des attentions particulières et une série de procédés mécaniques ou chimiques, qui doivent varier suivant les circonstances; mais encore elle doit embrasser le système entier des végétaux; elle doit en considérer également les genres, les espèces; elle doit sur-tout les observer dans leurs divers états de développement, même d'altération et de mort; enfin, comme le dit *Chaptal*, « il faut en même » temps voir le végétal en philosophe, en physicien, en chimiste; il faut » consulter les opérations mêmes de la nature. »

Ces considérations ont déterminé la marche qui a été suivie dans cette partie du cours. Comme l'exposition complète exigerait de longs détails qui pourraient paraître déplacés ici, nous nous bornerons à indiquer seulement quelques-uns des objets principaux qui ont été examinés successivement.

Le *muqueux*, ou *mucilage*, est le premier et le plus abondant des produits de la végétation; il se trouve dans toutes les plantes, à toutes les époques de leur vie : étendu avec une certaine quantité d'eau, il constitue cette sève qui circule dans toutes leurs parties; mais il y change sans cesse d'état et de forme : fluide, aqueux, abondant au printemps et dans les jeunes plantes, il prend avec l'âge plus de consistance, et passe successivement par différens degrés de composition; quelquefois on le trouve uni à des parties résineuses, ce qui forme les sucs laiteux de quelques végétaux; d'autres fois il est combiné avec des sels acides, comme dans plusieurs fruits d'été; plus souvent encore il est combiné avec le sucre, comme nous l'observons dans les graminées, dans quelques racines, dans la plupart des fruits d'automne; enfin, par les changemens, les combinaisons successives qu'il éprouve, il forme les différentes liqueurs, et paraît

être l'élément de la fibre ligneuse et de toutes les parties solides de la plante.

On trouve le muqueux en grande quantité dans le tissu de l'écorce de la plupart de nos arbres, sur-tout au renouvellement de la végétation; souvent il suinte par une fissure spontanée qui se fait à l'écorce : on en détermine l'excrétion par une incision, une entamure accidentelle, et alors il prend plus de consistance, s'épaissit, se désséche et forme les *gommes.*

Ces substances sont non-seulement très-utiles dans beaucoup d'arts, mais encore elles peuvent, dans quelques cas, fournir une ressource précieuse pour servir à la nourriture. L'expérience de quelques voyageurs, de quelques peuples d'Arabie, a démontré que la gomme formait un aliment très-sain, d'une digestion facile; et, en considérant avec quelle abondance le muqueux se trouve dans le tissu cortical du tilleul, de l'orme, de nos arbres les plus communs; en considérant que la gomme ne paraît différer du muqueux que par la dessiccation, et peut-être par un degré d'élaboration ultérieure, ne pourrait-on pas, par des préparations simples et faciles, obtenir des arbres de nos climats cette substance que l'on importe de l'Arabie? Des expériences faites dans le laboratoire, quelques essais faits dans une manufacture, semblent confirmer cette espérance; mais ces premiers aperçus exigent encore de nouvelles recherches; nous nous en occupons, et nous nous proposons d'en rendre compte dans un mémoire particulier.

La *fécule* est une matière sèche, pulvérulente, qui, au premier coup d'œil, paraît entièrement différente du muqueux; cependant, quand on examine, quand on compare ces deux substances, on reconnaît bientôt qu'elles se rapprochent et se confondent par plusieurs propriétés communes. En effet, toutes deux fournissent à-peu-près les mêmes produits par la combustion, la distillation; toutes deux peuvent servir à la nourriture des animaux, passer à la fermentation acide; enfin elles sont également insolubles dans l'alkool. Mais le muqueux, comme nous l'avons déjà indiqué plus haut, se trouve abondamment dans les jeunes plantes, et il est facilement soluble dans l'eau froide ou chaude. La fécule, au contraire, se forme lentement, ne paraît que dans l'état de vigueur et de maturité de la plante; elle se précipite promptement dans l'eau froide; elle ne se dissout que

dans l'eau chaude, et prend alors une consistance gélatineuse, visqueuse, qui forme une espèce de colle, fort employée dans les arts.

Aussi, d'après la comparaison de ces différentes propriétés, les chimistes modernes s'accordent généralement à regarder la fécule comme une élaboration nouvelle et ultérieure du muqueux, produite par l'action organique de la plante, et vraisemblablement aussi par la diminution du calorique. En effet, en observant les progrès de la végétation, on reconnaît que le muqueux, d'abord aqueux et abondant, diminue peu-à-peu, prend de la viscosité; et lorsque la plante approche de sa maturité, on y trouve beaucoup de fécule et peu de muqueux: on voit aussi au printemps la fécule déposée dans le tissu des graines et des racines, se changer, se convertir successivement en muqueux. Ainsi la fécule, si abondante dans la pomme de terre, se détruit peu-à-peu lorsque la plante commence à germer; et la racine de la mauve rose (*alcea rosea*) qui dans l'été ne contient que du muqueux, fournit au printemps, et avant la foliaison, une farine vraiment nourrissante.

Outre les propriétés nutritives de la fécule et l'emploi que l'on en fait dans les arts, le luxe en a introduit l'usage pour poudrer les têtes: la vanité, la mode, cette imitation servile et irréfléchie, le perpétuent encore: et comme c'est uniquement du froment et des graines des plantes graminées que l'amidonier extrait la fécule qui forme la poudre, cette préparation occasionne tous les ans la perte, la destruction d'une quantité immense de ces graines précieuses à la nourriture de l'homme; ce qui enlève ou au moins diminue la subsistance du pauvre: cependant la fécule existe dans un très-grand nombre de plantes qui croissent spontanément, qui ne sont point employées à nos besoins et sont même nuisibles à l'agriculture: telles sont généralement les racines tubéreuses, charnues ou bulbeuses, comme celles de bryone, de pied-de-veau, de serpentaire (*arum dracunculus*), d'iris, de glayeul, de colchique, d'orchis, &c., le gland, le marron d'Inde, &c.; nous en avons même retiré une assez grande quantité de l'agaric du mélèze, qui se trouve dans les boutiques sous le nom d'*agaric blanc* ou *purgatif*.

Dans plusieurs de ces plantes la fécule est souvent unie à des parties salines, résineuses ou extractives, qui lui donnent de la couleur, de

l'âcreté, et pourraient en faire un irritant nuisible si on la destinait à servir d'aliment; mais outre qu'on peut facilement lui enlever ces parties étrangères par des lotions réitérées, et l'amener ainsi à l'état de ténuité, de blancheur, de pureté que l'on désire, ces précautions sont superflues si la fécule est seulement destinée pour les arts à la préparation de la colle. Ne serait-il pas même avantageux de conserver ces parties amères, extractives, qui se trouvent naturellement mêlées dans quelques fécules? Pendant plusieurs années nous avons vu des relieurs, des fabricans de carton employer des colles uniquement faites avec des farines de gland, de marron d'Inde (1), et leurs ouvrages ont paru non-seulement très-solides, mais encore moins sujets à être attaqués par les insectes.

En suivant les progrès de la végétation, l'*huile* se présente en quatrième ordre. Cette substance combustible, insoluble dans l'eau, si remarquable par ses altérations, ses combinaisons, est, de même que le muqueux, la gomme et la fécule, un des produits caractéristiques de la vie, de l'action organique; en effet, ce n'est que dans les végétaux et les animaux que l'on trouve des huiles; celles que l'on obtient de quelques minéraux, n'y sont que des productions étrangères, accidentelles, et encore elles paraissent devoir leur origine aux débris ou aux altérations des corps organisés.

Long-temps on a regardé l'huile comme une substance simple; mais aujourd'hui il est démontré, sur-tout d'après les belles expériences de *Lavoisier,* que l'huile est une substance essentiellement composée de carbone et d'hydrogène, et qui diffère des premiers produits de la végétation, seulement par une proportion plus grande d'hydrogène et une combinaison plus intime.

On distingue généralement deux classes d'huiles; l'une comprend les huiles fixes, et l'autre les volatiles.

On appelle *huiles fixes,* celles qui sont grasses, onctueuses, insolubles dans l'alkool, se vaporisent difficilement au degré de l'ébullition de l'eau, s'altèrent et se décomposent à une température plus élevée. On peut les

---

(1) Comme dans ces fruits la fécule est très-abondante, il est inutile, pour ces sortes d'ouvrages, de la séparer du tissu parinchymateux par la lotion; il suffit de dépouiller le gland, ou le marron, de son écorce; de les réduire en farine, que l'on passe ensuite au travers du tamis de soie, avant d'en faire la colle.

diviser

diviser en trois genres, par rapport à quelques propriétés particulières et constantes.

1.° Les huiles *gélides*, celles qui se gèlent ou se figent facilement par la diminution de la température habituelle de nos climats, qui s'épaississent lentement par le contact de l'air, et ne s'enflamment que par la réunion des acides sulfurique et nitrique; telles sont les huiles d'olive, d'amande, de navette, &c.

2.° Les huiles *siccatives*, celles qui ne se figent pas facilement, mais qui sèchent, s'épaississent promptement par le contact de l'oxigène, et s'enflamment par l'affusion de l'acide nitrique seul; telles sont les huiles de lin, de pavot, de chenevis, &c.

3.° Les huiles *céracées*, que l'on nomme encore quelquefois beurres végétaux, celles qui sont ordinairement concrètes et ne se fluidifient qu'à une température élevée au-dessus du 32.e degré du thermomètre de *Réaumur*; telles sont les huiles de cacao, de coco, le *galé* de la Chine.

C'est principalement dans les graines ou dans quelque organe particulier, et seulement dans le temps de la maturité des plantes, que l'on trouve les huiles; avant cette époque, le muqueux est mêlé avec les parties huileuses et forme une liqueur laiteuse ou *émulsive*. Généralement toutes les huiles fixes sont douces, mais comme pour les obtenir on emploie la trituration, l'expression, souvent même une température élevée, les parties résineuses, extractives, déposées dans le tissu cortical de la graine, sont dissoutes, entraînées par l'huile qui contracte ainsi une couleur, une saveur, des propriétés particulières. Aussi toutes les huiles varient suivant l'espèce de graine dont on les extrait, le temps de maturité, et sur-tout suivant la préparation que l'on a employée pour les extraire.

Quoique l'on connaisse déjà un grand nombre de plantes *oléagineuses* que l'on cultive, ou dont on récolte les graines, quoique l'on sache qu'en général toutes les graines des végétaux peuvent fournir de l'huile, il est cependant quelques plantes qui, soit par la quantité, soit par la nature de l'huile qu'elles peuvent fournir, méritent une attention particulière, sur-tout quand elles n'exigent aucune culture, ou qu'elles ne peuvent nuire aux productions de première nécessité pour nos besoins; tel est sur-tout le pédane ou épine blanche (*onopordon acanthium*), qui croît si

facilement dans les terres incultes, le long des chemins, et dont la graine a fourni à *Durande* une huile très-bonne pour les lampes; tel est encore le fusain (*evonimus europæus*): cet arbrisseau, charmant par son port, son feuillage, ses fleurs rosacées, croît spontanément dans nos forêts; il porte une grande quantité de semences ovales, entourées d'une membrane jaune, pulpeuse, et renfermées dans une capsule succulente, divisée en quatre ou cinq loges, qui prend en mûrissant une belle couleur rouge. Ces semences, séparées de leur capsule et soumises aux procédés ordinaires de la trituration et de l'expression, nous ont fourni une quantité remarquable d'huile, d'une belle couleur jaune, d'une saveur âcre, et par conséquent impropre pour les préparations alimentaires, mais dont l'usage pour plusieurs objets d'arts et d'économie domestique, ne nous a pas paru inférieur à celui des huiles ordinaires. La récolte de ces fruits doit se faire en brumaire, elle est abondante; elle n'entraîne ni dépenses, ni perte de temps, et peut même se confier à des enfans; et comme cet arbrisseau n'est attaqué ni par les insectes, ni par le bétail; comme il se multiplie facilement, et se prête à toutes les formes, il nous paraît qu'il serait très-propre à former des haies de clôture, qui, outre l'agrément de la fleur et du fruit, fourniraient encore, en automne, un assez grande quantité d'huile.

Nous ne nous arrêterons pas à présenter un précis des différentes expériences qui ont été faites dans cette partie du cours, soit pour démontrer la composition des huiles, soit pour faire connaître leurs altérations, leurs combinaisons diverses, leur usage dans les arts; nous nous bornerons à une seule remarque qui a intéressé un artiste distingué.

On sait que les huiles s'unissent facilement aux alcalis, et que l'on prépare ainsi ces savons si utiles, si fréquemment employés dans l'économie domestique et dans plusieurs fabriques; mais les huiles sont également susceptibles de se combiner avec les terres, les acides, les oxides métalliques, ce qui forme d'autres espèces de savons terreux, acides ou métalliques, que l'on obtient facilement par le concours des doubles affinités, comme l'a démontré *Berthollet*: ainsi en portant dans un *solutum* de sulfate de cuivre, de zinc, de fer, d'acetite de plomb, &c. un savon alcalin, l'acide sulfurique quitte l'oxide métallique pour s'unir à l'alcali

du savon, tandis que l'huile se porte sur l'oxide métallique, et forme un nouvel ordre de combinaisons.

Ces sortes de savons métalliques, ainsi que la manière de les obtenir, étaient bien connus depuis plusieurs années ; mais ce procédé, borné jusqu'à présent, dans les laboratoires, comme un objet de démonstration, ne pourrait-il pas s'étendre et fournir quelques applications utiles aux arts ? En effet, comme on peut facilement préparer des savons alcalins avec les différentes espèces d'huiles siccatives, comme on peut facilement en opérer la décomposition par différens sels métalliques, ce procédé ne pourrait-il pas servir avantageusement à préparer, soit quelques compositions emplastiques pour la pharmacie, soit des couleurs pour la peinture des appartemens, ou même pour celle des tableaux.

L'action de broyer les couleurs, sur-tout les oxides de plomb, expose la santé des ouvriers, leur occasionne des coliques très-graves, souvent suivies de faiblesses, de paralysie aux membres, et toujours d'un état de langueur opiniâtre et chronique. Enfin, quelque prolongée que puisse être la trituration mécanique, l'union des parties colorantes et métalliques avec les huiles, n'est jamais aussi intime, et leur division ne peut jamais être portée au point déterminé où elle se trouve dans une dissolution, dans une combinaison formée par les agens chimiques, déterminée par l'affinité. Ne serait-il donc pas possible de prévenir ces accidens auxquels sont exposés les ouvriers chargés de broyer les couleurs, et d'obtenir au moins les mêmes résultats, et peut-être encore d'une manière économique, en dissolvant d'abord par un acide, le métal, la terre qui doivent fournir la couleur, servir de base à la peinture, et en les séparant ensuite par l'addition d'un savon alcalin préparé avec l'espèce d'huile convenable à l'objet qu'on se propose ? Ces considérations ont conduit à différentes expériences, et le citoyen *Mérimée*, dont le goût et les talens sont connus par les ouvrages précieux qu'il a exposés au salon, a essayé quelques-unes de ces préparations : le savon de cuivre lui a fourni un très-beau vert, qui paraît solide; il présume que cette préparation a déjà été connue et employée avec succès par quelques anciens maîtres, dont les tableaux présentent encore un vert brillant, dont la composition paraissait perdue. Nous nous proposons de revenir sur cet objet, s'il est jugé de quelque importance.

On appelle *huiles volatiles* celles qui se vaporisent facilement au degré de l'ébullition de l'eau, sont solubles dans l'alkool, ont une saveur âcre, piquante; toujours unies à l'*arome*, elles ont une odeur forte plus ou moins agréable; elles s'épaississent, se résinifient par le contact de l'oxigène, se figent au grand froid, et fournissent de petits cristaux salins d'une odeur camphrée : enfin elles sont plus combustibles, plus inflammables que les huiles fixes, et se combinent plus difficilement aux alcalis.

Ces huiles sont aussi moins abondantes, moins généralement répandues dans le système végétal, que les huiles fixes; elles n'existent que dans les plantes aromatiques, se trouvent quelquefois dans les feuilles, d'autres fois dans les racines, dans la fleur, dans l'écorce extérieure du fruit, quelquefois aussi, mais rarement, dans toute la substance de la plante. Leur quantité varie non-seulement suivant l'âge, mais encore suivant la vigueur de la végétation; la constitution de l'année, l'exposition, le climat, la lumière y influent aussi beaucoup.

On obtient quelques-unes de ces huiles par la simple expression; mais pour le plus grand nombre il faut employer la distillation; et comme elles sont facilement volatiles, la température ne doit pas s'élever au-delà de l'ébullition de l'eau.

L'usage de ces huiles est fort étendu dans les arts. Plusieurs sont employées comme substances médicamenteuses; d'autres entrent dans les compositions du parfumeur, du liquoriste; quelques-unes sont employées dans la peinture, sont la base de différens vernis; enfin on s'en sert quelquefois dans l'économie domestique, pour écarter les insectes ou même en faire périr quelques-uns : ainsi, pour conserver les cocons de ver à soie et faire périr la crysalide qui y est renfermée, au lieu d'avoir recours, comme on le fait ordinairement, à la chaleur du four, qui a l'inconvénient d'altérer la soie, de la rendre cassante, difficile à tirer; ou à la vapeur de l'eau bouillante, qui dispose le cadavre de l'insecte à la putréfaction, ramollit et colle les brins de la soie; ou à la vapeur de l'alkool et du camphre, dont l'usage très-dispendieux est encore incertain, et exige des appareils particuliers; nous avons employé avec beaucoup d'économie et d'avantage l'huile volatile de térébenthine. Ce procédé, indiqué

d'abord dans les *Mémoires de l'académie de Dijon*, et répété ensuite avec succès par plusieurs particuliers, consiste à remplir de cocons un tonneau défoncé par un bout, et à y interposer, d'espace en espace, des feuilles de papier imprégnées d'huile volatile de térébenthine : on ferme ensuite le tonneau, et on laisse ainsi les cocons exposés à l'action de l'huile de térébenthine, plus ou moins long-temps, suivant la température de la saison.

L'huile fixe, ainsi que la volatile, est, comme nous l'avons fait observer, un produit immédiat de la végétation; elles sont en quelque sorte natives; elles existent toutes formées dans la plante, et sont déposées dans des vésicules ou des tissus particuliers; aussi, pour les extraire, l'art n'a besoin que d'employer des moyens mécaniques, des procédés simples qui n'altèrent pas la composition première : cependant si on traite à la cornue et à un feu violent une plante quelconque, la plus molle comme la plus compacte, on en obtient une certaine quantité d'huile, plus ou moins colorée et fétide; mais ces huiles factices, que nous nommons *pyrogénées* (1), sont évidemment un résultat de décomposition, une altération des produits naturels de l'organisation, un produit du mode de l'opération; elles n'étaient pas formées dans la plante avant sa distillation.

L'exposition des huiles, de leur formation, de leur composition, des altérations qu'elles éprouvent, des combinaisons qu'elles forment avec les différentes bases, de leurs préparations et usages dans les arts, a naturellement conduit à l'examen des *résines*, des *baumes*, des *gommes résines*, du *camphre* qui a tant d'analogie avec les huiles volatiles, de la *glu*, et du *caotchouc*, ou gomme élastique de Cayenne, qui se rapprochent des huiles fixes par tant de propriétés identiques.

---

(1) On confond assez généralement sous la dénomination d'*huiles empyreumatiques*, celles qui sont produites par le feu et celles qui sont simplement altérées par cet agent; mais comme la langue des sciences doit être précise, et n'admettre ni superfluités, ni synonymes, il serait convenable de borner l'expression *empyreumatique*, pour désigner les huiles natives, les substances qui, après leur formation, ont été altérées plus ou moins par le feu; ainsi l'huile d'olive, de pavot, est *empyreumatique*, lorsqu'elle a la saveur, l'odeur d'*empyreume*, lorsqu'elle est altérée par le feu; et nous appelons *pyrogénées* les huiles factices, celles qu'on obtient par la décomposition d'une substance organisée, à la violence du feu. Telle est cette préparation que l'on connaît encore sous le nom d'*huile animale de Dippel*. Telles sont toutes les huiles qu'on obtient par la distillation des végétaux : la rectification leur enlève toute odeur, toute saveur empyreumatique.

On a ensuite passé à la considération de l'*arome*, du *sucre*, de l'*extractif*, de l'*albumine*, du *gluten*, ce qui a amené l'analyse de la farine par la lotion, suivant la méthode de *Beccari*; l'exposition de la théorie de la panification, la manière de reconnaître les substances que la cupidité introduit quelquefois dans la fabrication du pain, d'en déterminer les proportions; enfin, on est parvenu à l'examen des *acides* produits par la végétation : mais pour ne pas donner trop d'étendue à cette notice, nous réservons cet article pour le prochain cahier de ce journal.

CHAUSSIER.

3.e DIVISION.

SUBSTANCES MINÉRALES.

On a continué, dans ce trimestre, la démonstration des minéraux, suivant l'ordre analytique précédemment établi,

En terminant la classe de l'*alumine*, et des composés dont elle est le principe dominant, on a exposé en détail les travaux des arts qui les emploient, depuis la préparation des corrois, le moulage de la brique, la fabrication de la poterie en grès, des biscuits de poterie commune, de faïence, &c., jusqu'à la composition de la pâte de porcelaine. Diverses argiles ont été essayées pour leurs propriétés pyrométriques, pour les qualités qui en rendent l'usage avantageux dans la construction des fours et pots de verrerie; les argiles marneuses ont été appréciées relativement à leur influence dans la végétation; les argiles savonneuses, par rapport à l'art du foulonnier.

Dans la classe des *calcaires*, on a établi les principes de l'art du chaufournier, indiqué les caractères de la chaux manganésiée, connue sous le nom de *chaux maigre*, ou *chaux à béton*, les usages et préparations des divers mortiers et cimens, les variétés des pierres à plâtre, la manière de les cuire, et la composition des stucs.

Dans l'ordre des *sels fossiles*, on a recueilli les faits les plus importans

sur la soude native, le salpêtre des Indes, les mines de sel gemme et le borax. On a fait connaître les travaux relatifs à ces objets, tels que les nitrières artificielles, la tenue des eaux dans les marais salans, l'évaporation dans les bâtimens de graduation, et les procédés pour extraire la soude du sel marin.

Le troisième ordre, qui comprend tous les *combustibles non métalliques*, a amené successivement l'exposition des travaux sur les sulfures natifs pour l'extraction et la purification du soufre, pour la fabrication des sulfates de fer et d'alumine; la description des mines de houille et tourbières, leur gisement, leur exploitation; la préparation des cocks, et la carbonisation des tourbes; enfin, l'histoire naturelle du succin, des lieux où il se trouve, et la manière dont on en fait la fouille.

Les jours consacrés au travail des élèves, dans leurs laboratoires particuliers, ont été employés à répéter les opérations fondamentales indiquées par les leçons. Pour exciter entre eux une émulation plus active, et soutenir leur application par le puissant motif de l'espérance d'arriver à un résultat utile, on leur a de temps en temps proposé des sujets de recherches : on verra bientôt qu'elles ont été quelquefois suivies avec assez de succès, pour être comptées au nombre des expériences dont il a paru intéressant de conserver la trace.

OBSERVATIONS recueillies des Travaux de ce trimestre.

I. *Décomposition du sulfate de Chaux par l'oxalate de Potasse.*

Ce phénomène est connu : la décomposition a lieu, même sans affinité double, et par l'acide oxalique seul; mais on opérait sur les deux sels en état liquide. La dissolution d'oxalate de potasse attaque sur-le-champ le sulfate de chaux en état concret, et en laisse à sa surface des traces sensibles, qui peuvent servir à faire distinguer le gypse cristallisé, du talc, que l'on confond quelquefois si aisément.

II. *Carbonate de Baryte dissous dans l'excès de son acide.*

Cette composition a été essayée comme réactif; elle a l'avantage infiniment précieux, dans beaucoup de circonstances, de servir à épuiser

une liqueur de tout acide sulfurique ; de le précipiter sur-le-champ en état pulvérulent insoluble, en ne laissant dans le mélange qu'un principe fugace, dont il est facile de le débarrasser complétement.

A-t-on, par exemple, de l'acide phosphorique souillé d'un reste d'acide sulfurique ? L'affusion du nouveau réactif l'en dépouille complétement ; la base calcaire qui s'y trouve, se précipite en même temps en état de phosphate de chaux, et l'acide carbonique se dégage.

Il servira de même à purifier le carbonate de potasse, le carbonate de soude, des sulfates qu'ils retiennent ordinairement.

Ce réactif se prépare avec la plus grande facilité : on remplit une bouteille d'eau chargée de gaz acide carbonique ; on y met un demi-gramme de carbonate de baryte, ou, ce qui est la même chose, de baryte précipité de l'acide muriatique, par un carbonate alcalin, et bien lavé ; on renverse la bouteille sur le bouchon, on laisse digérer à froid pendant quelques heures, et on filtre avec les précautions convenables pour laisser le moins possible la liqueur en contact avec l'air libre. Cette dissolution se conserve dans un flacon renversé, comme toutes celles que l'on veut garantir de la déperdition plus ou moins rapide de leur gaz.

III. *Carbonate de Baryte natif.*

Ce fossile, réduit en poudre, servira très-bien à la préparation que je viens d'indiquer, lorsqu'il sera devenu un peu plus commun. Quoiqu'il n'ait encore été trouvé jusqu'à présent qu'à Anglezarck, dans le comté de Lancastre, et à Strontian, en Écosse, j'ai lieu de soupçonner qu'il accompagne aussi quelquefois, en petite quantité, et comme disséminé, sans cristallisation caractérisée, nos spats pesans ; puisqu'ayant fait digérer dans l'acide carbonique des fragmens pulvérisés d'un morceau de spat pesant du cabinet de l'école, que rien n'annonçait qu'il eût été apporté de l'étranger, j'ai obtenu une dissolution de carbonate de baryte dans l'excès de son acide.

IV. *Composition directe de l'Acide nitrique.*

Tout ce qui touche à la production de cet acide devient d'un grand intérêt, puisque c'est là que l'on doit chercher les principes de perfectionnement

perfectionnement des nitrières artificielles, et que la faculté d'en réunir à volonté les élémens que recèle si abondamment l'atmosphère, nous présente la perspective de voir cesser tout-à-la-fois et l'importation onéreuse des salpêtres étrangers, et la fouille incommode des lieux d'habitation. Ces considérations ont engagé à répéter l'expérience de M. *Milner* (1), dont le succès était en quelque sorte garanti et par l'expérience analogue dans laquelle le C.en *Fourcroy* avait obtenu de l'acide nitrique de la décomposition réciproque de l'oxide de mercure et de l'ammoniaque (2), et par les observations publiées depuis par les citoyens *Clouet* et *Hachette* (3).

Un tube de porcelaine, dans lequel on avait introduit de l'oxide noir de manganèse pulvérisé, a été placé dans un fourneau, de manière à le traverser horizontalement. A l'une des extrémités de ce tube on a adapté le bec d'une cornue de verre, placée dans un autre fourneau, et contenant de l'ammoniaque en liqueur et de la chaux. L'autre extrémité du tube était lutée à une alonge de verre portant un siphon, communiquant à un premier flacon contenant de l'eau distillée, dans laquelle plongeait le tube de sûreté; de là dans un second flacon où l'on avait mis de la dissolution de potasse, et de celui-ci à un petit appareil hydro-pneumatique.

Ayant d'abord chauffé le tube de porcelaine, on a mis quelques charbons sous la cornue, et on y a entretenu le feu jusqu'à ce que toute l'ammoniaque ait monté et traversé le tube de porcelaine.

Pendant l'opération, il y a eu continuellement dégagement de gaz qui ne différait pas de l'air commun.

Vers le milieu de l'expérience, on a vu distinctement dans l'alonge et au-dessus de l'eau des flacons, la couleur du gaz acide nitreux.

La petite portion de liqueur condensée dans l'alonge, a été d'abord traitée sur le feu, dans une cornue, pour la débarrasser de toute l'ammoniaque libre; abandonnée ensuite à l'air, elle a laissé un résidu salin qui a été reconnu pour un vrai nitrate ammoniacal.

La liqueur du second flacon a donné quelques cristaux en aiguilles, qui ont fusé sur les charbons comme le nitrate de potasse.

---

(1) Voyez *Journal de physique*, janvier 1791, pag. 17.
(2) *Annales de chimie*, tom. VI, pag. 293.
(3) *Annales de chimie*, tom. II, pag. 35.

Le citoyen *Bonjour*, qui a suivi cette opération, a remarqué que la chaux ajoutée à l'ammoniaque causait de l'embarras, et pouvait nuire au succès, en s'élevant par le bouillonnement jusque dans le tube de porcelaine : il croit en conséquence que, pour avoir un résultat plus sûr et plus avantageux, il ne faut mettre dans la cornue que du muriate d'ammoniaque sec et de la chaux en poudre.

V. *Décomposition du phosphate de Chaux par le sulfate ammoniacal.*

A la suite de la démonstration des phosphates de chaux natifs, le travail des laboratoires particuliers a été dirigé vers la solution de cette question : *Y a-t-il échange de bases entre le phosphate de chaux et le sulfate ammoniacal !* Elle a été résolue d'une manière satisfaisante par les élèves dans les laboratoires, n.os 5 et *6*.

Des os calcinés à blanc, pulvérisés et bien lavés dans l'acide acéteux, pour enlever la chaux qui pouvait se trouver à nu, ont été mis en digestion dans la dissolution de sulfate ammoniacal parfaitement neutre. La liqueur filtrée, la présence de l'acide phosphorique y a été démontrée par l'eau de chaux, qui a été précipitée abondamment en état de phosphate de chaux ; elle tenait également du sulfate de chaux, ce que l'on a reconnu en y versant de la dissolution d'oxalate de potasse ; mais la plus grande partie du sulfate de chaux était restée sur le filtre avec la portion des os non décomposée. Ce résidu séché s'est trouvé peser 0.52 plus que le phosphate de chaux employé.

Cette expérience, qui a déjà été annoncée par M. *Delkeskamp* (1), ne sert pas seulement à établir un cas d'affinité, elle peut encore fournir un procédé avantageux pour obtenir le phosphate ammoniacal, sans être obligé d'employer ni l'acide, produit de la combustion du phosphore qui revient toujours très-cher, ni même le phosphate de plomb précipité de l'urine, à la manière de M. *Giobert* (2).

VI. *Composition directe du principe colorant du Bleu de Prusse.*

La démonstration des fossiles connus sous le nom *de bleu de Prusse*

(1) *Annales de chimie*, tom. VI, pag. 37.
(2) *Annales de chimie*, tom. XII, pag. 26.

natif, dans l'ordre des combustibles, appelait naturellement l'attention sur la nature des parties constituantes de leur analogue, produit de l'art. Les expériences de *Schéele* et du citoyen *Berthollet* sur le principe colorant, qui fait fonction d'acide dans les prussiates, avaient conduit le citoyen *Clouet* à en tenter la composition directe par la combinaison du gaz ammoniacal avec le carbone : il avait publié, dans les annales de chimie du mois d'octobre 1791, les procédés par lesquels il avait obtenu cette combinaison. D'autre part, M. *Giobert*, de l'académie de Turin, avait annoncé l'année suivante, dans le même ouvrage périodique (*mars 1792. page 316.*), qu'il avait répété huit fois l'expérience du citoyen *Clouet*, et toujours sans succès. On a pensé qu'il serait utile de fixer les opinions sur un fait aussi important : le résultat a pleinement confirmé la découverte du citoyen *Clouet*; mais ce n'est pas à la première opération, comme on le verra par le procès-verbal rédigé par le citoyen *Bonjour*, instructeur chimiste de la troisième division, lequel sera inséré à la suite de cette notice, et fera connaître à-la-fois les difficultés de l'expérience, les preuves non équivoques de sa réussite, et les circonstances dont elle dépend.

VII. *L'Eau est-elle décomposée par le Soufre à une haute température ?*

CETTE question, dont aucun chimiste, que je sache, n'a encore cherché la solution par une expérience directe, a paru d'autant plus intéressante, que, dans le cas de décomposition de l'eau, on pouvait en tirer quelque procédé pour l'acidification du soufre. Il a été proposé aux élèves d'indiquer les moyens qui leur paraîtraient les plus propres à déterminer ce point de fait; on leur a fait voir ensuite qu'il s'en présentait un bien simple dans l'observation de M. *Fontana*, sur la production d'un gaz inflammable, par l'extinction des charbons dans l'eau.

On a tenu du soufre en fusion dans un creuset; au moment où il commençait à s'enflammer, le creuset a été plongé dans l'eau, et l'on a placé au-dessus une cloche de verre, dont l'air intérieur avait été auparavant raréfié par la chaleur, et que l'on enfonça au point d'intercepter toute communication. L'eau se trouva tenir un peu d'acide, et cela ne concluait rien, puisque le soufre incadescent avait été en contact avec

l'air : mais y avait-il du gaz hydrogène sous la cloche, comme il arrive avec les charbons ardens ? il ne pouvait être que le produit de la décomposition de l'eau par le soufre. L'air renfermé sous la cloche étant refroidi et condensé, fut examiné soigneusement ; il ne s'y trouva pas la moindre partie de gaz hydrogène : d'où l'on conclut que l'eau n'était pas décomposée par le soufre à la température à laquelle il s'enflamme spontanément.

GUYTON.

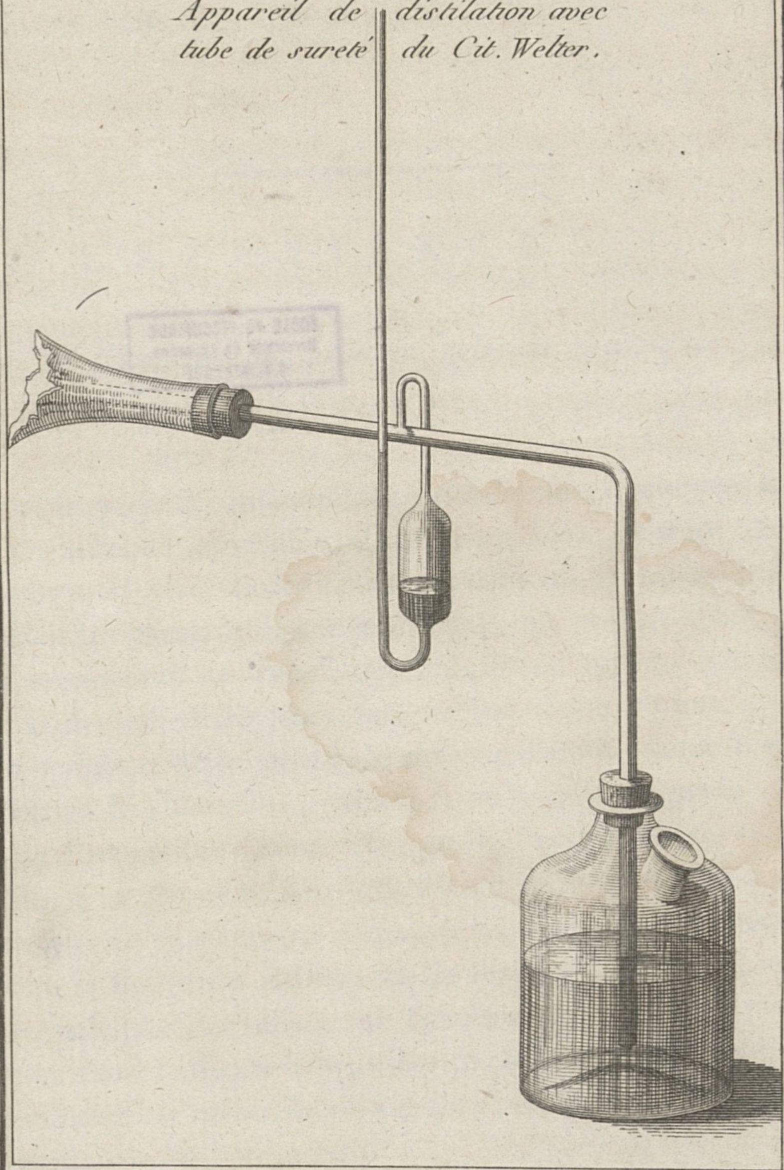
EXPÉRIENCES

Sur la formation du principe colorant prussique.

SUIVANT le procédé indiqué dans le mémoire du citoyen *Clouet*, on a rempli un tube de porcelaine, de charbon bien desséché dans un creuset ; le tube a été placé horizontalement dans un fourneau de fusion, dont il traversait les parois : il communiquait, au moyen d'une alonge recourbée, à un appareil de *Woulf*, terminé par un appareil hidro-pneumatique. A l'autre extrémité était luté le bec d'une cornue de grès, contenant un mélange d'une partie de muriate d'ammoniaque bien sec, et de trois parties de chaux vive pulvérisée et passée au tamis : le premier flacon de l'appareil ne contenait que de l'eau distillée, et portait un tube de sûreté ; le dernier, tenant de l'acide sulfurique, devait arrêter l'ammoniaque qui ne se serait pas combinée dans les deux premiers. On avait mis, dans le flacon du milieu, de la dissolution de potasse et de l'oxide de fer précipité du sulfate par l'ammoniaque, et bien lavé. On espérait obtenir dans ce flacon le prussiate de potasse, susceptible de cristalliser ; il ne manquait qu'un de ses élémens, le principe colorant qui devait être le résultat de l'opération.

Le feu, commencé à quatre heures de l'après-midi, a été continué jusqu'à huit et demie. On a varié les degrés de chaleur que l'on donnait,

Appareil de distilation avec tube de sureté du Cit. Welter.



 Delettre sc.

soit au tube de porcelaine, soit à la cornue; et lorsque celle-ci a été très-rouge, on a terminé l'opération par en essayer les résultats en présence des citoyens *Clouet* et *Welter* qui l'avaient suivie depuis le commencement.

Les trois flacons tenaient de l'ammoniaque, mais il a été impossible d'y découvrir le plus léger indice du principe colorant.

Pendant toute la durée de l'opération, il s'est dégagé continuellement du gaz hydrogène, plus ou moins mélangé de gaz acide carbonique.

Ne sachant à quoi attribuer la non-réussite de cette expérience, on l'a répétée, en se servant de cornue de verre au lieu de grès, qui est perméable à tous les fluides aëriformes, lorsqu'il est échauffé, comme *Priestley* l'a observé le premier; et, pour mieux voir ce qui se passait, on a luté une alonge entre la cornue et le tube de porcelaine, qui en portait également une à son autre extrémité; mais celle-ci, au lieu d'être recourbée pour communiquer directement avec le goulot du premier flacon, portait un tube courbé, dont la partie descendante plongeait dans l'eau du flacon, tandis que la partie horizontale portait le nouveau tube de sûreté *à siphon renversé* du citoyen *Welter* (*Voyez la planche qui représente cette partie de l'appareil*). Par cette disposition, le gaz ammoniacal, plus léger que l'eau, devait s'y combiner en plus grande quantité que dans la première expérience, étant ici forcé de la traverser. Tout le reste était disposé comme ci-dessus, excepté qu'au lieu de potasse et d'oxide de fer, le second flacon tenait une dissolution récente et saturée de sulfate de fer.

L'appareil monté le soir, on n'y mit le feu que le lendemain; on observa d'abord qu'il s'était dégagé beaucoup de carbonate d'ammoniaque: les deux alonges en étaient tapissées; le peu d'humidité que contenaient la chaux vive et le muriate d'ammoniaque, avait suffi pour produire l'acide carbonique par le contact du charbon. On observa en second lieu, qu'à l'instant où le tube de porcelaine commença à s'échauffer, il se répandit une odeur d'ammoniaque extrêmement vive (nouvelle preuve de la perméabilité des vaisseaux de cette terre cuite).

A huit heures du matin on commença à chauffer très-lentement le tube de porcelaine; et comme on avait soupçonné dans le premier essai que le principe colorant pouvait s'être décomposé à une haute température,

on ne donna constamment, jusqu'à deux heures de l'après-midi, qu'un feu suffisant pour rougir le tube : on dégagea également l'ammoniaque à un feu doux, et l'on observa, relativement aux fluides aëriformes, les mêmes phénomènes que la première fois.

Les liqueurs des flacons, essayées à cette époque, ne donnèrent aucun indice de principe colorant. Alors on risqua, d'après l'avis du citoyen *Welter*, de donner un très-grand coup de feu, que l'on soutint jusqu'à huit heures du soir. Le dégagement de gaz hydrogène continua pendant toute l'opération ; mais, dès que le premier flacon fut saturé de gaz ammoniacal, le fer commença à se précipiter dans le second flacon, et à obstruer le tube qui plongeait dedans ; au même instant le gaz s'échappa par l'extrémité du tube de sûreté, et l'on reconnut distinctement l'odeur du principe colorant. Le tube ayant été désobstrué et remis en place, la précipitation continua à se faire ; mais la couleur du précipité, au lieu d'être verdâtre, comme il arrive en précipitant par l'ammoniaque, était d'un brun clair ; par la suite elle se fonça de plus en plus, et devint d'un vert presque noir.

L'opération finie, on fit l'essai du contenu des flacons. Le dernier ne contenait pas de principe colorant ; mais en versant de l'acide muriatique sur le précipité du second flacon, on obtint du bleu de Prusse en quantité.

La liqueur du premier flacon précipitait la dissolution de fer en brun, et la redissolvait ensuite, si l'on en ajoutait davantage.

L'acide muriatique, le nitrique, le nitro-muriatique y développaient également la couleur bleue, soit qu'on les mêlât à la dissolution de fer, soit qu'on es versât sur le précipité.

La dissolution de potasse mise dans la liqueur, lorsqu'elle a redissous le précipité de fer, lui enlève le principe colorant. En faisant bouillir le tout et filtrant, on obtient un prussiate de potasse, qui donne sur-le-champ un très-beau bleu avec les dissolutions de fer.

On a obtenu de même du prussiate de potasse, en faisant bouillir un peu de potasse avec la liqueur verdâtre qui surnageait sur le bleu obtenu en avivant le précipité du second flacon par l'acide muriatique oxigéné et l'acide sulfureux.

On a remarqué que l'ammoniaque du premier flacon contenait beaucoup de principe colorant, mais qu'il y tenait peu, de sorte qu'il s'en dégage toujours une certaine quantité, lorsqu'on vient à verser de l'acide sur les précipités qu'il a formés, pour en développer le bleu.

Toutes les autres observations contenues dans le mémoire du citoyen *Clouet*, ont été vérifiées également, et se sont trouvées parfaitement exactes, comme on avait lieu de le présumer.

BONJOUR.

STÉRÉOTOMIE.

COUPE DES PIERRES.

I. AYANT traité, dans le mois précédent, une grande partie de la *coupe des pierres*, on a développé, dans le mois de messidor, une nouvelle série de formes anciennes et instructives, dont l'usage est très-fréquent dans les constructions, tant militaires que civiles.

Les localités, le caractère de l'édifice, et les vues du constructeur peuvent souvent exiger des saillans sur des rentrans. L'artiste de goût, qui tâche d'obéir à la *loi de continuité*, lie ces formes avantageusement, et procure à l'œil du spectateur un passage agréable de l'une à l'autre. L'on fit remarquer aux élèves, que c'est dans ce passage bien senti que consiste le véritable caractère des *trompes en architecture*.

Les élèves ont trouvé, dans ce genre de travail, de nombreuses applications des intersections de surfaces et de leur développement ; et comme la description exacte des formes, dont il est question ici, ne saurait se faire, dans bien des cas, sans la connaissance de la position respective des plans, ils ont eu occasion de faire usage de la trigonométrie descriptive, à la pratique de laquelle ils avaient été habitués dans le premier mois du cours.

Une autre remarque qu'ils ont faite, c'est que la géométrie descriptive, qui lance dans l'espace les formes à son gré, est obligée de faire un choix de ses opérations, lorsqu'il s'agit d'effectuer ses conceptions sur une matière déterminée. Il est impossible de donner aux pierres les formes qu'exigerait leur concours au même point ; il est donc nécessaire que la partie de la trompe qui entoure ce point, s'exécute d'une seule pièce ; on la nomme *trompillon*.

L'application qu'a faite le C.en *Monge* de sa belle théorie des lignes de courbure des surfaces à la division des voûtes en voussoirs, ne laisse rien de vague dans la manière de déterminer la courbe de joint qui sépare

le

le trompillon du reste de la trompe; car, dans le cas ordinaire où la la surface de la trompe est celle d'un cône oblique à base circulaire, les lignes de courbure, dans un sens, sont les arêtes mêmes du cône, et, dans l'autre sens, des courbes résultant de l'intersection du cône avec une suite de sphères concentriques à son sommet. Prenant une de ces courbes pour la ligne commune aux douelles de la trompe et du trompillon, la surface de leur joint sera développable, et pourra se construire par la méthode des panneaux; tandis qu'en prenant toute autre courbe, la surface du joint perpendiculaire à celle de la trompe serait gauche, et par conséquent d'une exécution plus difficile.

II. A la description des *trompes*, on fit succéder celle des *escaliers*. Si ce genre est de la plus grande importance, il demande aussi des soins adroitement combinés pour la bonne exécution.

Sans rejeter les méthodes qui ont été employées jusqu'à présent dans cette classe d'ouvrages, on a observé aux élèves que la méthode rigoureuse dérivait uniquement du principe de la moindre *inégalité des parties contiguës*, en appelant à son secours toutes les pratiques de la géométrie descriptive dont elle peut avoir besoin. Mais cette géométrie a, comme l'analyse, ses méthodes d'approximation, qui sont souvent plus expéditives, et compensent, par l'économie, un défaut d'exactitude qui d'ailleurs ne serait point remarquable.

C'est d'après ces maximes, que l'on a exposé aux élèves le trait des escaliers connus sous les dénominations de *courbe rampante*, *vis-à-jour* et *vis Saint-Giles*.

III. Le premier but de l'institut polytechnique étant de former des officiers de travaux publics, il importe que les élèves puissent reconnaître le bon effet des formes qu'ils auront dessinées, et de s'assurer du meilleur mode d'exécution. Tant pour ce motif que pour apprendre en même temps une conduite avantageuse des travaux, il a paru convenable d'ajouter une instruction entièrement pratique sur la coupe effective des pierres.

Chaque élève a exécuté sur le plâtre une épure qu'il avait choisie, et

dont il avait dessiné d'avance tous les détails. La translation des formes géométriques sur la matière, le maniement des outils et la constitution physique d'une classe de matériaux leur ont fait naître des réflexions très-instructives, et auxquelles le simple tracer n'aurait pu les conduire.

IV. On a commencé au premier fructidor le cours d'application de la géométrie au trait de *la charpente*. Ce cours comprenant les deux mois fructidor et vendémiaire, nous croyons convenable, pour ne point rompre l'ensemble de l'enseignement, de remettre au prochain cahier ce que nous avons à dire sur ce travail.

TABLEAU DE L'ENSEIGNEMENT.

TROMPES.

1. Trompe dans l'angle biaise.
2. Trompe dans l'angle en talus.
3. Trompe dans l'angle rachetant un berceau.
4. Trompe sur le coin.
5. Trompe en niche.
6. Trompe cylindrique.

ESCALIERS.

1. Courbe rampante.
2. Vis-à-jour.
3. Vis Saint-Giles.

EISENMAN.

FIN.

TABLE

Des principaux Articles contenus dans ce Cahier.

FIN DE LA TABLE.

JOURNAL
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

OU

BULLETIN DU TRAVAIL

FAIT

A CETTE ÉCOLE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION ET ADMINISTRATION DE CET ÉTABLISSEMENT.

QUATRIÈME CAHIER.

VENDÉMIAIRE, BRUMAIRE ET FRIMAIRE, AN IV.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE LA RÉPUBLIQUE.
VENDÉMIAIRE, AN V.

Et se trouve chez les C.ens REGENT et BERNARD, libraires, quai des Augustins, n.° 37.

AVANT-PROPOS.

CE cahier termine les comptes rendus de la première année des travaux de l'École Polytechnique. Réuni aux trois précédens, il peut être considéré comme un ouvrage complet. Le mémoire déjà annoncé du C.en *Lagrange*, sur le calcul différentiel et intégral, sera donné seul dans le cinquième cahier, qui, par cette raison, se trouvera indépendant ou dépendant des autres, à volonté.

Lorsque l'on forma le projet du journal, l'École elle-même, touchant encore à son origine, était à peine en activité. Les objets à décrire n'existaient qu'en partie, et on ne pouvait prévoir en tout ce qu'ils deviendraient par la succession du temps. Le journal a donc dû participer aux variations, aux embarras, aux retards de l'exécution des choses. Sa rédaction et sa publication ont aussi éprouvé des lenteurs étrangères à l'établissement, et qu'il a été impossible de faire cesser.

Cependant, quoique les circonstances aient fait naître de nouvelles vues, on a cru devoir se conformer, pour la première année entière, au plan primitivement tracé, et l'on s'est borné à indiquer dans des avant-propos, ou avertissemens, les principaux changemens survenus dans l'École.

Ainsi, le journal a été composé jusqu'à présent de deux parties distinctes : l'une donnant les comptes arriérés des travaux, divisés de mois en mois ; l'autre ayant pour objet de faire juger l'état réel de l'établissement à l'époque de la livraison de chacun des cahiers.

Si l'on parcourt la première partie, celle du travail proprement dit, on y verra soit des mémoires liés ou isolés sur les sciences et

les arts, soit des descriptions plus ou moins étendues des opérations mêmes des élèves, soit l'exposé des méthodes, souvent nouvelles, employées par les instituteurs, et leurs recherches pour l'agrandissement du domaine des connaissances acquises.

La variété dans la manière dont les objets sont présentés, n'empêchera pas de saisir l'ensemble de chaque branche de l'enseignement. Mais on le trouverait plus précisément indiqué dans les programmes imprimés qui furent distribués aux membres de la Convention nationale, lors de l'ouverture de l'École.

Ces programmes pourront servir, en partie, de guide aux examinateurs, dont il sera parlé ci-après, et qui viendront chaque année interroger les élèves. Probablement il y sera fait quelques changemens pour perfectionner la suite des études. On se propose d'en donner la collection corrigée, dans le numéro du journal par lequel commencera le bulletin de la deuxième année de travail.

Au surplus, pour faciliter la connaissance du contenu des quatre cahiers correspondant à la première année, on a fait une table générale des matières qu'ils renferment. Elle se trouve à la fin du présent cahier.

Quant à l'autre partie du journal ci-dessus désignée, celle qui parle rapidement de l'état de l'École, de son but, de son utilité, de son organisation actuelle, sans doute il y aurait beaucoup de choses à y ajouter, si l'on voulait donner des notions complètes à cet égard; mais il entre dans le projet de la continuation de cet ouvrage, d'en faire l'objet de discours particuliers qui seront insérés dans les numéros subséquens.

Dans celui-ci, on se restreindra à quelques aperçus, et l'on donnera d'ailleurs textuellement les lois et arrêtés du gouvernement qu'il importe le plus de connaître, relativement à l'admission des élèves à l'École, et à leur destination ultérieure.

Il a paru utile au conseil de réunir ces pièces intéressantes pour beaucoup de personnes qui ne pourraient se les procurer

que difficilement ailleurs, ou ne soupçonneraient pas même leur existence.

On trouvera donc à la suite de cet avant-propos,

1.° La loi du 15 fructidor, an 3, qui fixe l'époque de l'ouverture des examens des candidats qui se destinent à l'École Polytechnique, et les conditions nécessaires pour y être admis;

2.° La loi du 30 vendémiaire, an 4, concernant les Écoles de services publics.

La plupart de ces Écoles ont des rapports avec l'École Polytechnique. La loi détermine les conditions générales de l'organisation de chacune d'elles, ainsi que le mode d'entrée et de sortie des élèves;

3.° L'arrêté du Directoire exécutif, du 6 prairial, an 4, établissant les dispositions particulières pour l'examen des élèves de l'École Polytechnique qui se destinent aux différens services publics, conformément aux lois précédentes.

D'autres arrêtés du Directoire exécutif concourent encore à augmenter l'utilité de l'École, à lui donner de la stabilité, à accroître l'instruction exigée des élèves des services publics, et à éviter les doubles emplois d'établissemens qui augmenteraient les dépenses sans produire des avantages proportionnés : il suffira d'indiquer sommairement l'objet des principaux arrêtés dont il s'agit.

Un premier arrêté, du 22 pluviôse, an IV, établit des dispositions relatives à l'école des ingénieurs de vaisseaux, désigne la partie de l'enseignement à y conserver, et retranche celle qui serait superflue, pour se conformer à la loi qui oblige à l'avenir les candidats à faire leur première année d'études à l'École Polytechnique.

Par suite de cet arrêté, neuf jeunes élèves qui se destinent à l'école des ingénieurs de vaisseaux, et reçus d'après un examen, ont été attachés, dès l'année actuelle, à l'École Polytechnique; ils s'y sont rendus dans le courant de floréal, y font le travail ordinaire, et concourront avec les autres élèves pour les places à donner.

Un second arrêté, en date du 12 germinal, prescrit qu'à l'avenir les élèves des poudres et salpêtres seront choisis parmi les jeunes gens ayant fait au moins un an d'études à l'École Polytechnique ; mais qu'il n'en pourra être pris plus de quatre par an.

Un troisième arrêté, du 10 thermidor, pourvoit aux moyens de mettre en activité l'École des géographes, instituée par le titre VII de la loi du 30 vendémiaire précitée ; et en même-temps, sans occasionner de nouvelles dépenses, assure la conservation et l'avancement de l'art aérostatique, ainsi que la transmission des connaissances nécessaires à ce genre de service, soit à la guerre, soit pour les usages auxquels il est applicable en temps de paix.

En exécution de cet arrêté, l'école des géographes et celle aérostatique actuellement existant à Meudon, n'auront, au mois de nivôse prochain, que des élèves tirés de l'École Polytechnique.

Un quatrième arrêté vient d'admettre récemment 19 jeunes gens, reconnus suffisamment instruits, en qualité d'élèves provisoires à l'école d'artillerie de Châlons, à la condition que ces élèves, à la fin de frimaire prochain, se rendront à Paris pour y faire les études de l'École Polytechnique, sans aucune distinction avec les autres élèves, et être admis comme eux aux différens services, lorsqu'ils auront satisfait aux examens exigés.

Déjà, par une mesure prise l'année dernière par le gouvernement, 40 jeunes officiers du génie ont été mis en service à Paris près l'École Polytechnique, pour y retrouver l'instruction que les circonstances de la guerre ne leur avaient pas permis de prendre jusqu'alors ; ils en sont tirés partiellement à mesure que les besoins urgens du service militaire les appellent ; dans ce moment il en reste encore 19 qui sont sous la direction spéciale de l'instituteur de fortification de l'École.

Dans l'année actuelle, 14 élèves de l'école des ponts et chaussées, ont été admis à suivre les leçons de l'instituteur des travaux civils.

Enfin, indépendamment de plusieurs élèves de l'École Poly-

technique, dont la sortie a été autorisée isolément, pour remplir différentes fonctions, soit dans les ponts et chaussées, soit dans les mines, ou ailleurs, neuf de ces élèves ont été admis il y a près d'un an, à l'école du génie militaire, et au concours avec les autres candidats qui se sont présentés de toutes les parties de la France; et, tout récemment, 10 des plus forts viennent d'être choisis pour aider les ingénieurs des ponts et chaussées dans la ci-devant Belgique, où le besoin de ces sortes d'agens est extrême dans les circonstances actuelles.

Ainsi, les avantages que l'on avait droit d'attendre d'une aussi grande institution, commencent à se réaliser. Voilà déjà un à-compte sur la dette contractée envers la patrie, en échange de ses dons; sous peu, de nouveaux produits seront offerts pour ses différens services, par l'examen général qui va se faire dans l'École, et sans doute l'émulation des élèves allant en croissant comme les moyens prodigués à leur instruction, ils seront bientôt en état de remplir toutes leurs obligations.

Nous ne rapporterons pas plusieurs autres arrêtés ou règlemens émanés, soit du Directoire exécutif, soit du Ministre de l'intérieur. Ces autorités bienfaisantes ne cessent de prendre soin d'un établissement dont elles sentent toute l'utilité. Elles la rendent de plus en plus certaine, en tenant constamment ce superbe établissement dans la ligne de sa primitive institution, en ouvrant de nouveaux débouchés au placement des élèves, en régularisant le régime intérieur, d'où résulte une diminution dans les dépenses, sans diminuer les moyens du travail; enfin, en prêtant à l'École un secours nécessaire dans toutes les circonstances qui pourraient lui nuire.

Il est juste de rappeler aussi ce qui est dû au zèle actif et éclairé du représentant du peuple *Prieur (de la Côte-d'Or).* Le plan de l'École fut jeté pendant qu'il était membre du comité de salut public; et, spécialement chargé de la partie relative aux arts qui tiennent de plus près aux divers services publics, il a beaucoup

contribué au travail de la législation et de gouvernement nécessaires pour lui donner la première existence. L'exécution d'une entreprise aussi vaste exigeait chaque jour des mesures nouvelles pour préparer et rassembler les moyens d'en atteindre le but, pour vaincre les obstacles : il en fut chargé par les trois comités de salut public, d'instruction publique et des travaux publics. Enfin, le gouvernement constitutionnel ayant amené la cessation des pouvoirs des comités, le conseil de l'École invita le citoyen *Prieur* à continuer d'assister à ses séances et de coopérer à ses travaux ; de sorte que depuis la création de cet établissement, à laquelle il a eu tant de part, il n'a cessé jusqu'à ce moment de s'occuper des moyens de le porter à sa perfection.

Il reste maintenant à annoncer, en peu de mots, les modifications que l'on croit devoir introduire pour l'avenir, dans le plan du Journal.

On a vu que jusqu'à présent il n'avait pas été possible de tenir la rédaction au courant, puisque l'on n'a encore que les comptes rendus de la première année de travail, tandis que nous touchons réellement à la fin de la deuxième année.

Les mêmes causes qui se sont opposées à l'exactitude des livraisons, existent toujours et produiraient conséquemment le même effet.

Ces causes sont la multiplicité des occupations que donnent à tous les agens le travail journalier de l'École, la nécessité de prendre du temps pour rédiger des opérations qui en exigent elles-mêmes pour être achevées ou perfectionnées, enfin, des obstacles de circonstances hors du pouvoir de l'École.

Quoi qu'il en soit, on est amené à suivre un mode différent ; car, l'enseignement revenant le même chaque année, le Journal perdrait beaucoup de son intérêt, ce qui veut dire ici son utilité, s'il n'offrait encore que les mêmes objets, et à-peu-près sous les mêmes formes.

Ces raisons, rapprochées de plusieurs avantages qu'il sera aisé de sentir, ont déterminé le conseil de l'École à adopter la manière suivante, pour composer la suite de l'ouvrage :

Les instituteurs, les agens de l'École, les élèves, sont invités à fournir des mémoires sur les sciences et les arts, soit qu'il s'agisse de travail fait dans l'établissement, soit de recherches tirées d'ailleurs.

Les mémoires de même genre qui seraient adressés par des savans en correspondance avec l'École, seraient également accueillis.

On réunira un nombre suffisant de ces mémoires, pour former chaque n.° du Journal.

On aura soin que chaque cahier n'excède pas cent pages d'impression, et qu'il en paraisse un régulièrement tous les mois.

Le conseil décidera de l'admission des matériaux à comprendre dans la collection.

Quelquefois on donnera des traductions ou des extraits des ouvrages étrangers contenant des nouveautés intéressantes pour les sciences mathématiques ou physiques.

Et de temps en temps l'on y joindra l'exposition de la situation de l'École et de son régime.

La partie historique de sa formation et de ses progrès, la description des collections de machines, modèles, ou dessins qu'elle renferme ; un coup-d'œil sur son organisation, sur sa police ; l'annonce de ce qu'il y aura d'heureux, de nouveau, de plus expéditif dans les méthodes d'enseignement ; des détails sur les opérations, sur la quantité de travail exécuté, qui en fassent concevoir la possibilité, qui mettent à portée d'en faire ailleurs la répétition ; des vues sur les qualités que l'on doit s'attacher à former, à développer, à porter au plus haut degré dans les élèves, pour les rendre vraiment propres aux différens services publics, et tant d'autres considérations

importantes à tirer d'un sujet si fécond, nous semblent dignes d'être offertes au public.

Nous ferons tous nos efforts pour remplir son attente, ainsi que les intentions du Gouvernement, en nous attachant sans cesse à perfectionner l'institution confiée à nos soins, et en contribuant de tous nos moyens à la communication des lumières et à l'accroissement de l'instruction générale.

LOI

Qui fixe l'époque de l'ouverture des examens des Candidats qui se destinent à l'École Polytechnique, *établie à Paris, et détermine les conditions nécessaires pour y être admis.*

Du 15 Fructidor, l'an 3.e de la République française, une et indivisible.

LA CONVENTION NATIONALE, après avoir entendu le rapport de ses comités de salut public, des travaux publics et d'instruction publique, réunis, DÉCRÈTE :

ARTICLE PREMIER.

L'ÉCOLE centrale des travaux publics portera à l'avenir le nom d'*École Polytechnique.*

II. Les examens des candidats pour cette École, s'ouvriront chaque année le premier brumaire, et se feront de manière que les admis puissent être rendus à Paris au commencement des études de l'École, qui aura lieu le premier nivôse.

III. Les connaissances exigées dans ces examens seront l'arithmétique ; l'algèbre, comprenant la résolution des équations des quatre premiers degrés, et la théorie des suites ; la géométrie, comprenant la trigonométrie, l'application de l'algèbre à la géométrie, et les sections coniques.

IV. Les autres conditions et le mode de ces examens seront conformes à ce qui est prescrit par les articles II, III, V, VI, VII, VIII et IX de la loi du 7 vendémiaire dernier, relative au même objet.

V. Chaque examinateur adressera au ministre sous l'autorité

duquel l'École sera placée, le compte rendu des examens qu'il aura faits, et dans la forme qui aura été prescrite.

VI. Ces comptes rendus seront remis par le ministre à un jury formé à Paris, et composé de cinq membres choisis parmi les savans étrangers à l'École et les plus distingués dans les sciences mathématiques.

Ce jury, par la comparaison des comptes rendus des examinateurs particuliers, désignera, par ordre de mérite, les jeunes gens qui paraissent avoir le plus d'instruction et de capacité, et qui seront en conséquence admis à l'École, en même nombre que les places vacantes.

VII. Les dispositions des articles XIII, XIV, XV et XVI de la loi du 7 vendémiaire dernier, concernant le traitement et la destination ultérieure des élèves, continueront d'être exécutées.

VIII. A la fin de chaque année d'études, les élèves de l'école seront examinés pour constater le degré de leurs connaissances acquises, et le travail qu'ils auront fait.

Ceux qui, à l'expiration de la première année, n'auront pas fait les deux tiers du travail affecté à cette année, seront censés n'avoir pas l'intention d'approfondir l'étude des sciences et des arts; et en conséquence ils se retireront de l'École.

Ils ne pourraient y être reçus de nouveau qu'après l'intervalle d'une année, et suivant le mode déterminé pour la première admission.

IX. La commission des travaux publics et les comités de la convention qui ont surveillé l'École jusqu'à présent, continueront de le faire et d'assurer l'exécution des lois comme par le passé, en attendant l'activité des pouvoirs constitutionnels qui leur sont substitués.

Visé par le représentant du peuple, inspecteur aux procès-verbaux. Signé *ENJUBAULT.*

Collationné à l'original, par nous président et secrétaires de la Convention nationale. A Paris, le 17 fructidor, an troisième de la République française, une et indivisible. *Signé* BRÉARD, *ex-président;* GOURDAN, J. POISSON, *secrétaires.*

Articles de la Loi du 7 Vendémiaire, an III, dont les dispositions sont maintenues par la Loi précédente, en tout ce qui n'est pas contraire à cette dernière Loi.

Nota. Ce qui est en lettres italiques doit être changé, conformément à la loi du 15 fructidor.

Article II.

Il ne sera admis en qualité d'élèves, que des jeunes gens qui auront justifié de leur bonne conduite ainsi que de leur attachement aux principes républicains, et qui auront prouvé leur intelligence en subissant un examen sur l'arithmétique et sur les *élémens d'algèbre* et *de géométrie.*

III. Cet examen aura lieu en même-temps dans plusieurs communes distribuées sur le territoire de la France, et où les candidats pourront se rendre suivant la proximité des lieux et la facilité des communications.

Pour l'année actuelle, ces communes seront:

Dune-Libre, Amiens, Mézières, Caen, Rouen, Reims, Paris, Metz, Strasbourg, Brest, Rennes, Nantes, Tours, Auxerre, Dijon, Rochefort, Bordeaux, Bayonne, Toulouse, Montpellier, Marseille et Grenoble.

V. Les examens commenceront, au plus tard, le premier brumaire : la *Commission des travaux publics* donnera les ordres pour que les examinateurs soient rendus à leur poste à cette époque; elle leur adressera les instructions nécessaires, ainsi qu'aux autorités qui doivent participer à cette mesure.

VI. Tous les jeunes citoyens âgés de seize à vingt ans, autres que ceux qui sont compris dans la première réquisition, pourront se présenter à l'examen.

Ceux qui feraient partie de la première réquisition, ou qui seraient

attachés à d'autres services publics, ne le pourront qu'autant qu'ils en auront reçu l'autorisation expresse du *comité de salut public.*

VII. Nul ne pourra se présenter à l'examen, s'il n'est porteur d'une attestation de la municipalité du lieu de son domicile, qui prouve qu'il a toujours eu une bonne conduite, et qu'il a constamment manifesté l'amour de la liberté et de l'égalité, et la haine des tyrans.

VIII. En arrivant dans la commune où ils doivent être examinés, les candidats se rendront à la municipalité pour y apprendre le lieu et le jour où ils pourront se présenter à l'examen.

IX. L'examen se fera en public, et dans le local qui aura été préparé par la municipalité.

XIII. Les élèves appelés par la *Commission, se rendront à Paris avant le 10 frimaire prochain.*

Ils recevront, pour ce voyage, le traitement des militaires isolés en route, comme canonniers de première classe, conformément au décret du 2 thermidor.

XIV. A compter du jour de leur arrivée, ils jouiront du traitement de douze cents livres par an, pour tout le temps qu'ils resteront à l'École.

Dans aucun cas, ce temps ne pourra se prolonger de plus d'un an au-delà des trois années nécessaires aux cours ordinaires des études.

XV. Les élèves, après ce temps d'étude, seront employés aux fonctions d'ingénieurs pour les différens genres de travaux publics, d'après la capacité et l'aptitude qu'ils auront montrées.

Ceux qui n'auront pas acquis les connaissances suffisantes, retourneront chez eux, et cesseront de recevoir le traitement.

XVI. Le *comité de salut public* est cependant autorisé à tirer de l'École les élèves qui pourraient être employés utilement pour la République, lorsque les besoins du service l'exigeront.

LOI

Concernant les Écoles de services publics.

Du 30 Vendémiaire, an 4.e de la République française, une et indivisible.

LA CONVENTION NATIONALE, après avoir entendu le rapport des comités de salut public et d'instruction publique, DÉCRÈTE :

TITRE PREMIER.

Dispositions générales.

ARTICLE PREMIER.

INDÉPENDAMMENT de l'organisation générale de l'instruction, la République entretient des Écoles relatives aux différentes professions uniquement consacrées au service public, et qui exigent des connaissances particulières dans les sciences et les arts.

II. Ces Écoles sont comprises sous les dénominations suivantes :

École Polytechnique.
Écoles d'artillerie.
École des ingénieurs militaires.
École des ponts et chaussées.
École des mines.
École des géographes.
École des ingénieurs de vaisseaux.
Écoles de navigation.
Écoles de marine.

III. On ne peut être admis à aucune de ces Écoles sans avoir justifié de l'instruction préliminaire exigée pour les examens de concours, suivant le mode prescrit pour chacune d'elles.

IV. Les élèves des Écoles de services publics sont salariés par l'État.

V. Les Écoles actuellement existantes, relatives aux services publics, dont il s'agit dans le présent décret, prendront à l'avenir les dénominations énoncées à l'article II, et qui conviennent respectivement à leur genre.

Ce qui concerne leur nombre et leur régime propre sera déterminé dans les titres suivans, ou par de simples règlemens du pouvoir exécutif, suivant la nature des objets.

VI. Celles des Écoles indiquées à l'article II, et qui n'existent pas encore, seront instituées le plus promptement possible.

VII. Les Écoles de services publics seront entretenues sur les fonds à la disposition des ministres respectifs qui en auront la surveillance. Les ministres proposeront, le plutôt possible, au corps législatif la somme annuelle qu'il convient d'affecter à chacune d'elles.

VIII. Seront exclus des Écoles de services publics les citoyens qui auraient manifesté des opinions ou qui auraient tenu une conduite anti-républicaines.

TITRE II.

École Polytechnique.

ARTICLE PREMIER.

L'ÉCOLE Polytechnique sera sous l'autorité du ministre de l'intérieur.

Cette École est destinée à former des élèves pour le service de l'artillerie; du génie militaire; des ponts et chaussées, et constructions civiles; des mines; des constructions de vaisseaux et bâtimens de mer; de la topographie; et en même temps pour l'exercice libre des professions qui nécessitent des connaissances mathématiques et physiques.

II. Le nombre des élèves qui la composeront est réduit à trois cent soixante.

III. Les conditions et le mode d'examen pour être admis à cette École, seront conformes à ce qui est prescrit par la loi du 15 fructidor, an III.

IV. Le cours complet des études de l'École Polytechnique sera de trois années, conformément à son organisation actuelle.

V. A la fin de chaque année, il sera fait un examen des élèves, pour connaître leur instruction, leur capacité, et le travail qu'ils auront fait, conformément à ce qui est prescrit par l'article VIII de la loi du 15 fructidor, an III.

VI. Ceux qui auront satisfait aux conditions exigées, passeront au travail de la deuxième et de la troisième année, et commenceront par l'une ou l'autre, suivant la profession particulière à laquelle ils se destineront, ou suivant qu'il sera réglé par l'autorité qui dirige l'École.

VII. Les élèves qui se destineront à servir la patrie, soit dans l'artillerie, soit dans les ponts et chaussées, soit dans le génie militaire, soit dans les mines, pourront, après leur deuxième année d'études à l'École Polytechnique, se présenter aux concours qui seront ouverts à Paris pour ces divers services.

VIII. Ils seront examinés sur les élémens de mathématiques, y compris la mécanique, et sur les autres travaux qu'ils auront faits à l'École : les plus instruits et les plus capables seront admis pour chaque partie, à proportion des places vacantes dans l'année, d'après ce qui sera statué par les ministres de la guerre et de l'intérieur, en ce qui les concerne respectivement.

IX. Les élèves ainsi reçus iront aux Écoles d'application, ou exerceront immédiatement les fonctions auxquelles ils sont destinés, suivant les règlemens de chaque espèce de service, et ils jouiront des appointemens qui y sont attachés.

Les élèves non reçus pourront passer à l'École Polytechnique une troisième année, et, à son expiration, se présenter de nouveau à l'examen.

X. Ceux admis pour le génie militaire et les ponts et chaussées, acheveront à l'École Polytechnique la troisième année du cours d'études, avant d'entrer à l'École d'application de leur genre : leur traitement pendant cette troisième année sera augmenté de 300 francs.

XI. Après leur première année d'études à l'École Polytechnique, les élèves qui voudraient être, soit ingénieurs de vaisseaux, soit ingénieurs-géographes, se présenteront à l'examen qui sera ouvert à Paris pour l'admission aux Écoles d'application de ces deux genres : les plus instruits y seront reçus, en même nombre que celui des places à y remplir; les autres pourront continuer leurs études à l'École Polytechnique, pour se faire examiner de nouveau à l'époque prescrite.

XII. Les élèves des mines, ainsi que ceux de l'École des ingénieurs de vaisseaux, pourront, quoiqu'attachés à leurs Écoles particulières à Paris, suivre l'enseignement de la physique et de la chimie donné à l'École Polytechnique, et travailler dans les laboratoires de cette École.

XIII. Enfin, ceux qui se proposeraient de servir la République dans d'autres genres que ceux énoncés dans les articles précédens, auront la faculté d'achever le cours entier des études de l'École Polytechnique, ou d'en sortir à leur gré après la première, la seconde ou la troisième année, en s'assujettissant d'ailleurs à tous les règlemens de l'École.

XIV. Dans aucun cas, aucun élève ne pourra rester en cette qualité plus de quatre ans à l'École Polytechnique.

XV. Le ministre de l'intérieur fera connaître à l'avance, chaque année, le nombre des élèves à admettre à l'École Polytechnique, d'après le nombre des places qui deviendront vacantes.

Il statuera d'ailleurs sur tout ce qui concerne le régime intérieur de l'École, et tiendra la main à ce que l'enseignement et le travail y soient les plus propres à remplir le but qu'on se propose dans

cette

cette institution, en se conformant toutefois à ce qui lui sera prescrit par le directoire exécutif.

XVI. A l'avenir, il ne sera plus admis aux Écoles particulières du génie militaire, des ponts et chaussées, des mines, des géographes, ainsi que de l'artillerie et des ingénieurs de vaisseaux, que des jeunes gens ayant passé à l'École Polytechnique, et ayant rempli toutes les conditions prescrites.

Néanmoins, jusqu'à ce qu'il se trouve assez d'élèves qui aient satisfait à ces conditions, le directoire exécutif entretiendra ces différens services par des élèves, ou choisis suivant l'ancien mode, ou tirés de l'École Polytechnique ; à cet effet, il pourra prendre dans cette École ceux dont il jugerait les services utiles à la patrie, suivant les circonstances.

TITRE III.

Des Écoles d'Artillerie.

Article premier.

L'École des élèves d'artillerie, établie à Châlons-sur-Marne, restera en activité jusqu'à la paix. Les règlemens donnés pour cette École par le comité de salut public, en date du 25 floréal, seront observés jusqu'à la cessation de cette École.

II. A la paix, et lors de la suppression de l'École de Châlons, les élèves qui se destineront à entrer dans l'artillerie suivront, deux ans au moins, les études de l'École Polytechnique ; ils ne seront admis ensuite dans l'une des Écoles des régimens, créées par la loi du 8 floréal, an troisième, qu'après un examen qui constatera leur instruction et leur capacité.

III. Les huit Écoles d'artillerie, placées près des régimens de cette arme, seront disposées et entretenues par le ministre de la guerre, de manière que les élèves qui y seront envoyés comme

officiers, et après avoir subi l'examen indiqué dans l'article précédent, puissent y appliquer leurs connaissances aux arts, à la construction des ouvrages, et aux manœuvres de guerre, qui dépendent de l'artillerie. Les études des mathématiques élémentaires qui en faisaient partie, seront supprimées, et renvoyées avant l'examen nécessaire pour entrer à ces Écoles.

TITRE IV.

École des Ingénieurs militaires.

ARTICLE PREMIER.

L'ÉCOLE des ingénieurs militaires, réunie à celle des mineurs, sera établie à Metz, dans la ci-devant abbaye de Saint-Arnould, et mise en activité le plus promptement possible.

II. Le nombre des élèves ne pourra être au-dessus de vingt.

Ils auront le grade de sous-lieutenant, et le traitement en conséquence.

III. Il ne sera reçu à l'École de Metz, que des jeunes gens ayant fait trois années d'études à l'École Polytechnique, et ayant prouvé leur instruction dans les examens qu'ils subiront à cet effet.

IV. L'examen pour l'admission à l'École de Metz, aura lieu à Paris, tous les ans, dans le mois de frimaire.

Les élèves reçus auront la faculté, ou d'aller sur-le-champ à Metz, ou de prendre un congé jusqu'au premier germinal suivant.

V. Dans tous les cas, ils seront tenus de se rendre à l'École à cette époque, qui sera celle de l'ouverture des travaux.

VI. Ces travaux seront l'application des connaissances théoriques que les élèves auront prises à l'École Polytechnique : ils auront principalement pour objet la construction de toutes sortes d'ouvrages de fortifications, de mines et contre-mines, les simulacres de siége, d'attaque et de défense, les levées de plans et les reconnaissances

militaires, enfin, tous les détails du service des ingénieurs dans les places et aux armées.

VII. Ces études seront au moins d'une année : après ce temps, les élèves qui auront l'instruction suffisante, pourront être détachés dans des garnisons, ou employés à divers objets de service, en attendant qu'ils puissent être compris dans le corps du génie, en raison des places vacantes.

VIII. Le ministre de la guerre, avec l'approbation du directoire exécutif, déterminera le nombre des élèves à recevoir chaque année à l'École de Metz, ou à en faire sortir.

Il organisera cette École, pour remplir le but de son institution.

IX. Les officiers admis depuis 1792 pour servir en qualité d'ingénieurs militaires, seront tenus, pour continuer leur service, de faire preuve de capacité, de moralité, et d'instruction dans les examens qu'ils subiront devant un examinateur, pour la partie théorique, et deux officiers supérieurs du génie. Ces examens commenceront à avoir lieu dans le courant de brumaire prochain.

X. Le pouvoir exécutif donnera, pendant un an, à ceux qui seront jugés n'avoir pas les connaissances nécessaires, les facilités convenables pour acquérir l'instruction qui leur manque ; au bout duquel temps, ceux qui n'auraient pas satisfait à l'examen, ne seront plus admis à remplir les fonctions d'officier du génie.

TITRE V.

École des Ponts et Chaussées.

ARTICLE PREMIER.

L'ÉCOLE actuelle des ponts et chaussées, créée en 1747, et instituée de nouveau conformément à la loi du 19 janvier 1791, est conservée comme École d'application.

II. Le dépôt des plans et modèles relatifs aux travaux des routes, canaux et ports maritimes, continuera d'être joint à cette École.

III. Les élèves seront au nombre de trente-six, et serviront au remplacement tant des ingénieurs connus sous la dénomination d'*ingénieurs des ponts et chaussées*, que de ceux qui, dans les grands ports, étaient nommés *ingénieurs des bâtimens civils de la marine*.

IV. Les élèves seront tirés de l'École Polytechnique, conformément à ce qui est prescrit dans le titre relatif à cette École, et conserveront le traitement qu'ils y avaient.

V. L'instruction qui sera donnée dans l'École des ponts et chaussées, aura principalement pour objet, 1.° l'application des principes de physique et de mathématiques à l'art de projeter et construire les ouvrages relatifs aux routes, aux canaux et aux ports maritimes, et aux édifices qui en dépendent; 2.° les moyens d'exécution et de pratique; 3.° les formes établies pour la rédaction des devis et détails estimatifs des ouvrages à exécuter, et l'ordre à tenir dans la comptabilité.

Le local actuel de l'École des ponts et chaussées n'étant pas national, le ministre de l'intérieur est chargé de lui trouver un emplacement plus convenable, et de pourvoir à l'organisation de cet établissement.

TITRE VI.

École des Mines.

ARTICLE PREMIER.

L'AGENCE des mines actuellement existante prendra dorénavant le nom de *Conseil des mines*, et sera sous l'autorité du ministre de l'intérieur.

Ce conseil donnera au ministre des avis motivés sur tout ce qui a trait aux mines de la République.

Les dispositions des arrêtés du comité de salut public, des 13 et 18 messidor, an II, relatifs au conseil et aux inspecteurs, ingénieurs et élèves des mines, continueront d'être exécutées en tout ce qui ne sera pas contraire au présent décret.

II. Il sera établi une École pratique pour l'exploitation et le traitement des substances minérales.

Le ministre de l'intérieur est chargé de placer cette École près d'une mine appartenant à la République, et déjà en activité, ou dont on puisse commencer et suivre l'exploitation avec avantage.

III. Le nombre des élèves des mines sera de vingt.

Les élèves actuels seront réduits à ce nombre, par un concours qui aura lieu avant le mois de nivôse : ce concours consistera dans un examen des élèves, que le conseil des mines fera faire, par des inspecteurs, sur toutes les connaissances théoriques et pratiques nécessaires à l'exploitation des mines.

IV. Dix, au moins, des élèves seront attachés à l'École pratique pour y suivre pendant un an, et plus s'il le faut, l'instruction qui y sera donnée : les autres élèves seront attachés respectivement à chacun des inspecteurs, pour les accompagner dans leurs tournées, et revenir avec eux à Paris, lorsque ces inspecteurs se réunissent près du conseil des mines.

Le conseil pourra garder constamment près de lui deux des élèves, pour les employer aux opérations qu'il jugera les plus utiles.

V. Chaque année, deux élèves choisis au concours parmi ceux qui auront suivi au moins pendant un an l'École pratique, et auront voyagé avec un inspecteur au moins pendant une autre année, seront reçus ingénieurs surnuméraires. Leur traitement en cette qualité sera augmenté de 500 francs par an.

VI. Les surnuméraires seront employés comme les ingénieurs, les suppléeront au besoin, et passeront par ancienneté aux places qui deviendront vacantes.

VII. Le nombre des élèves des mines sera complété, chaque année, par des candidats tirés de l'École Polytechnique, conformément à ce qui est prescrit au titre relatif à cette École.

Pendant les deux prochaines années seulement, les élèves qui seront réformés par suite du présent décret, seront admis à concourir

avec les élèves de l'École Polytechnique ; pour remplir les places vacantes parmi les élèves des mines.

VIII. Il sera attaché à l'École pratique des mines deux professeurs, l'un des connaissances relatives aux travaux d'exploitation, l'autre de docimasie et métallurgie ; lesquels seront aidés dans leurs fonctions par deux ingénieurs des mines.

IX. Indépendamment des élèves des mines, il sera admis à l'École pratique dix externes, âgés de 15 à 20 ans, et qui auront fait preuve de capacité et de bonne conduite : ces externes suivront l'instruction de l'École à leurs frais, et seront renouvelés chaque année.

X. Néanmoins, pour la première année seulement, ceux des élèves réformés par l'effet du concours prescrit par l'article III du présent titre, pourront continuer leur instruction près l'École pratique, et y conserveront leur traitement.

Ces élèves, alors, tiendront lieu des externes dont il est parlé dans l'article précédent; et dans le cas où le nombre en serait moindre que dix, il pourra être complété par des externes non salariés.

XI. Il sera attaché à la garde des collections formées à Paris, près le conseil des mines, 1.° un conservateur des objets de minéralogie; 2.° un conservateur des produits chimiques, chargé en même-temps des essais ; 3.° un bibliothécaire, versé dans les langues étrangères.

TITRE VII.

École des Géographes.

ARTICLE PREMIER.

IL sera établi une École composée habituellement de vingt élèves, qui seront instruits et exercés aux opérations géographiques et topographiques, aux calculs qui y sont relatifs, et au dessin de la carte.

II. Ces élèves feront leurs premières études, au moins pendant un an, à l'École Polytechnique, et ils subiront un examen lorsqu'ils en sortiront, pour entrer à l'École des géographes.

III. Cet examen aura, en général, pour objet, les mathématiques pures et appliquées ; mais il portera principalement sur l'astronomie géométrique, les deux trigonométries et le dessin de la carte.

IV. L'instruction des élèves de l'École des géographes sera divisée en deux parties, dont l'une aura pour objet les opérations sur le terrain, et l'autre le travail du cabinet.

V. Les opérations sur le terrain seront de trois sortes :

1.° Le figuré du terrain;

2.° Les mesures géométriques, soit des angles, soit des bases;

3.° Les observations astronomiques.

VI. Les travaux du cabinet auront deux objets, savoir :

1.° Les opérations graphiques relatives à la réduction et au dessin des cartes;

2.° Les calculs trigonométriques et les toisés.

VII. Le traitement annuel des élèves de l'École des géographes, sera le même que celui dont ils jouissaient à l'École Polytechnique.

VIII. Il y aura deux professeurs à l'École des géographes, dont un pour la partie géométrique, et un pour le dessin. Le directeur du cadastre sera attaché à cette École, et en formera le conseil avec les professeurs.

IX. Chaque année, le directeur du cadastre, et les diverses administrations qui auront besoin de géographes, feront leurs demandes au ministre de l'intérieur. Les places à remplir seront données aux plus instruits des élèves, qui prendront alors le titre d'*ingénieurs-géographes.*

X. Pour donner de l'activité aux travaux du cadastre, et pouvoir y appliquer le plus promptement possible des hommes à talens, le nombre des élèves sera d'abord provisoirement porté à cinquante, avec un professeur de plus pour le dessin : ce supplément y sera entretenu tant que l'exigeront les besoins du cadastre.

XI. Le ministre de l'intérieur est chargé de pourvoir à l'emplacement et à l'organisation de cette École.

TITRE VIII.

École des Ingénieurs de vaisseaux.

ARTICLE PREMIER.

L'ÉCOLE des ingénieurs-constructeurs actuellement existant à Paris, est conservée sous le nom d'*École des ingénieurs de vaisseaux.*

II. Après la présente année, il ne sera admis à cette École que des jeunes gens ayant fait au moins un an d'études à l'École Polytechnique.

III. Le choix entre ces élèves sera fait chaque année par un examen de concours sur la géométrie descriptive, la mécanique, et les autres parties du travail affecté à la première année d'études de l'École Polytechnique.

IV. Le traitement des élèves admis à l'École des ingénieurs de vaisseaux, sera de 1500 francs par an.

V. Quant au surplus de l'instruction donnée à l'École des ingénieurs de vaisseaux, et à son régime, ils continueront d'avoir lieu comme par le passé.

Il n'est rien innové également par rapport au nombre des élèves.

Les cinq élèves pour la construction des bâtimens de commerce, qui y étaient attachés, y seront reçus de même chaque année, et aux mêmes conditions : ils auront la faculté de suivre tant l'enseignement de la première année, donné à l'École Polytechnique, que celui de l'École particulière des ingénieurs de vaisseaux.

TITRE IX (1).

Écoles de Navigation.

ARTICLE PREMIER.

LES Écoles de mathématiques et d'hydrographie destinées pour la marine de l'État, et les Écoles d'hydrographie destinées à la marine

(1) Quoique ce titre ainsi que le suivant n'aient aucun rapport avec l'École Polytechnique, on a cru devoir les donner pour conserver l'intégrité de la loi.

du

du commerce, prendront, à l'avenir, le nom d'*Écoles de navigation.*

II. Les dispositions de la loi du 10 août 1791 concernant les Écoles, sont maintenues.

III. Il sera formé deux nouvelles Écoles de navigation pour le commerce; l'une sera placée à Morlaix, et l'autre à Arles.

Le ministre de la marine est chargé de les établir le plus promptement possible, semblablement aux autres Écoles de même genre.

TITRE X (1).

Écoles de Marine.

ARTICLE PREMIER.

LES aspirans de la marine seront reçus dans un concours où ils seront interrogés sur l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, la statique et la navigation.

On se conformera d'ailleurs, relativement à ce concours, au titre II de la loi du 10 août 1791.

II. Les aspirans reçus se rendront dans celui des ports qui leur sera indiqué par le ministre de la marine.

III. Les Écoles pour les aspirans de la marine, seront établies dans les ports de Brest, Toulon et Rochefort.

IV. Il sera armé chaque année, dans chacun de ces ports, une corvette dont l'unique destination sera de servir à l'instruction des aspirans de la marine, et sur laquelle ils seront embarqués aussitôt après leur arrivée dans le port.

V. Cette corvette mettra souvent à la voile, et fera des sorties le long des côtes; elle sera désarmée et réarmée; enfin on y exécutera tout ce qui peut donner aux aspirans l'instruction la plus complète sur le grément, le pilotage et le canonnage. Les aspirans y subiront des examens sur ces divers objets.

VI. Après six mois d'embarquement sur la corvette d'instruction,

---

(1) Quelques changemens aux dispositions de ce titre ont été faits par une loi postérieure. *Voyez* à ce sujet la loi du 3 brumaire an 4, sur l'organisation de la marine.

les aspirans rentreront dans le port, et seront occupés à suivre les différens ateliers de la marine, où des maîtres choisis leur expliqueront les détails des ouvrages qui s'y fabriquent.

VII. Peu de mois après leur débarquement, une nouvelle corvette, ou une frégate, commandée par des officiers habiles, sera armée dans chaque port, et les aspirans y seront embarqués pour faire une campagne de long cours, qui durera environ un an.

VIII. Pendant ce temps, les aspirans seront exercés aux manœuvres et observations les plus utiles à leur instruction et aux progrès de la navigation.

Ils rédigeront les journaux et mémoires de l'expédition; et dans les belles mers, les officiers leur feront commander les mouvemens du vaisseau.

IX. Les aspirans de la marine qui n'ont point été reçus au concours, comme il est prescrit par le titre II de la loi du 10 août 1791, seront tenus de satisfaire aux conditions de ce concours, avant de monter sur les corvettes d'instruction.

X. Le ministre de la marine est chargé de l'établissement le plus prochain des corvettes d'instruction, et d'y faire passer successivement les aspirans actuels, en commençant par les plus anciens.

XI. Pour être reçu, à l'avenir, enseigne entretenu, il faudra avoir fait son service sur les deux corvettes d'instruction, et satisfaire en outre à toutes les autres conditions actuellement exigées pour parvenir à ce grade.

Le présent décret, avec le rapport qui le précède, sera imprimé et inséré au bulletin.

Visé par le représentant du peuple, inspecteur aux procès-verbaux.
Signé *ENJUBAULT.*

Collationné à l'original, par nous président et secrétaires de la Convention nationale. A Paris, le 2 Brumaire, an quatrième de la République française, une et indivisible. *Signé* GENISSIEU, *président;* AUGER, J. F. PHILIPPE DELLEVILLE, P. M. DELAUNAY, *secrétaires.*

ARRÊTÉ

DU DIRECTOIRE EXÉCUTIF.

Du 6 Prairial, an 4.

Le directoire exécutif, considérant combien il importe de procurer, le plutôt possible, aux différentes Écoles de services publics, des élèves ayant toutes les connaissances préliminaires indiquées par la loi, et voulant assurer et faciliter l'exécution de celle du 30 vendémiaire dernier, concernant lesdites Écoles, arrête ce qui suit:

ARTICLE PREMIER.

Les citoyens *Laplace*, en qualité d'examinateur pour l'admission aux Écoles d'artillerie, des ingénieurs de vaisseaux et des ingénieurs géographes, et *Bossut*, comme examinateur pour celles des ingénieurs militaires, des ponts et chaussées et des mines, se rendront à l'École Polytechnique dans le mois de brumaire, et y interrogeront les jeunes gens qui se destinent respectivement à chacune de ces branches de service.

II. L'examen portera sur les objets de l'enseignement donné à l'École Polytechnique, dans les divisions auxquelles les élèves ont dû être attachés.

Le travail fait par l'élève, et l'intelligence qu'il mettra à en rendre compte, seront les bases principales d'après lesquelles il devra être jugé.

Son assiduité et sa bonne conduite seront prises aussi en considération.

A cet effet, chaque examinateur, respectivement, se concertera avec le directeur de l'École, pour former la liste des élèves, par ordre de mérite, d'après les résultats de l'examen.

Les élèves les plus méritans seront admis dans chaque genre de

service, en raison des places vacantes, suivant ce qui aura été déterminé par le ministre dont ces services dépendent immédiatement.

III. Les admissions seront faites assez à temps, pour que l'on puisse connaître le nombre des places qui viendront à vaquer à l'École Polytechnique, et les remplir conformément à la loi du 15 fructidor, an III.

IV. Les jeunes gens qui, dans toutes les parties de la République, se destinent à l'un des services publics désignés au présent arrêté, pourront se présenter aux examens qui auront lieu chaque année, pour le concours des candidats, à l'École Polytechnique, et seront reçus à cette dernière École, s'ils satisfont aux conditions prescrites par la loi du 15 fructidor, an III.

Au moyen de ces dispositions, les examens suivant l'ancien mode n'auront plus lieu.

V. Les deux examinateurs désignés à l'art I.er, seront membres du jury prescrit par l'article 6 de la loi du 15 fructidor dernier, pour la formation de la liste des élèves à admettre chaque année à l'École Polytechnique.

VI. Les ministres de l'intérieur, de la guerre, et de la marine, sont chargés d'assurer l'exécution du présent arrêté, chacun en ce qui le concerne; conséquemment d'en notifier les dispositions à ceux de leurs subordonnés qui doivent y prendre part.

Ledit arrêté sera imprimé.

Signé CARNOT, *président.*

Par le Directoire exécutif:

Le secrétaire général, LAGARDE.

JOURNAL

JOURNAL
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

CHIMIE.

Des propriétés de l'Acide sulfureux et de ses combinaisons avec les bases terreuses et alcalines ;

Par les C.ens Fourcroy et Vauquelin.

Plusieurs savans se sont occupés des propriétés de l'acide sulfureux et de quelques-unes de ses combinaisons ; mais aucun n'en a fait une histoire complète.

Acide sulfureux.

Berthollet est presque le seul qui ait ouvert la carrière, et ait donné les premières connaissances exactes sur cet objet (1).

Nous ne décrirons point ici l'appareil ni la manière de préparer cet acide, ils sont assez connus de tous ceux qui ont quelques connaissances de chimie.

§. I.
Des propriétés physiques de l'acide sulfureux.

Cet acide est un fluide élastique permanent à la température et à la pression ordinaires de notre atmosphère. Il a une odeur vive et suffocante ; il ne peut servir à la combustion, ni à la respiration des animaux.

(1) *Annales de Chimie*, vol. II, pag. 54.

Bergmann, dans ses attractions électives simples, dit que l'acide sulfureux, préparé à l'appareil au mercure, ne peut être amené à l'état liquide par aucun moyen connu. *Monge* et *Clouet* annoncent au contraire, qu'à l'aide d'un grand froid, et d'une forte pression exercés à-la-fois sur ce gaz, ils l'ont rendu liquide.

Sa pesanteur spécifique, suivant *Bergmann*, est de 0,00246, et de 0,00251 suivant *Lavoisier*, ce qui fait environ 1,508 de grain le pouce cube, et 4 onces 5 gros le pied cube.

Action du Calorique.

§. II. Propriétés chimiques de l'acide sulfureux.

Priestley et *Berthollet* assurent que le gaz acide sulfureux, exposé à une haute température, dépose une portion de soufre, et devient de l'acide sulfurique; *Bergmann* rapporte aussi ce fait. Cette expérience, répétée de plusieurs manières, ne nous a point donné le même résultat.

Action du Gaz oxigène.

§. III.

Une partie de gaz oxigène sec et deux parties de gaz acide sulfureux préparé à l'appareil au mercure, mêlés ensemble, ne subissent aucun changement notable, même au bout de plusieurs mois. Si on ajoute au mélange une petite quantité d'eau, on aperçoit, après la diminution due à la combinaison d'une portion d'acide sulfureux, une absorption successive, qui annonce une véritable combinaison entre ces deux corps. En effet, lorsqu'on lave le mélange au bout de quelques mois, on ne retrouve plus la même quantité de gaz oxigène.

L'attraction de l'eau, pour l'acide sulfurique, favorise donc l'union de l'oxigène avec l'acide sulfureux. Cependant nous n'avons jamais pu convertir la totalité de l'acide sulfureux en acide sulfurique, quoiqu'il restât toujours du gaz oxigène dans l'appareil.

On convertit sur-le-champ l'acide sulfureux en acide sulfurique, en faisant passer un mélange de ce gaz et de gaz oxigène dans un tube rougi au feu; alors il se forme une fumée blanche très-épaisse, qui se condense en liquide dans un flacon qu'on a eu soin de placer à l'autre extrémité du tube.

Il est arrivé plusieurs fois, lorsque par hasard nous avions attrapé les justes proportions, que les deux gaz se sont entièrement détruits, et qu'il n'est pas resté un atome de résidu.

§. IV. Action de l'eau.

En faisant passer du gaz acide sulfureux dans de l'eau refroidie par la glace, la combinaison se fait avec une rapidité telle, que pas une seule bulle ne parvient jusqu'au haut de la liqueur, tant que celle-ci n'est pas saturée. La glace se fond promptement, ce qui indique qu'il se dégage beaucoup de calorique. L'eau acquiert, à cette température, les 0.15 de son poids; sa pesanteur spécifique est à celle de l'eau pure comme 1020 est à 1000.

L'eau ainsi saturée d'acide sulfureux, exposée à la température de 15 + 0, se remplit tout-à-coup d'une infinité de petites bulles qui grossissent successivement, et vont se répandre à la surface. Si l'on plonge une bouteille pleine de cet acide dans de l'eau chaude, il bout avec une rapidité étonnante; il perd, par cette opération, une partie de son odeur et de son acidité; néanmoins on ne peut pas facilement l'en priver entièrement, même par l'ébullition.

Cet acide se gèle à quelques degrés — 0, et ce qui pourra paraître étonnant, c'est qu'il ne s'en dégage pas un atome de gaz, comme cela arrive aux autres gaz dissous dans l'eau.

Ces expériences prouvent 1.° que plus l'eau est froide, et plus elle absorbe d'acide sulfureux; 2.° que la combinaison de ces deux corps est accompagnée de chaleur; 3.° qu'une pareille combinaison ne peut conserver, à une température plus élevée, tout l'acide dont elle s'était chargée à un degré plus bas; 4.° que cette combinaison passe à l'état solide par le refroidissement, sans éprouver de décomposition, ce qui indique une grande affinité de l'eau pour l'acide sulfureux, et une attraction faible de ce dernier pour le calorique.

Action de l'Acide sulfurique.

§. V. De l'action des acides sur l'acide sulfureux.

Nous avons fait passer dans l'acide sulfurique, refroidi par un mélange de glace et de sel, du gaz acide sulfureux; à mesure que cet acide arrivait

dans l'acide sulfurique, il s'y combinait, sans qu'une seule bulle parvînt jusqu'à la partie supérieure. Bientôt tout l'acide s'est gelé, et cependant la combinaison se faisait toujours.

De temps en temps le tube qui conduisait l'acide sulfureux, s'obstruait, ce qui nous obligeait de le retirer hors de la liqueur; alors la matière se fondait, et il s'en dégageait une grande quantité de gaz, sous la forme de bulles. Cette combinaison solide n'avait pas d'odeur très-sensible, tant qu'elle était dans la glace; mais lorsqu'on en retirait une portion, et qu'on la mettait sur une plaque de verre, elle faisait une effervescence semblable à celle que présente un morceau de marbre sur lequel on verse un acide, et bientôt elle devenait liquide et très-odorante.

Lorsque la température du mélange de sel et de glace fut remontée à o, une partie de la matière solide se fondit; il se forma des bulles qui s'élevaient dans la partie vide du vase; mais comme il était exactement fermé, elles se cristallisèrent aux parois sous la forme de feuilles de fougère.

Action de l'Acide nitrique.

L'acide sulfureux décompose l'acide nitrique, sur-tout lorsque celui-ci est concentré; il prend d'abord une couleur rouge; le mélange s'échauffe, et il s'en dégage du gaz nitreux, souvent mêlé d'un peu d'acide sulfureux. L'acide sulfureux est changé, par cette opération, en acide sulfurique, car il précipite abondamment le muriate de baryte. Il est démontré par-là que l'acide sulfureux a plus d'affinité avec l'oxigène que l'oxide nitreux: cette vérité est confirmée par la conversion du soufre en acide sulfurique de la part de l'acide nitrique.

Action de l'Acide muriatique oxigéné.

Si l'on met en contact du gaz acide muriatique oxigéné et du gaz acide sulfureux, il se forme des fumées blanches; les deux gaz deviennent tout-à-coup liquides, et perdent leur odeur, si l'on a employé des proportions convenables. Les mêmes effets ont lieu, lorsqu'on mêle ces

deux acides liquides : ils perdent également leur odeur et leur couleur. Il résulte de l'action de ces deux corps l'un sur l'autre, de l'acide sulfurique et de l'acide muriatique ordinaire. La théorie de cette opération est à-peu-près la même que celle de l'expérience précédente.

Action de l'Hydrogène.

§. VI. Action des corps combustibles sur l'acide sulfureux.

Il n'y a nulle action à froid entre ces deux matières ; mais si l'on fait passer à travers un tube de verre, ou de porcelaine, bien chaud, un mélange de trois parties en volume de gaz hydrogène et d'une partie de gaz acide sulfureux, celui-ci est décomposé ; il se forme du gaz hydrogène sulfuré, et il se dépose, à l'extrémité du tube opposée à celle par où l'on a fait entrer les gaz, des cristaux de soufre très-abondans.

L'hydrogène a donc, à une haute température, plus d'affinité avec l'oxigène que le soufre ; et, d'après cela, il n'y a pas d'apparence, comme quelques personnes le pensent, que l'on puisse brûler le soufre au moyen de l'eau, pour le convertir en acide sulfurique.

Action du Phosphore.

Le phosphore n'altère pas l'acide sulfureux ; en faisant chauffer fortement ces deux substances dans un tube de verre, il ne s'est rien passé qui indiquât la décomposition de l'acide sulfureux. Le phosphore s'est figé, en refroidissant, en gouttelettes transparentes, qui ne contenaient pas un atome de soufre, et le gaz acide sulfureux jouissait encore de toutes ses propriétés.

Il y a donc ici entre le soufre et l'oxigène une adhérence plus forte qu'entre le phosphore et le même principe ; aussi ce corps combustible, chauffé avec l'acide sulfurique, ne lui enlève-t-il que l'oxigène excédant à la constitution de l'acide sulfureux.

Action du Gaz hydrogène phosphoré.

Aussitôt que le gaz acide sulfureux et le gaz hydrogène phosphoré sont en contact, il paraît une fumée blanche, et ils perdent leur état fluide. Il se précipite sur les parois du vase où l'on a fait l'opération, des plaques

d'une matière jaune qui brûle sur un fer chaud, d'abord à la manière du phosphore, et ensuite avec les caractères du soufre. Il suit de cette expérience que l'hydrogène est le seul qui brûle dans cette circonstance, puisque les gaz perdent leur élasticité, et que l'on retrouve le phosphore et le soufre combinés ensemble.

Action du Gaz hydrogène sulfuré.

Le gaz acide sulfureux est décomposé par le gaz hydrogène sulfuré; dans le mélange de ces deux gaz, l'hydrogène s'empare de l'oxigène du soufre, et ce corps se sépare des deux côtés : aussi se forme-t-il un dépôt très-abondant. Ces gaz, dissous dans l'eau, éprouvent mutuellement la même décomposition, et le soufre alors se précipite au fond de la liqueur (1). Si l'on a pris des quantités convenables de ces dissolutions, leurs odeurs se détruisent réciproquement.

Action du Carbone.

Nous avons introduit du gaz acide sulfureux dans un tube de verre contenant du charbon rougi; il s'est déposé, à l'extrémité de l'appareil, du soufre cristallisé et de l'acide carbonique mêlé d'un peu de gaz hydrogène sulfuré, dû à une portion d'eau décomposée. Cette décomposition n'a pas lieu à froid.

§. VII. Combinaisons de l'acide sulfureux avec les alcalis.

L'acide sulfureux s'unit facilement aux alcalis et aux terres. On a donné à ces combinaisons le nom générique de *sulfites*. Ils peuvent être préparés de deux manières, ou en présentant aux bases l'acide sulfureux dissous dans l'eau, ou en offrant à ces corps dissous, ou délayés dans l'eau, cet acide à l'état de gaz. Cette dernière méthode est préférable, pour plusieurs raisons qu'il serait trop long d'exposer ici.

L'acide sulfureux étant très-différent de l'acide sulfurique, on concevra facilement que les combinaisons qu'il forme doivent avoir des propriétés particulières, qui ne ressemblent point du tout à celles des sulfates; on

---

(1) *Fourcroy*, Analyse de l'eau d'Enghien.

verra en effet que ces sels ont une saveur, une dissolubilité, une forme qui n'appartiennent qu'à eux seuls; qu'ils obéissent à des lois d'attraction et de décomposition, toutes différentes de celles des sulfates.

Les proportions des principes qui constituent les sulfites n'ayant point encore été déterminées, nous avons cherché une méthode qui pût nous conduire le plus près possible de la vérité; mais elle n'a pu être appliquée à toutes les espèces de sulfites, à cause de la dissemblance de leurs propriétés, en sorte que nous avons été forcés d'en employer plusieurs.

Sulfite de potasse.

On a fait passer dans une dissolution saturée de carbonate de potasse très-pur, du gaz acide sulfureux, jusqu'à ce que l'effervescence fût entièrement finie. Il se dégage, pendant cette combinaison, une petite quantité de calorique, et la liqueur cristallise en refroidissant.

Ce sel est ordinairement blanc et transparent; quelquefois il est légérement jaune et demi-transparent, si sa dissolution a été très-concentrée, et s'il a cristallisé confusément. Sa saveur est piquante et sulfureuse; il présente la forme d'une lame rhomboïdale alongée; souvent sa cristallisation offre de petites aiguilles divergentes d'un centre commun.

Exposé à une chaleur brusque, il décrépite, perd son eau de cristallisation; il rougit ensuite, répand quelques vapeurs d'acide sulfureux; enfin il s'en sépare une portion de soufre, et le résidu est du sulfate de potasse, avec un léger excès d'alcali.

Exposé à l'air, il s'effleurit légérement, devient opaque et dur; sa saveur piquante et sulfureuse disparaît, il en acquiert une autre qui est âcre et amère; alors il ne fait plus d'effervescence avec les acides.

Si l'on fait cette expérience dans un appareil fermé avec du gaz oxigène, on remarque que le volume de cet air diminue, et que même il est entièrement absorbé, lorsqu'on observe les proportions convenables. On voit donc que l'on peut convertir le sulfite de potasse en sulfate, en le privant d'une portion de soufre par le feu, ou en y introduisant de l'oxigène à une température basse.

Le sulfite de potasse est dissoluble dans une quantité d'eau à-peu-près égale à la sienne; cette dissolubilité augmente par la chaleur.

Ce sel est décomposé par la chaux et la baryte ; on peut s'assurer de ce fait, en versant dans de l'eau de chaux une dissolution de sulfite de potasse : il se produit un précipité blanc, qui est du sulfite de chaux, et la potasse reste libre dans l'eau.

L'acide sulfureux ne suit donc pas les mêmes lois d'affinité que l'acide sulfurique, puisque celui-ci adhère plus fortement à la potasse qu'à la chaux.

Les alcalis ne changent pas la nature du sulfite de potasse.

Parmi les acides, les uns décomposent le sulfite de potasse, en en séparant l'acide sulfureux; les autres en changent la nature, sans en chasser l'acide, mais en y portant une portion d'oxigène, et en le convertissant en acide sulfurique. Le premier de ces effets appartient aux acides sulfurique, muriatique, phosphorique et fluorique ; le second, aux acides nitrique et muriatique oxigéné. Les acides boracique et carbonique ne lui font éprouver aucun changement à froid.

Lorsqu'on verse de l'acide sulfurique sur le sulfite de potasse, il se fait un pétillement et une effervescence rapides ; il se dégage en même temps beaucoup de calorique.

L'acide nitrique, au contraire, répand des vapeurs rouges, mêlées seulement d'une petite quantité d'acide sulfureux, et le résidu est composé d'un mélange de sulfate et de nitrate de potasse.

L'acide muriatique oxigéné, mêlé au sulfite de potasse, perd tout-à-coup son odeur, et la liqueur qui en résulte n'a plus de saveur sulfureuse.

Si la dissolution de sulfite de potasse est concentrée, ainsi que celle de l'acide muriatique oxigéné, on voit sur-le-champ se former des cristaux de sulfate de potasse.

Le charbon convertit le sulfite de potasse en sulfure de potasse.

Les sels à base de potasse ne décomposent pas ce sel.

Ceux à base de soude, excepté le borate et le carbonate, sont décomposés par le sulfite de potasse.

Tous les autres sels, dont les acides sont plus forts que l'acide sulfureux, sont également décomposés par le sulfite de potasse.

Les nitrate et muriate sur-oxigénés de potasse, chauffés avec le sulfite de potasse sec, l'enflamment et le changent en sulfate.

Plusieurs

Plusieurs oxides métalliques agissent sur ce sel ; parmi eux, les uns sont entièrement réduits à l'état métallique, tels sont les oxides d'or, d'argent et de mercure ; les autres s'en rapprochent seulement, comme ceux de plomb, de fer et de manganèse, portés au *maximum* d'oxigénation. Il en est d'autres qui changent la nature du sulfite de potasse d'une manière inverse à celle qui a lieu dans tous les cas précédens, c'est-à-dire, qui le convertissent en sulfate, en lui enlevant une certaine quantité de soufre, avec laquelle ils forment des oxides sulfurés, comme les oxides d'arsenic, de fer peu oxidé ; mais il faut, pour que cette opération réussisse, faire bouillir long-temps ces matières dans l'eau, et ajouter ensuite à la dissolution un acide quelconque, qui y occasionne un précipité coloré, en répandant une odeur de gaz hydrogène sulfuré.

Toutes les dissolutions métalliques, excepté les carbonates, sont décomposées par le sulfite de potasse ; et comme la plupart des sulfites métalliques sont insolubles, il se forme des précipités différemment colorés, suivant la nature du métal et son état d'oxidation.

Sulfite de soude.

Ce sel est blanc, parfaitement transparent ; sa forme est un prisme à quatre pans, dont deux très-grands et deux petits, terminés par des pyramides dièdres ; sa saveur est fraîche, et ensuite sulfureuse.

Il se comporte au feu absolument comme le sulfite de potasse, à l'exception seulement qu'il éprouve la fusion aqueuse.

Il s'effleurit à l'air, et se convertit ensuite en sulfate de soude, mais moins promptement que le sulfite de potasse.

Il demande quatre parties d'eau pour se dissoudre ; il se dissout plus abondamment dans l'eau chaude, et il cristallise facilement par le refroidissement.

La baryte, la chaux et la potasse décomposent le sulfite de soude.

Les acides minéraux lui font éprouver les mêmes changemens qu'au sulfite de potasse.

Il n'est pas dissoluble dans l'alkool.

Les sels à base de potasse, excepté le carbonate, ne décomposent pas ce sel ; les autres genres le décomposent comme le sulfite de potasse.

Les oxides métalliques et leurs dissolutions dans les acides se conduisent avec le sulfite de soude, comme avec celui de potasse.

Il contient, par quintal,

1.° De soude	18,8.
2.° D'acide sulfurique	31,2.
3.° D'eau	50.
	100,0.

Sulfite d'ammoniaque.

Ce sel a la forme d'un prisme à six pans terminés par des pyramides à six faces; quelquefois il prend celle de tables quarrées, dont les bords sont taillés en biseau, ce qui donne un solide à dix faces irrégulières. Sa saveur est fraîche et piquante comme celle des sels ammoniacaux; mais il laisse une impression sulfureuse dans la bouche.

Exposé à l'air, il en attire l'humidité, et passe bientôt après à l'état de sulfate.

Il est très-dissoluble; il lui faut au plus une quantité d'eau égale à la sienne pour se dissoudre : la chaleur augmente sa dissolubilité, et il cristallise par le refroidissement.

Il se volatilise au feu sans décomposition.

La baryte, la chaux, la potasse et la soude le décomposent à froid; la magnésie lui fait éprouver la même altération à chaud.

Les acides agissent sur le sulfite d'ammoniaque comme sur ceux de potasse et de soude; seulement les résultats en sont différens.

Le charbon ne le convertit pas en sulfure, parce qu'il se volatilise trop promptement.

Il ne décompose pas les sels à base de potasse, ni de soude; mais il décompose ceux de chaux, de magnésie, de baryte et d'alumine, avec lesquels il forme des précipités insolubles.

Il se comporte à-peu-près de la même manière que les sulfites de potasse et de soude, avec les oxides et les sels métalliques, si ce n'est qu'il forme, avec plusieurs d'entre eux, des sels triples, comme nous le dirons en détail, dans un autre mémoire sur les sulfites métalliques.

Il est formé, par quintal,

1.° D'ammoniaque	29,07.
2.° D'acide sulfurique	60,06.
3.° D'eau	10,87.
	100,00.

Sulfite de chaux.

La forme du sulfite de chaux est celle d'un prisme à six pans, terminés par une pyramide très-alongée. Sa saveur est presque nulle d'abord; mais lorsqu'on le tient quelque temps dans la bouche, il imprime à la langue une saveur manifestement sulfureuse.

Ce sel, lorsqu'il est bien neutre, est très-peu soluble dans l'eau; mais il le devient par un excès d'acide; et c'est ainsi qu'on peut l'obtenir cristallisé, en exposant à l'air sa dissolution dans l'acide sulfureux; l'acide se dissipe, et laisse le sel à l'état de pureté.

Parmi les terres, il n'y a que la baryte qui puisse le décomposer, ce dont on peut s'assurer, en mêlant une dissolution de cette terre avec une dissolution de sulfite de chaux neutre, qui y forme un léger précipité.

La chaleur le convertit en sulfate, en le privant d'une portion de soufre.

Les acides minéraux le décomposent comme les autres sulfites.

Les alcalis ne lui font subir aucun changement, puisque les sulfites alcalins sont décomposés par la chaux.

Parmi les sels neutres, les carbonates alcalins, ainsi que les phosphates, fluates alcalins, sont les seuls qui le décomposent.

Il ne passe que très-lentement à l'état de sulfate par le contact de l'air.

Les dissolutions métalliques le décomposent, au moins pour la plupart.

Il est formé, par quintal,

1.° De chaux	47.
2.° D'acide sulfurique	48.
3.° D'eau	5.
	100.

Sulfite de magnésie.

Ce sel est blanc et transparent; sa forme est un tétraèdre surbaissé; sa saveur est douce et terreuse au commencement, et sulfureuse à la fin.

Exposé au feu, il se ramollit, se boursoufle et devient ductile comme une gomme; il perd environ les 0,45 de son poids par la dessiccation. En continuant ainsi de le chauffer, après qu'il a perdu son eau de cristallisation, l'acide sulfureux s'en sépare, et il ne reste dans la cornue que de la magnésie presque pure. C'est ainsi que nous avons trouvé qu'un quintal de ce sel est composé,

1.° De magnésie	16.
2.° D'acide sulfureux	39.
3.° D'eau	45.
	100.

Ce sel est peu dissoluble dans l'eau, mais il est très-dissoluble dans un excès d'acide, et cette dissolution, exposée à l'air, cristallise très-facilement, en perdant son excès d'acide.

Il devient opaque à l'air, et se change peu à peu en sulfate; mais il faut pour cela beaucoup de temps.

Les alcalis fixes, la chaux, la baryte le décomposent complétement; l'ammoniaque ne le décompose qu'en partie, et il se forme un sel triple.

Les sels alcalins et terreux, excepté ceux d'alumine, le décomposent aussi.

Les acides minéraux et les dissolutions métalliques produisent sur ce sel les mêmes effets que sur les autres sulfites.

Sulfite de baryte.

Ce sel ne cristallise point; il n'a pas de saveur sensible; il est parfaitement insoluble dans l'eau; c'est pourquoi l'acide sulfureux produit un précipité dans une dissolution aqueuse de baryte. Il n'est pas rendu dissoluble dans un excès d'acide, comme les autres sulfites terreux.

Le feu le change en sulfate; il ne passe que très-difficilement à cet état par l'action de l'air.

Il n'est décomposé par aucun alcali, ni par aucune terre.

Les acides le décomposent; aussi l'acide sulfureux ne précipite-t-il pas les sels barytiques, comme le fait l'acide sulfurique.

Parmi les sels neutres, il n'y a que les carbonates alcalins qui puissent le décomposer.

Quant aux autres propriétés de ce sel, elles sont communes avec celles des autres sulfites.

Il est composé,

1.° De baryte	59.
2.° D'acide sulfureux	39.
3.° D'eau	2.
	100.

Sulfite d'alumine.

Il est indissoluble dans l'eau, mais il le devient abondamment par un excès d'acide; sa dissolution ne cristallise pas par le contact de l'air; elle se prend en une masse ductile et mollasse.

Le feu en dégage l'acide sulfureux sans altération.

Tous les alcalis et les terres le décomposent; les acides minéraux lui font éprouver le même effet.

Il est composé,

1.° D'alumine	44.
2.° D'acide sulfureux	32.
3.° D'eau	24.
	100.

Il résulte des faits énoncés dans ce mémoire, que les sulfites ont des propriétés très-différentes de celles des sulfates; qu'ils suivent des lois de dissolution, de cristallisation, d'affinité et de décomposition qui leur sont particulières.

En effet, ils ont 1.° une saveur sulfureuse analogue à celle de leur acide; 2.° ils sont décomposés par le feu, soit en laissant échapper leur acide sans altération, soit en perdant une portion de soufre, et en passant à l'état de sulfates; 3.° ils sont convertis en sulfates par le contact de l'air, ou de toute autre substance capable de leur en fournir, et ils augmentent de poids; 4.° ils sont décomposés par la plupart des acides qui en chassent l'acide sulfureux avec effervescence, et ils produisent une

odeur vive et pénétrante; 5.° ils brûlent rapidement, et avec flamme, lorsqu'on les chauffe avec du muriate sur-oxigéné de potasse, ou avec du salpêtre, et deviennent des sulfates; 6.° les sulfites alcalins sont plus dissolubles que les sulfates, et les sulfites terreux le sont beaucoup moins; 7.° enfin, le sulfite de chaux n'est pas décomposé par les alcalis comme le sulfate.

SUITE DES LEÇONS D'ANALYSE DE PRONY.

DES SUITES RÉCURRENTES

Considérées comme résultant du développement des Fractions rationnelles ; Rapprochement de la théorie qui résulte de cette considération et de celle déduite du Calcul intégral ; Propriétés générales des Suites récurrentes.

J'AI fait dépendre, dans les séances précédentes, la théorie des suites récurrentes de celle des équations différentielles linéaires (1); cette marche est directe et naturelle, mais on peut envisager la question sous un autre point de vue dont je vais entretenir les élèves, afin de ne rien laisser à désirer sur une des plus belles et des plus utiles parties de l'analyse : le rapprochement des deux méthodes n'a pas encore, que je sache, été fait avec les détails dans lesquels je vais entrer. N.o XXIII.

Soit une fraction rationnelle

$$\frac{a + a' u + a'' u^2 + a''' u^3 + \ldots\ldots + a^{(n-3)} u^{n-3} + a^{(n-2)} u^{n-2} + a^{(n-1)} u^{n-1}}{A^{(n)} + A^{(n-1)} u + A^{(n-2)} u^2 + A^{(n-3)} u^3 + \ldots + A''' u^{n-3} + A'' u^{n-2} + A'^{n-1} u^{n-1} + A u^n}$$

dans laquelle le dénominateur est toujours d'une dimension plus élevée que le numérateur, les parenthèses (n), $(n-1)$, $(n-2)$, &c. désignant des accens. Je me propose de développer en série cette fraction, qu'on nomme *génératrice*, et j'emploîrai pour y parvenir la méthode des *coëfficiens indéterminés*, dont j'ai déjà fait usage *n.° XVII;* je pose donc l'équation hypothétique

$$(Q) \ldots\ldots \frac{a + a' u + a'' u^2 + \ldots\ldots + a^{(n-1)} u^{n-1}}{A^{(n)} + A^{(n-1)} u + A^{(n-2)} u^2 + \ldots A u^n} = z_0 + z_{,} u + z_{,,} u^2$$
$$+ z_{,,,} u^3 + \ldots\ldots z_{(n)} u^n + z_{(n+1)} u^{n-1} + \ldots\ldots + z_{(x)} u^x$$
$$+ z_{(x+1)} u^{x+1} + \&c.$$

(1) *Lagrange* a, le premier, donné cette théorie dans le tome I.er des *Mémoires de la Société académique de Turin.*

z_0, z_1, z_{11}, &c., étant les coëfficiens indéterminés, pour en trouver la valeur, on multipliera le deuxième membre par le dénominateur du premier ; on fera ensuite passer tous les termes d'un seul côté, et on ordonnera, par rapport aux puissances de u, ainsi qu'il suit,

$$\left.\begin{array}{llllll} A^{(n)} z_0 & + A^{(n)} z_1 u & + A^{(n)} z_{11} u^2 & + A^{(n)} z_{111} u^3 & + \&c. \\ - a & + A^{(n-1)} z_0 u & + A^{(n-1)} z_1 u^2 & + A^{(n-1)} z_{11} u^3 & + \&c. \\ & - a' u & + A^{(n-2)} z_0 u^2 & + A^{(n-2)} z_1 u^3 & + \&c. \\ & & - a'' u^2 & + A^{(n-3)} z_0 u^3 & + \&c. \\ & & & - a''' u^3 & + \&c. \\ & & & & - \&c. \end{array}\right\} = 0.$$

Chaque bande verticale des coëfficiens d'une même puissance u doit être égale à zéro, ce qui fournit les équations

$$\left.\begin{array}{ll} z_0 & = \frac{a}{A^{(n)}} \\ z_1 & = \frac{-1}{A^{(n)}}(A^{(n-1)} z_0) + \frac{a'}{A^{(n)}} \\ z_{11} & = \frac{-1}{A^{(n)}}\{A^{(n-1)} z_1 + A^{(n-2)} z_0\} + \frac{a''}{A^{(n)}} \\ z_{111} & = \frac{-1}{A^{(n)}}\{A^{(n-1)} z_{11} + A^{(n-2)} z_1 + A^{(n-3)} z_0\} + \frac{a'''}{A^{(n)}} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{(n-1)} & = \frac{-1}{A^{(n)}}\{A^{(n-1)} z_{(n-2)} + A^{(n-2)} z_{(n-3)} + A^{(n-3)} z_{(n-4)} + \ldots + A' z_0\} + \frac{a^{(n-1)}}{A^{(n)}} \end{array}\right\}$$

Les termes isolés $\frac{a}{A^{(n)}}, \frac{a'}{A^{(n)}}, \frac{a''}{A^{(n)}}$, &c. donnés par les coëfficiens du numérateur, ne se trouvent dans les équations ci à côté que depuis z_0 jusqu'à $z_{(n-1)}$ inclusivement ; et à compter de $z_{(n)}$, un coëfficient quelconque $z_{(x)}$ est toujours exprimé par un nombre n de coëfficiens précédens, multipliés chacun respectivement par $A^{(n-1)}, A^{(n-2)}$, &c., la somme des produits étant divisée par $A^{(n)}$.

$$z_{(n)} = \frac{-1}{A^{(n)}}\{A^{(n-1)} z_{(n-1)} + A^{(n-2)} z_{(n-2)} + A^{(n-3)} z_{(n-3)} + \ldots\ldots\ldots + A z_0\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_{(x)} = \frac{-1}{A^{(n)}}\{A^{(n-1)} z_{(x-1)} + A^{(n-2)} z_{(x-2)} + A^{(n-3)} z_{(x-3)} + \ldots\ldots\ldots + A z_{(x-n)}\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_{(x+n)} = \frac{-1}{A^{(n)}}\{A^{n-1} z_{(x+n-1)} + A^{(n-2)} z_{(x+n-2)} + A^{(n-3)} z_{(x+n-3)} + \ldots + A''' z_{(x+3)} + A'' z_{(x+2)} + A' z_{(x+1)} + A z_{(x)}\}$$

La

La dernière équation donne.

$A z_{(x)} + A' z_{(x+1)} + A'' z_{(x+2)} + \ldots . A^{(n)} z_{(x+n)} = 0 \ldots . (1)$,

qui est précisément l'équation differentielle (1), dont j'ai donné l'intégrale complète dans le numéro précédent. Les n, premières équations, renferment des termes qui semblent éhapper à la loi générale ; mais on verra bientôt à quoi ils servent.

L'équation de relation (4) *(n.° cité)*, et l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le dénominateur de la fraction génératrice, sont, respectivement,

$$A + A'\alpha + A''\alpha^2 + A'''\alpha^3 + \ldots + A^{(n)}\alpha^n = 0$$

$$A u^n + A' u^{n-1} + A'' u^{n-2} + A''' u^{n-3} + \ldots + A^n = 0;$$

et l'on voit, sur-le-champ, par l'identité des coèfficiens et l'ordre inverse des exposans des inconnues, que $\rho_{\prime}$, $\rho_{\prime\prime}$, $\rho_{\prime\prime\prime}$, &c. étant les racines de la première équation, les racines de la seconde seront $\frac{1}{\rho_{\prime}}$, $\frac{1}{\rho_{\prime\prime}}$, $\frac{1}{\rho_{\prime\prime\prime}}$, &c. c'est-à-dire qu'on a

$$(\alpha - \rho_{\prime})(\alpha - \rho_{\prime\prime}) \ldots\ldots (\alpha - \rho_{(n)}) = \frac{A}{A^{(n)}} + \frac{A'}{A^{(n)}}\alpha + \frac{A''}{A^{(n)}}\alpha^2 + \frac{A'''}{A^{(n)}}\alpha^3 + \ldots . + \alpha^n$$

$$\left(\frac{1}{\rho_{\prime}} - u\right)\left(\frac{1}{\rho_{\prime\prime}} - u\right) \ldots\ldots\ldots \left(\frac{1}{\rho_{(n)}} - u\right) = u^n + \frac{A'}{A}u^{n-1} + \frac{A''}{A}u^2 + \frac{A'''}{A}u^3 + \ldots . + \frac{A^{(n)}}{A}.$$

Je puis maintenant déduire de la fraction génératrice l'intégrale (5) de l'équation (1) *(n.° XXII)*, qui, ainsi que je l'ai fait remarquer, n'est autre chose que le terme général de la série z_0, $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$; &c. pour cela, substituant au dénominateur de cette fraction les produits $\left(\frac{1}{\rho_{\prime}} - u\right)\left(\frac{1}{\rho_{\prime\prime}} - u\right)$, &c. et opérant sa décomposition en fractions partielles par la méthode que j'ai donnée *n.° XVII*, ou par celle que j'exposerai dans le *n.° suivant*, on aura

$$\frac{a + a' u + a'' u^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a^{(n-1)} u^{n-1}}{A\left(\frac{1}{\rho_{\prime}} - u\right)\left(\frac{1}{\rho_{\prime\prime}} - u\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{1}{\rho_{(n)}} - u\right)} =$$

$$\frac{M'}{\frac{1}{\rho_{\prime}} - u} + \frac{M''}{\frac{1}{\rho_{\prime\prime}} - u} + \frac{M'''}{\frac{1}{\rho_{\prime\prime\prime}} - u} + \ldots + \frac{M^{(n)}}{\frac{1}{\rho_{(n)}} - u}.$$

Chacune des fractions partielles du second membre étant réduite en série par la méthode précédente, on aura

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{M'}{\dfrac{1}{\rho_{\prime}}-u}=\rho_{\prime}\,M'\,\{1+\rho_{\prime}\,u+\rho_{\prime}^{2}\,u^{2}+\rho_{\prime}^{3}\,u^{3}+\ldots+\rho_{\prime}^{x}\,u^{x}+\&c.\}\\
\dfrac{M''}{\dfrac{1}{\rho_{\prime\prime}}-u}=\rho_{\prime\prime}\,M''\,\{1+\rho_{\prime\prime}\,u+\rho_{\prime\prime}^{2}\,u^{2}+\rho_{\prime\prime}^{3}\,u^{3}+\ldots+\rho_{\prime\prime}^{x}\,u^{x}+\&c.\}\\
\dfrac{M'''}{\dfrac{1}{\rho_{\prime\prime\prime}}-u}=\rho_{\prime\prime\prime}\,M'''\,\{1+\rho_{\prime\prime\prime}\,u+\rho_{\prime\prime\prime}^{2}\,u^{2}+\rho_{\prime\prime\prime}^{3}\,u^{3}+\ldots+\rho_{\prime\prime\prime}^{x}\,u^{x}+\&c.\}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{M_{(n)}}{\dfrac{1}{\rho_{(n)}}-u}=\rho_{(n)}\,M^{(n)}\,\{1+\rho_{(n)}\,u+\rho_{(n)}^{2}\,u^{2}+\rho_{(n)}^{3}\,u^{3}+\ldots+\rho_{(n)}^{x}\,u^{x}+\&c.\}
\end{array}\right\}=z_{0}+z_{\prime}\,u+z_{\prime\prime}\,u^{2}+\ldots+z_{(x)}\,u^{x}+\&c.$$

La somme des séries partielles égale à la fraction génératrice, doit l'être par conséquent à la série $z_0 + z_{\prime}\,u + z_{\prime\prime}\,u^2 +$ &c. qui en est le développement, et c'est ce que j'ai désigné par le signe d'égalité mis après l'accolade générale qui embrasse les séries partielles. Égalant les coëfficiens des mêmes puissances de u, placés de part et d'autre, et faisant

$$\rho_{\prime}\,M' = \mu_{\prime};\ \rho_{\prime\prime}\,M'' = \mu_{\prime\prime};\ \rho_{\prime\prime\prime}\,M''' = \mu_{\prime\prime\prime};\ \&c.\ \rho_{x}\,M^{(n)} = \mu_{(n)}$$

on aura

$$\begin{array}{l}
z_{0} = \mu_{\prime} + \mu_{\prime\prime} + \mu_{\prime\prime\prime} + \ldots + \mu_{(n)}\\
z_{\prime} = \mu_{\prime}\,\rho_{\prime} + \mu_{\prime\prime}\,\rho_{\prime\prime} + \mu_{\prime\prime\prime}\,\rho_{\prime\prime\prime} + \ldots + \mu_{(n)}\,\rho_{(n)}\\
z_{\prime\prime} = \mu_{\prime}\,\rho_{\prime}^{2} + \mu_{\prime\prime}\,\rho_{\prime\prime}^{2} + \mu_{\prime\prime\prime}\,\rho_{\prime\prime\prime}^{2} + \ldots + \mu_{(n)}\,\rho^{2}_{(n)}\\
z_{\prime\prime\prime} = \mu_{\prime}\,\rho_{\prime}^{3} + \mu_{\prime\prime}\,\rho_{\prime\prime}^{3} + \mu_{\prime\prime\prime}\,\rho_{\prime\prime\prime}^{3} + \ldots + \mu_{(n)}\,\rho^{3}_{(n)}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_{(x)} = \mu_{\prime}\,\rho_{\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime}\,\rho_{\prime\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime\prime}\,\rho_{\prime\prime\prime}^{x} + \ldots + \mu_{(n)}\,\rho^{x}_{(n)}\\
\&c. \qquad\qquad\qquad\qquad \&c.
\end{array}$$

et la valeur de $z_{(x)}$ qu'on vient de trouver, est précisément l'intégrale (5) de l'équation (1) du *n.° XXII.*

Voici maintenant l'usage qu'on doit faire des n premiers résultats z_0, $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$ ..... $z_{(n+1)}$ déduits de la fraction génératrice, et dont les valeurs

contiennent les coëfficiens a, a′, a″, &c. du numérateur de cette fraction ; j'ai fait voir que pour construire ou pour trouver en nombres absolus les termes de la série, dont $z_{(x)}$ est le terme général, l'ordre de la récurrente étant n, il fallait avoir d'avance n valeurs de $z_{(x)}$ au moyen desquelles on pouvait ou continuer la suite en avant et en arrière par le moyen de l'équation différentielle, ou appliquer l'intégrale à une question particulière ; or si on se propose de passer de l'équation différentielle ou intégrale à la fraction génératrice, les n constantes combinées avec les valeurs des n premiers coëfficiens du deuxième membre de l'équation *(Q)*, serviront à déterminer la fonction de x, qui est le numérateur du premier membre, et à discerner par conséquent, quelle est de toutes les fractions dont le dénominateur est un polynome donné, celle qui convient au cas dont il s'agit ; ce qu'on ne pourrait faire avec la valeur de $z_{(n)}$ et les suivantes $z_{(n+1)}$, $z_{(n+2)}$ &c. qui ne renferment que les coëfficiens A, A', A'', &c. du dénominateur. De même lorsqu'on passe de la fraction génératrice au terme général de la série récurrente qui en est le développement, les coëfficiens du numérateur de cette fraction, se trouvent compris dans les constantes $\mu_{,}$, $\mu_{,,}$, $\mu_{,,,}$, &c. puisqu'on a $\mu_{,} = \rho_{,} M'$; $\mu_{,,} = \rho_{,,} M''$; &c. et que M', M'', &c. renferment a, a′, a″, &c. et influent ainsi sur les termes invariables de la récurrente, dont l'ordre est néanmoins toujours déterminé par la dimension du dénominateur.

Lors donc qu'on voudra trouver la fraction génératrice d'une équation différentielle linéaire,

$$A\, z_{(x)} + A'\, z_{(x+1)} + A''\, z_{(x+2)} + \cdots\cdots + A^{(n)}\, z_{(x+n)} = 0,$$

on écrira d'abord l'expression

$$\frac{\varphi\,(x)}{A^{(n)} + A^{(n-1)}\,u + A^{(n-2)}\,u^2 + \cdots\cdots + A''\,u^{n-2} + A_{,}\,u^{n-1} + A\,u^n};$$

nommant ensuite z_0, $z_{,}$, $z_{,,}$, &c. $z_{(n+1)}$, les n valeurs de $z_{(x)}$ qui doivent toujours être données par l'état de la question, on aura

$$\varphi\,(x) = \mathrm{a} + \mathrm{a}'\,u + \mathrm{a}''\,u^2 + \cdots\cdots\cdots + \mathrm{a}^{(n-1)}\,u^{n-1};$$

et on déterminera les coëfficiens a, a′, a″, &c. au moyen des équations

$$\mathrm{a} = A^{(n)}\, z_0$$
$$\mathrm{a}' = A^{(n)}\, [\,z_{,} + A^{(n-1)}\, z_0\,]$$

$$a'' = A^{(n)} [z_{''} + A^{(n-1)} z_{'} + A^{(n-2)} z_0]$$
$$a''' = A^{(n)} [z_{'''} + A^{(n-1)} z_{''} + A^{(n-2)} z_{'} + A^{(n-3)} z_0]$$

. . . .

. . . .

$$a^{(n-1)} = A^{(n)} [z_{(n-1)} + A^{(n-1)} z_{(n-2)} + A^{(n-2)} z_{(n-3)} + \ldots A''' z_{'''} + A'' z_{''} + A' z_{'} + A z_0],$$

et la fraction génératrice sera

$$\frac{A^n [z_0 + (z_{'} + A^{(n-1)} z_0) u + (z_{''} + A^{(n-1)} z_{'} + A^{(n-2)} z_0) u^2 + \&c.]}{A^{(n)} + A^{(n-1)} u + A^{(n-2)} u^2 \ldots\ldots + A^n u^{n-2} + A' u^{n-1} + A u^n}.$$

Pour trouver la fraction génératrice au moyen de l'équation intégrale

$$z_{(x)} = \mu_{'} \rho_{'}^{x} + \mu_{''} \rho_{''}^{x} + \mu_{'''} \rho_{'''}^{x} + \ldots\ldots + \mu_{(n)} \rho_{(n)}^{x},$$

on posera l'équation

$$A\left(\frac{1}{\rho_{'}} - u\right)\left(\frac{1}{\rho_{''}} - u\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{\rho^{\prime}} - u\right) = A^{(n)} + A^{(n-1)} u + A^{(n-2)} u^2 + \ldots + A' u^{n-1} + A u^n.$$

Développant les produits indiqués et égalant les coëfficiens, qui, dans les 1.er et 2.e membres, multiplient les mêmes puissances de u, on aura $n+1$, équations qui donneront les $n+1$ coëfficiens $A, A', A'' \ldots\ldots A^{(n)}$ de $u^n, u^{n-1} \ldots u^1, u^0$ dans le dénominateur de la fraction génératrice; on trouvera ensuite, de la même manière que ci-dessus, les coëfficiens des puissances de u dans le numérateur.

Développement des Fractions dont le dénominateur est une puissance d'un binome.

Ce que je viens de dire sur le développement des fractions, en général, suffit pour le rapprochement des deux méthodes que je me suis proposé de faire; mais les fractions dont le dénominateur est une puissance d'un binome, présentent, dans leur développement, des particularités qui m'engagent à en entretenir les élèves.

Soit la fraction . . . . $\dfrac{a + a' u}{\left(\frac{1}{\rho} - u\right)^2}$.

On pourra developper cette fraction par la méthode générale, ou si on veut la mettre sous la forme

$$(a + a' z)\left(\frac{1}{\rho_{,}} - u\right)^{-2} = \left\{ \begin{array}{l} a\,\rho_{,}^{2}\,\{1 + 2\,\rho_{,}\,u + 3\,\rho_{,}^{2}\,u^{2} + 4\,\rho_{,}^{3}\,u^{3} + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad + (x+1)\,\rho_{,}^{x}\,u^{x} + \&c.\} \\ + a'\,\rho_{,}\,\{0 + \rho_{,}\,u + 2\,\rho_{,}^{2}\,u^{2} + 3\,\rho_{,}^{3}\,u^{3} + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad + x\,\rho_{,}^{x}\,u^{x} + \&c.\} \end{array} \right.$$

On voit que le terme général de la somme des deux séries, c'est-à-dire, $\{a\,\rho_{,}^{2}\,(x+1) + a'\,\rho_{,}\,x\}\,\rho_{,}^{x}\,u^{x}$ est de la forme $(A + A'\,x)\,\rho_{,}^{x}\,u^{x}$; d'où il suit que si on avait $\rho_{,} = 1$, le coèfficient de u^{x} serait une fonction rationnelle de x, dont la seconde différence serait nulle.

Soit la fraction . . . . $\dfrac{a + a'\,u + a''\,u^{2}}{\left(\frac{1}{\rho_{,}} - u\right)^{3}}$

on aura

$$(a + a'\,u + a''\,u^{2})\left(\frac{1}{\rho_{,}} - u\right)^{-3} = \left\{ \begin{array}{l} a\,\rho_{,}^{3}\,\{1 + \frac{2\cdot3}{1\cdot2}\,\rho_{,}\,u + \frac{3\cdot4}{1\cdot2}\,\rho_{,}^{2}\,u^{2} + \frac{4\cdot5}{1\cdot2}\,\rho_{,}^{3}\,u^{3} + \ldots\ldots \\ \qquad + \frac{(x+1)(x+2)}{1\cdot2}\,\rho_{,}^{x}\,u^{x} + \&c.\} \\ + a'\,\rho_{,}^{2}\,\{0 + \frac{1\cdot2}{1\cdot2}\,\rho_{,}^{2}\,u + \frac{2\cdot3}{1\cdot2}\,\rho_{,}^{2}\,u^{2} + \frac{3\cdot4}{1\cdot2}\,\rho_{,,}^{3}\,u^{3} + \ldots\ldots \\ \qquad + \frac{x\,(x+1)}{1\cdot2}\,\rho_{,}^{x}\,u^{x} + \&c.\} \\ + a''\,\rho_{,}\,\{0 + 0 + \frac{1\cdot2}{1\cdot2}\,\rho_{,,}^{2}\,u^{2} + \frac{2\cdot3}{2}\,\rho_{,}^{3}\,u^{3} + \ldots\ldots \\ \qquad + \frac{(x+1)\,x}{1\cdot2}\,\rho_{,}^{x}\,u^{x} + \&c.\} \end{array} \right.$$

Le terme général $\left\{a\,\rho_{,}^{3}\,\frac{(x+1)\,(x+2)}{1\cdot2} + a'\,\rho_{,}^{2}\,\frac{x\,(x+1)}{1\cdot2} + a''\,\rho_{,}\,\frac{(x-1)\,x}{1\cdot2}\right\}\rho_{,}^{x}\,u^{x}$ est de la forme $(A + A'\,x + A''\,x^{2})\,\rho_{,}^{x}\,u^{x}$;

et si l'on avait $\rho_{,} = 1$, le coèfficient de u^{x} serait une fonction rationnelle de u^{x}, dont la troisième différence serait nulle.

Soit encore . . . . $\dfrac{a + a'\,u + a''\,u^{2} + a'''\,u^{3}}{\left(\frac{1}{\rho_{,}} - u\right)^{4}}$

on trouvera, en suivant toujours le même procédé,

$$
\begin{array}{l}
(a + a'u + a''u^2 + a'''u^3) \\
\left(\frac{1}{\rho_1} - u\right)^4 = \ldots
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
a\,\rho_1^4 \left\{ 1 + \frac{2.3.4}{1.2.3}\rho_1 u + \frac{3.4.5}{1.2.3}\rho_1 u^2 + \frac{4.5.6}{1.2.3}\rho_1^3 u^3 + \frac{5.6.7}{1.2.3}\rho_1^4 u^4 + \ldots \right. \\
\qquad \left. + \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}\rho_1^x u^x + \&c. \right\} \\
+ a'\rho_1^3 \left\{ 0 + \frac{1.2.3}{1.2.3}\rho_1 u + \frac{2.3.4}{1.2.3}\rho_1^2 u^2 + \frac{3.4.5}{1.2.3}\rho_1^3 u^3 + \frac{4.5.6}{1.2.3}\rho_1^4 u^4 + \ldots \right. \\
\qquad \left. + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\rho_1^x u + \&c. \right\} \\
+ a''\rho_1^2 \left\{ 0 + 0 \quad + \frac{1.2.3}{1.2.3}\rho_1^2 u^2 + \frac{2.3.4}{1.2.3}\rho_1^3 u^3 + \frac{3.4.5}{1.2.3}\rho_1^4 u^4 + \ldots \right. \\
\qquad \left. + \frac{(x-1)(x)(x-1)}{1.2.3}\rho_1^x u^x + \&c. \right\} \\
+ a'''\rho_1 \left\{ 0 + 0 + \quad 0 \quad + \frac{1.2.3}{1.2.3}\rho_1^2 u^3 + \frac{2.3.4}{1.2.3}\rho_1^4 u^4 + \ldots \right. \\
\qquad \left. + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3}\rho_1^x u^x + \&c. \right\}
\end{array}
\right.
$$

Le terme général ou la somme de tous ceux du quantième x est de la forme

$$(A + A'x + A''x^2 + A'''x^3)\,\rho_1^x u^x$$

et la fonction de x qui multiplie $\rho_1^x u^x$ a ses quatrièmes différences nulles.

Il est aisé de voir que si on a, en général, une fraction

$$\frac{a + a'u + a''u^2 + a'''u^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots a^{(k-1)}u^{k-1}}{\left(\frac{1}{\rho_1}\right) - u)\,k}$$

son développement donnera un nombre k de séries dans lesquelles la somme de tous les termes qui multiplieront $\rho_1^x u^x$ sera

$$
\begin{array}{l}
a\,\rho_1^k \frac{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots\ldots\ldots[x+(k-1)]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(k-1)} \\
+ a'\rho_1^{k-1} \frac{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[x+(k-2)]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(k-1)}. \\
+ a''\rho_1^{k-2} \frac{(x-1)(x)(x+1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[x+(k-3)]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(k-1)},
\end{array}
$$

$$+ a''' \rho_{\prime}^{k-3} \frac{(x-2)(x-1)(x)(x+1)\ldots\ldots\ldots[x+(k-4)]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(k-1).}$$

$$+ a^{(k-1)} \rho_{\prime} \frac{[x-(k-2)][x-(k-3)][x-(k-4)]\ldots(x-2)(x-1)(x)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(k-1).}$$

Le terme général sera donc de la forme

$$(A + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + \ldots\ldots A^{(k-1)}x^{k-1})\rho^x u^x.$$

La fonction de x qui multiplie $\rho_{\prime}^x u^x$ étant rationnelle, sans diviseur variable et de la dimension $k - 1$, sa différence de l'ordre k doit être nulle.

Si on supprime u^x de ce terme général, on aura précisement la même fonction qui donne la partie de l'intégrale d'une équation aux différences linéaires provenant d'un nombre k de racines égales de l'équation de relation; et c'est en effet, d'après la théorie générale exposée précédemment, le cas que représente la fraction génératrice $\frac{X}{(\frac{1}{\rho'} - u)^k}$; on a donc une troisième solution de ce cas à ajouter aux deux que j'ai données précédemment.

Le terme général est entièrement rationnel, lorsque $\rho_{\prime} = 1$, et alors on tombe dans le cas de l'intégration des fonctions rationnelles, sans diviseurs variables, exposées *n.°* XXI.

Les coëfficiens $a' \rho_{\prime}^k$, $a \rho^{k-1}$, &c. représentent les k constantes arbitraires qui doivent répondre aux k racines données par le facteur $(\rho_{\prime} - u)^k$ représentant, dans l'équation de relation, le facteur $(\frac{1}{\rho_{\prime}} - u)^k$ du dénominateur de la fraction génératrice.

Propriétés générales des Suites récurrentes.

La théorie exposée dans le numéro précédent, prouve généralement que si un nombre $n + 1$ de termes consécutifs d'une série ont entre eux une relation exprimée par l'équation

$$A\, z_{(x)}\, A'\, z_{(x+1)} + A''\, z_{(x+2)} + \ldots\ldots\ldots + A^{(n)}\, z_{(x+n)} = 0,$$

le terme général de cette série sera l'agrégation d'un nombre n de quantités exponentielles $\mu_{\prime} \rho_{\prime}^x$; $\mu_{\prime\prime} \rho^x$; &c. On pourrait se demander si l'inverse de

cette proposition est vraie sans restriction, c'est-à-dire, si une équation entre une variable z et plusieurs termes exponentiels $\mu_{\prime}\,\rho_{\prime}^{x}$; $\mu_{\prime\prime}\,\rho_{\prime\prime}^{x}$; &c. exprime toujours une suite récurrente d'un ordre égal au nombre de ces termes; ceux à qui il resterait quelque doute à cet égard, les leveront aisément par la considération des *fractions génératrices;* mais la propriété dont il s'agit peut être déduite comme conséquence de la démonstration d'une autre propriété importante : je vais en donner le développement.

Étant donnée une suite récurrente qui aurait pour terme général

$$\mu_{\prime}\,\rho_{\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime}\,\rho_{\prime\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime\prime}\,\rho_{\prime\prime\prime}^{x}\;x + \&c.$$

et connaissant par conséquent autant que l'on veut de ses termes $z_0, z_{\prime}, z_{\prime\prime}$, &c. proposons-nous de trouver quelle espèce de suite forment ces mêmes termes, pris, de deux en deux, de trois en trois, et en général de x' en x', ou à des intervalles égaux quelconques, tels que seraient les termes

$$z_0,\; z_{(x')},\; z_{(2x')},\; z_{(3x')},\; \&c.$$

Pour y parvenir, je pose les équations suivantes, qui ne sont que l'équation générale $z^{(x)} = \mu_{\prime}\rho_{\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime}^{x} + \&c.$ dans laquelle on fait différentes hypothèses pour x

$$\begin{array}{llllll}
z_0 & = \mu_{\prime} & + \mu_{\prime\prime} & + \mu_{\prime\prime\prime} & + \&c. \\
z_{(x')} & = \mu_{\prime}\rho_{\prime}^{x'} & + \mu_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime}^{x'} & + \mu_{\prime\prime\prime}\rho_{\prime\prime\prime}^{x'} & + \&c. \\
z_{(2x')} & = \mu_{\prime}\rho_{\prime}^{2x'} & + \mu_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime}^{2x'} & + \mu_{\prime\prime\prime}\rho_{\prime\prime\prime}^{2x'} & + \&c. \\
z_{(3x')} & = \mu_{\prime}\rho_{\prime}^{3x'} & + \mu_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime}^{3x'} & + \mu_{\prime\prime\prime}\rho_{\prime\prime\prime}^{3x'} & + \&c. \\
\&c. & & \&c. & &
\end{array}$$

Ensuite si l'équation générale a deux termes, c'est-à-dire, si on a $z_x = \mu_{\prime}\rho_{\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime}^{x}$, je prends quatre des équations particulières, j'en élimine $\mu_{\prime\prime}$ et je parviens aux trois équations

$$\begin{array}{l}
z_0^{x}\,\rho_{\prime\prime}^{x'} - z_{(x')} = \mu_{\prime}(\rho_{\prime\prime}^{x'} - \rho_{\prime}^{x'}) \\
z_{(x')}\,\rho_{\prime\prime}^{x'} - z_{(2x')} = \mu_{\prime}(\rho_{\prime\prime}^{x'}\rho_{\prime}^{x'} - \rho_{\prime}^{2x'}) \\
z_{(2x')}\,\rho_{\prime\prime}^{x'} - z_{(3x')} = \mu_{\prime}(\rho_{\prime\prime}^{x}\rho_{\prime}^{2x'} - \rho_{\prime}^{3x'})
\end{array}$$

J'observe que les seconds membres forment une progression géométrique, dont

dont $\rho_{x'}$ est la raison ; ce qui établit entre les premiers membres les relations suivantes

$$(z_0\, \rho_{,,}^{x'} - z_{(x')})\, \rho_{,}^{x'} = z_{(x')}\, \rho_{,}^{x'} - z_{(2x')}$$
$$(z_{x'}\, \rho_{,,}^{x'} - z_{2x'})\, \rho_{,}^{x'} = z_{(2x')}\, \rho_{,,}^{x'} - z_{(3x')}.$$

d'où on déduit

$$z_{(2x')} = (\rho_{,,}^{x'} + \rho_{,}^{x'})\, z_{(x')} - \rho_{,}^{x'}\, z_{,,}^{x'}\, z_0.$$
$$z_{(3x')} = (\rho_{,,}^{x'} + \rho_{,}^{x'})\, z_{2x')} - \rho_{,}^{x'}\, z_{,,}^{x'}\, z_{x'}.$$

Ainsi les termes z_0, $z_{(x')}$, $z_{(2x')}$, &c. forment une suite récurrente du second ordre, dont l'échelle de relation est $+ (\rho_{,,}^{x} + \rho_{,}^{'})$ et $- \rho_{,}^{x'}\, \rho_{,}^{x'}$.

Si l'équation générale est du troisième ordre, c'est-à-dire, si on a $z_{(x)} = \mu_{,}\, \rho_{,}^{x} + \mu_{,,}\, \rho_{,,}^{x} + \mu_{,,,}\, \rho_{,,,}^{x}$, on prendra six des équations particulières, qui donnent z_0, $z_{(x')}$, $z_{(2x')}$, &c. on en éliminera $\mu_{,}$ et $\mu_{,,}$, et on parviendra aux équations

$$\rho_{,}^{x'}\, \rho_{,,}^{x'}\, z_0 - (\rho_{,}^{x'} + \rho_{,,}^{x'})\, z_{(x')} + z_{(2x')} = \mu_{,,,} \; \{\rho_{,}^{x'}\rho_{,}^{x'} - \rho_{,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'} - \rho_{,,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'} - \rho_{,,,}^{2x'}\}$$
$$\rho_{,}^{x'}\, \rho_{,,}^{x'}\, z_{(x')} - (\rho_{,}^{x'} + \rho_{,,}^{x'})\, z_{(2x')} + z_{(3x')} = \mu_{,,,}\, \rho_{,,,}^{x'} \; \{\rho_{,}^{x'}\rho_{,,}^{x'} - \rho_{,,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'} - \rho_{,,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'} - \rho_{,,,}^{2x'}\}$$
$$\rho_{,}^{x'}\, \rho_{,,}^{x'}\, z_{(2x')} - (\rho_{,}^{x'} + \rho_{,,}^{x'})\, z_{(3x')} + z_{(4x')} = \mu_{,,,}\, \rho_{,,,}^{2x'} \; \{\rho_{,}^{x'}\rho_{,,}^{x'} - \rho_{,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'} - \rho_{,,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'} - \rho_{,,,}^{2x'}\}$$
$$\rho_{,}^{x'}\, \rho_{,,}^{x'}\, z_{(3x')} - (\rho_{,}^{x'} + \rho_{,,}^{x'})\, z_{(4x')} + z_{(5x')} = \mu_{,,,}\, \rho_{,,,}^{3x'} \; \{\rho_{,}^{x'}\rho_{,,}^{x'} - \rho_{,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'} - \rho_{,,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'} - \rho_{,,,}^{2x'}\}$$

Les seconds membres sont en progression géométrique, dont $\rho_{,,,}^{x'}$ est la raison ; ainsi l'un quelconque des premiers membres est égal au produit du précédent par $\rho_{,,,}^{x'}$, et cette considération fournit les équations

$$z_{(3x')} = (\rho_{,} + \rho_{,,}^{x'} + \rho_{,,,}^{x})\, z_{(2x')} - (\rho_{,}^{x'}\rho_{,,}^{x'} + \rho_{,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'} + \rho_{,,}^{x}\rho_{,,,}^{x'})\, z_{(x')} + \rho_{,}^{x'}\rho_{,,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'}\, z_0$$
$$z_{(4x')} = (\rho_{,}^{'} + \rho_{,,,}^{x'} + \rho_{,,,}^{x'})\, z_{(3x')} - (\rho_{,}^{'}\rho_{,,}^{'} + \rho_{,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'} + \rho_{,,}^{'}\rho_{,,,}^{'})\, z_{(2x')} + \rho_{,}\,\rho_{,,}\,\rho_{,,,}\, z_0$$
$$z_{(5x')} = (\rho_{,}^{x'} + \rho_{,,}^{'} + \rho_{,,,})\, z_{(4x')} - (\rho_{,}\,\rho_{,,} + \rho_{,}^{'}\rho_{,,,} + \rho_{,,}\,\rho_{,,,}^{'})\, z_{(3x')} + \rho_{,}\,\rho_{,,}\,\rho_{,,,}\, z_0$$

ainsi les quantités z_0, $z_{(x')}$, $z_{(2x')}$, &c. forment une suite récurrente qui a pour échelle de relation

$$+ (\rho_{,}^{x'} + \rho_{,,}^{x'} + \rho_{,,,}^{x'})\,;\; - (\rho_{,,}^{x'}\,\rho_{,,} + \rho_{,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'} + \rho_{,,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'}) + \rho_{,}^{x'}\rho_{,,}^{x'}\rho_{,,,}^{x'}.$$

La marche du calcul et les résultats seront toujours parfaitement les mêmes, quel que soit l'ordre de l'équation ; d'où je conclus,

1.° Qu'une équation de l'ordre n

$$z_{(x)} = \mu_{,}\, \rho_{,}^{x} + \mu_{,,}\, \rho_{,,}^{x} + \mu_{,,,}\, \rho_{,,,}^{x} + \ldots\ldots + \mu_{(n)}\, \rho_{(n)}^{x}$$

exprime toujours une relation entre z_0, $z_{,}$, $z_{,,}$, &c. telle que ces quantités

forment une suite récurrente de l'ordre n, dont l'échelle de relation est composée de la somme $\rho_{,} + \rho_{,,} + \rho_{,,,} +$ &c. de la somme des produits 2 à 2 de ces quantités, de celle de leurs produits 3 à 3, &c.

2.° Que les termes de la série z_0, $z_{,}$, $z_{,,}$, &c. étant pris à des intervalles égaux quelconques z_0, $z_{(x')}$, $z_{(2x')}$, &c. forment encore une suite récurrente du même ordre, dont l'échelle de relation est composée des mêmes quantités que la précédente et de la même manière, à l'exception que chacune de ces quantités est élevée à la puissance x'.

On peut, à ces propriétés, ajouter les suivantes :

1.° Le produit de deux suites récurrentes, multipliées terme à terme, est une suite récurrente de l'ordre $m\,n$, si l'une est de l'ordre m et l'autre de l'ordre n.

2.° Dans la même hypothèse, la somme des deux suites récurrentes sera de l'ordre $m + n$.

3.° Toutes les suites récurrentes sont sommables.

DE LA DÉCOMPOSITION

Des Fonctions fractionnaires rationnelles en Fractions partielles.

N.° XXIV. J'ai déjà parlé aux élèves (*n.° XVII*) de la décomposition des fractions rationnelles, et je leur ai donné une règle générale pour l'effectuer ; mais alors j'avais plutôt pour objet de prouver, en peu de mots, la possibilité de l'opération, dans tous les cas, que de donner le procédé le plus simple. Je remplis la promesse que j'ai faite de revenir sur cette théorie, qui est de la plus grande utilité dans le calcul intégral, et qui devient même indispensable, dans ce moment, à ceux des élèves qui voudront appliquer à des questions particulières ce que je leur ai démontré sur l'intégration des équations linéaires.

La décomposition des fractions rationnelles suppose toujours 1.° que le numérateur est d'une plus petite dimension que le dénominateur, ce à

quoi toute fraction peut être ramenée par la division ; 2.° qu'on a, par les méthodes connues de l'analyse déterminée, trouvé les facteurs du dénominateur; ces facteurs peuvent être tous, ou en partie, inégaux ou égaux, réels ou imaginaires. Je commence par le cas des facteurs inégaux.

Cas où les Facteurs du dénominateur sont tous inégaux.

Soit une fraction rationnelle

$$\frac{a + a'z + a''z^2 + a'''z^3 + \&c.}{(z - \varrho_,)\ (z - \varrho_{,,})\ (z - \varrho_{,,,})\ \&c.}$$

$\varrho_,$, $\varrho_{,,}$, $\varrho_{,,,}$, &c. pouvant être réels ou imaginaires, et faisons, pour abréger,

$$a + a'z + a''z + \&c. = N$$
$$(z - \varrho_,)\ (z - \varrho_{,,})\ (z - \varrho_{,,,})\ \&c. = D;$$

il résulte de la règle donnée *n.° XV*, que $\frac{N}{D}$ peut toujours se décomposer en fractions simples de la forme

$$\frac{A'}{z - \varrho_,};\ \frac{A''}{z - \varrho_{,,}};\ \frac{A'''}{z - \varrho_{,,,}},\ \&c. \text{ ce qui donne } \frac{N}{D} = \frac{A'}{z - \varrho_,} + \frac{A''}{z - \varrho_{,,}} + \&c.$$

A', A'', A''', &c. étant des constantes dont la valeur se compose uniquement de a, a', a'', &c. $\varrho_,$, $\varrho_{,,}$, $\varrho_{,,,}$, &c., je me propose de trouver le moyen de déduire immédiatement de N et D l'un quelconque des numérateurs A', A'', A''', &c. sans faire dépendre sa valeur de celle des autres numérateurs. Soit A' celui dont je cherche la valeur, et je fais

$$S = \frac{D}{z - \varrho_,} = (z - \varrho_{,,})\ (z - \varrho_{,,,}),\ (z - \varrho_{IV}),\ \&c.$$
$$\text{d'où } D = S\,(z - \varrho_,);$$

$$\frac{P}{S} = \frac{N}{D} - \frac{A'}{z - \varrho_,} = \frac{A''}{z - \varrho_{,,}} + \frac{A'''}{z - \varrho_{,,,}} + \frac{A^{IV}}{z + \varrho_{IV}}$$
$$+ \&c. \text{ d'où } \frac{P}{S} = \frac{N(z - \varrho') - A'D}{D\,(z - \varrho_,)},$$

ce qui suppose pour P une valeur rationnelle; savoir,

$$P = A''\ (z - \varrho_{,,,})\ (z - \varrho_{IV}),\ \&c. + A'''\ (z - \varrho_{,,})\ (z - \varrho_{IV}),$$
$$\&c. + A^{IV}\ (z - \varrho_{,,})\ (z - \varrho_{,,,})\ (z - \varrho_{V}),\ \&c. + \&c.$$

Si dans l'équation identique $\frac{P}{S} = \frac{N(z - \varrho_{,}) - A'D}{D(z - \varrho_{,})}$ on substitue pour D sa valeur $S(z - \varrho_{,})$, il viendra l'équation toujours identique

$$\frac{P}{S} = \frac{N - A'S}{S(z - \varrho_{,})} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ou } P = \frac{N - A'S}{z - \varrho_{,}}.$$

Maintenant, P étant une fonction rationnelle, $\frac{N - A'S}{z - \varrho_{,}}$ en sera aussi une, ou plutôt n'est que la même fonction, avec une notation différente; cela ne peut être sans que $N - A'S$ ne soit divisible exactement par $z - \varrho_{,}$; $z - \varrho_{,}$ est donc un facteur de $N - A'S$, d'où il suit qu'en faisant $z - \varrho_{,} = 0$, ou, ce qui est la même chose, $z = \varrho_{,}$, on suppose que $N = A'S = 0$, c'est-à-dire, que si dans la fonction $N - A'S$ on écrit que $z = \varrho_{,}$, ou qu'on substitue $\varrho_{,}$ à la place de z, cette fonction s'évanouira.

Me voilà parvenu à une règle très-simple pour déduire la valeur de A' de l'expression $N - A'S$; il faut dans N et S substituer ϱ' à la place de z, on aura, par ce qui vient d'être dit, $N - A'S = 0$, d'où on tirera $A' = \frac{N}{S}$, ou en mettant pour N et S leurs valeurs avec la substitution indiquée,

$$A' = \frac{a + a'\varrho_{,} + a'\varrho_{,}^{2} + a'''\varrho_{,}^{3} + \&c.}{(\varrho_{,} - \varrho_{,,})(\varrho_{,} - \varrho_{,,,})(\varrho_{,} - \varrho_{IV}\ \&c.)}$$

on aura de la même manière

$$A'' = \frac{a + a'\varrho_{,,} + a''\varrho_{,,}^{2} + a'''\varrho_{,,}^{3} + \&c.}{(\varrho_{,,} - \varrho_{,})(\varrho_{,,} - \varrho_{,,,})(\varrho_{,,} - \varrho^{IV}\ \&c.)}$$

$$A''' = \frac{a + a'\varrho_{,,,} + a''\varrho_{,,}^{2} + a'''\varrho_{,,,}^{3} + \&c.}{(\varrho_{,,,} - \varrho_{,})(\varrho_{,,,} - \varrho_{,,})(\varrho_{,,,} - \varrho_{IV}\ \&c.)}$$

&c. &c.

Méthode pour simplifier le calcul dans le cas des Facteurs imaginaires.

Les formules que je viens de donner sont toujours applicables dans le cas de l'inégalité des racines qui peuvent d'ailleurs être réelles ou imaginaires; s'il y en a d'imaginaires, quelques-uns des numérateurs A', A'', &c.

auront la forme $a + b\sqrt{(-1)}$; mais en ajoutant ensemble chaque couple de fractions partielles, qui dépendent d'un même facteur double, les imaginaires disparaîtront, et la somme aura, d'après les principes exposés *n.° XX*, la forme

$$\frac{B'_{,} + B''_{,} z}{zz - 2\rho z \operatorname{cos.} \varphi + \rho\rho},$$

les facteurs du dénominateur étant, numéro cité,

$$z - \rho \{ \operatorname{cos.} \varphi + \operatorname{sin.} \varphi \sqrt{(-1)} \}$$
$$z - \rho \{ \operatorname{cos.} \varphi - \operatorname{sin.} \varphi \sqrt{(-1)} \};$$

mais cette manière de traiter les facteurs imaginaires peut quelquefois donner de l'embarras, et il vaut mieux calculer immédiatement les coëfficiens $B'_{,}$, $B''_{,}$, $B'''_{,}$ par la méthode suivante.

Soit, comme précédemment S le produit de tous les facteurs du dénominateur, excepté le facteur $zz - 2\rho z \operatorname{cos.} \varphi + \rho\rho$ qu'on considère; c'est-à-dire, soit

$$S = \frac{D}{z^2 - 2\rho z \operatorname{cos.} \varphi + \rho^2}\text{; d'où } D = S(z^2 - 2\rho z \operatorname{cos.} \varphi + \rho^2);$$

et faisons

$$\frac{P}{S} = \frac{N}{D} - \frac{B'_{,} + B''_{,} z}{z^2 - 2\rho z \operatorname{cos.} \varphi + \rho^2} =$$
$$\frac{N(z^2 - 2\rho z \operatorname{cos.} \varphi + \rho^2) - D(B'_{,} + B''_{,} z)}{D(z^2 - 2\rho z \operatorname{cos.} \varphi + \rho\rho)},$$

P sera, comme ci-devant, une fonction rationnelle, car il sera le numérateur de la somme de toutes les fractions partielles, moins celles qui proviennent de deux facteurs imaginaires.

Substituant dans la valeur de $\frac{P}{S}$ pour D sa valeur $S(z^2 - 2\rho z \operatorname{cos.} \varphi + \rho^2)$ on aura

$$P = \frac{N - S(B'_{,} + B''_{,} z}{z^2 - 2\rho z \operatorname{cos.} \varphi + \rho^2}:$$

or P étant une fonction rationnelle, $N - S(B'_{,} + B''_{,} z)$ en sera aussi une, et aura par conséquent, pour facteur, le trinome $z^2 - 2\rho z$

cos. $\varphi + \rho^2$; et comme ce trinome s'évanouit en y faisant $z = \rho\{\cos.\varphi \pm \sin.\varphi\sqrt{(-1)}\}$, la quantité $N - S(B' + B'_, z)$ s'évanouira, dans la même hypothèse, ce qui donnera

$$N = S\{B' + B'_,\rho[\cos.\varphi \pm \sin.\varphi.\sqrt{(-1)}]\} \ldots (W),$$

bien entendu que la substitution de $\rho\{\cos.\varphi \pm \sin.\varphi\sqrt{(-1)}\}$ se fait aussi dans N et S. Pour voir ce qui résulte de cette substitution, supposons N et S ordonnées par rapport aux puissances de z, on aura

$$N = a + a' z + a'' z^2 + a''' z^3 + \&c.$$
$$S = a'_, + a'_, z + a''_, z^2 + a'''_, z^3 + \&c.$$

et le théorème du *n.° XX* donne pour les valeurs de diverses puissances de z

$$z = \rho\{\cos.\varphi \pm \sin.\varphi\sqrt{(-1)}\}$$
$$z^2 = \rho^2\{\cos.(2\varphi) \pm \sin.(2\varphi)\sqrt{(-1)}\}$$
$$z^3 = \rho^3\{\cos.(3\varphi) \pm \sin.(3\varphi)\sqrt{(-1)}\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z^n = \rho^n\{\cos.(n\varphi) + \sin.(n\varphi)\sqrt{(-1)}\}.$$

Substituant ces valeurs dans N et S, il viendra

$$N = a + a'\rho\left\{\begin{matrix}\cos.\varphi,\\ \pm\sin.\varphi\sqrt{(-1)}\end{matrix}\right. + a''\rho^2\left\{\begin{matrix}\cos(2\varphi)\\ \pm\sin.(2\varphi)\sqrt{(-1)}\end{matrix}\right.$$
$$+ a'''\rho^3\left\{\begin{matrix}\cos.(3\varphi)\\ \pm\sin.(3\varphi)\sqrt{(-1)}\end{matrix}\right. + \&c.$$

$$S = a' + a'\rho\left\{\begin{matrix}\cos.\varphi\\ \pm\sin.\varphi\sqrt{(-1)}\end{matrix}\right. + a'_,\rho^2\left\{\begin{matrix}\cos.(2\varphi)\\ \pm\sin.(2\varphi)\sqrt{(-1)}\end{matrix}\right.$$
$$+ a'''_,\varphi^3\left\{\begin{matrix}\cos.(3\varphi)\\ \pm\sin.(3\varphi)\sqrt{(-1)}\end{matrix}\right. + \&c.$$

Soit

$$\psi = a + a'\rho\cos.\varphi + a''\rho^2\cos.(2\varphi) + a'''\rho^3\cos.(3\varphi) + \&c.$$
$$\psi' = \pm[a'_,\rho\sin.\varphi + a''\rho^2\sin.(2\varphi) + a'''\rho^3\sin.(3\varphi) + \&c.]$$
$$\tau = a_, + a'\rho\cos.\varphi + a''\rho^2\cos.(2\varphi) + a'''_,\rho^3\cos.(3\varphi) + \&c.$$
$$\tau' = +[a'\rho\sin.\varphi + a'_,\rho^2\sin.(2\varphi) + a''_,\rho^3\sin.(3\varphi) + \&c.]$$

les valeurs de N et S se changeront en

$$N = \psi \pm \psi' \sqrt{(-1)}$$
$$S = \tau \pm \tau' \sqrt{(-1)}.$$

Ces valeurs substituées dans (W), donneront, eu égard au double signe, les deux équations suivantes

$$\psi + \psi' \sqrt{(-1)} = \tau + \tau' \sqrt{)} (-1) \left\{ B'_{,} + B''_{,} \varrho \, (\text{cos.}\, \varphi + \text{sin.}\, \varphi \sqrt{(-1)} \right\}$$
$$\psi = \psi' \sqrt{(-1)} = \tau - \tau' \sqrt{)} (-1) \left\{ B'_{,} + B''_{,} \varrho \, (\text{cos.}\, \varphi - \text{sin.}\, \varphi \sqrt{(-1)} \right\}.$$

Combinant successivement ces deux équations, par addition et soustraction, les imaginaires s'évanouissent et on a

$$\psi = \tau \, B' + \tau \, B''_{,} \varrho \, \text{cos.}\, \varphi - \tau' B'' \varrho \, \text{sin.}\, \varphi$$
$$\psi' = \tau' B' + \tau' \, B''_{,} \varrho \, \text{cos.}\, \varphi + \tau \, B''_{,} \varrho \, \text{sin.}\, \varphi.$$

Multipliant la première équation par τ', la seconde par τ, et faisant la soustraction des équations produits, on a

$$\tau \psi' - \tau' \psi = B''_{,} (\tau'^2 + \tau^2) \varrho \, \text{sin.}\, \varphi; \text{ d'où } B''_{,} = \frac{\tau \psi' - \tau' \psi}{(\tau'^2 + \tau^2) \varrho \, \text{sin.}\, \varphi}.$$

Faisant ensuite la multiplication inverse et additionnant les équations produits, il vient

$$\tau \psi + \tau' \psi' = (\tau^2 + \tau'^2) (B'_{,} + B''_{,} \varrho \, \text{cos.}\, \varphi),$$

qui, en substituant pour $B''_{,}$ sa valeur ci-dessus, donne

$$B'_{,} = \frac{(\tau \psi + \tau' \psi') \, \text{sin.}\, \varphi - (\tau \psi' - \tau' \psi) \, \text{cos.}\, \varphi}{(\tau'^2 + \tau^2) \, \text{sin.}\, \varphi} = \frac{\tau \psi + \tau' \psi' - (\tau \psi' - \tau' \psi) \, \text{cos.}\, \varphi}{\tau'^2 + \tau^2}.$$

Ainsi $B'_{,}$ et $B''_{,}$ sont exprimés en quantités toutes connues, et auront, comme les numérateurs des fractions partielles appartenant aux facteurs simples, l'avantage de pouvoir être calculés séparément.

Si le facteur double est de la forme $z^2 + \varrho \varrho$, alors il faudra faire $\text{cos.}\, \varphi = 0$, ou $\text{cos.}\, \varphi = 0$ dans les valeurs de $B''_{,}$ et $B'_{,}$, et par conséquent $\text{sin.}\, \varphi = 1$; ce qui donnera

$$B'_{,} = \frac{\tau \psi + \tau' \psi'}{\tau^2 + \tau^2}$$

$$B''_{,} = \frac{\tau \psi' - \tau' \psi}{(\tau^2 + \tau^2) \varrho}.$$

Fractions partielles provenant des Facteurs égaux.

Il me reste à traiter le cas où la fraction $\frac{N}{D}$ a des facteurs de la forme $(z - \rho)^k$; les fractions partielles qui dérivent de ces facteurs pourront être représentées par

$$\frac{Z}{(z-\rho)^k} = \frac{E'}{z-\rho} + \frac{E''}{(z-\rho)^2} + \frac{E'''}{(z-\rho)^3} + \dots - \frac{E^{(k)}}{(z-\rho)^k} \dots (G),$$

E', E'', E''', &c. étant des constantes. Pour le prouver, soit

$$\frac{N}{D} = \frac{Z}{(z-\rho)^k} + \frac{P}{S}$$

$\frac{P}{S}$ représentant la somme des fractions partielles dues aux facteurs inégaux ; N étant supposée de moindre dimension que D, P doit, d'après les formules précédemment démontrées, être de moindre dimension que S, d'où il suit que Z ne doit pas excéder la dimension $k - 1$; en effet, soit n la dimension de D, ce sera aussi celle de $(z - \rho)^k S$ la dimension de S sera en $n - k$, et comme

$$\frac{N}{D} = \frac{ZS + P(z-\rho)^k}{S(z-\rho)^k},$$

si Z était seulement de la dimension k, Z S serait de la dimension n plus grande d'une unité, au moins, que celle de N, ce qui ne peut être. Il ne faut attendre du terme $P(z - \rho)^k$ aucune destruction des puissances n de z; car P étant, au plus, de la dimension $n + k - 1$, $P(z - \rho)^k$, sera, au plus, de la dimension $n - 1$.

Maintenant la théorie des coëfficiens indéterminés me permet de supposer

$$Z = E'(z-\rho)^{k-1} + E''(z-\rho)^{k-2} + E'''(z-\rho)^{k-3} + \dots + E^{(k)} \dots (H);$$

car X renfermant les puissances de z depuis z^0 jusqu'à z^{k-1}, j'ai tout ce qu'il faut pour déterminer E', E'', E''', &c. par la comparaison des deux

membres

membres de l'équation H, qui, étant divisée par $(z - \rho)^k$, donnera l'équation G.

Pour faciliter l'intelligence du cas général, je vais d'abord présenter des exemples particuliers.

Soit $k = 2$, on aura

$$\frac{Z}{(z-\rho)^2} = \frac{E'}{z-\rho} + \frac{E''}{(z-\rho)^2};$$

je fais, par un procédé analogue aux précédens,

$$S = \frac{D}{(z-\rho)^2}; \text{ d'où } D = S(z-\rho)^2$$

$$\text{et faisant } \frac{P}{S} = \frac{N}{D} - \frac{Z}{(z-\rho)^k} = \frac{N}{D} - \frac{E'}{z-\rho} - \frac{E''}{(z-\rho)^2}$$

et y substituant la valeur $S(z - \rho)^2$ de D, on aura

$$P = \frac{N - SE'' - SE'(z-\rho)}{(z-\rho)^2}$$

P étant une fraction rationnelle, $N - SE'' - SE'(z - \rho)$ sera divisible par $(z - \rho)^2$ et par conséquent par $z - \rho$; si on le considère d'abord comme divisible par $z - \rho$, $N - SE''$ devra, isolément, avoir $z - \rho$ pour facteur, ce même facteur existant explicitement dans le troisième terme $SE'(z - \rho)$; donc si on fait $z - \rho = 0$, on doit avoir

$$N - SE'' = 0, \text{ ce qui donne } E'' = \frac{N}{S} \text{ en faisant, dans } N \text{ et } S, z = \rho.$$

Considérons ensuite $N - SE'' - SE'(z - \rho)$ comme divisible par $(z - \rho)^2$, il en résultera que $\frac{N - SE''}{z - \rho} - SE'$ sera divisible par $z - \rho$; effectuant la division indiquée dans le premier terme de cette expression, division qui doit se faire exactement, et supposant

$$\frac{N - SE''}{z - \rho} = T,$$

on aura, dans le cas de $z = \rho$,

$$T - SE' = 0, \text{ d'où } E' = \frac{T}{S} \left\{ \text{en faisant, dans } T \text{ et } S, z = \rho. \right.$$

Soit $k = 3$, on aura

$$\frac{Z}{(z-\varrho)^3} = \frac{E'}{z-\varrho} + \frac{E''}{(z-\varrho)^2} + \frac{E'''}{(z-\varrho)^3}$$

$$S = \frac{D}{(z-\varrho)^3}, \text{ d'où } D = S(z-\varrho)^3$$

$$\frac{P}{S} = -\frac{N}{D} - \frac{Z}{(z-\varrho)^3} = \frac{N}{D} - \frac{E'}{z-\varrho} - \frac{E''}{(z-\varrho)^2} - \frac{E'''}{(z-\varrho)^3},$$

et substituant pour D sa valeur $(z-\varrho)^3 S$

$$P = \frac{N - E'S(z-\varrho)^2 - E''S(z-\varrho) - E'''S}{(z-\varrho)^3}.$$

P étant rationnel, le numérateur de la valeur de P doit être divisible par $(z-\varrho)^3$, $(z-\varrho)^2$ et $z-\varrho$; si on le suppose d'abord divisible par $z-\varrho$, $\frac{N-E'''S}{z-\varrho}$ devra donner un quotient exact, et par conséquent $N - E'''S$ s'évanouir lorsque $z = \varrho$; d'où

$$E''' = \frac{N}{S} \text{ \{ en faisant, dans } N \text{ et } S,\ z = \varrho.$$

Considérant ensuite le diviseur $(z-\varrho)^2$, il en résulte que $\frac{N-E'''S}{z-\varrho} - E''S$ sera divisible par $z-\varrho$; effectuant la division indiquée et faisant

$$\frac{N-E'''S}{z-\varrho} = T,$$

on aura, dans le cas de $z = \varrho$,

$$T - E'', S = 0, \text{ d'où } E'' = \frac{T}{S} \text{ \{ en faisant, dans } T \text{ et } S,\ z = \varrho.$$

Considérant enfin le diviseur $(z-\varrho)^3$, il en résulte que $\frac{N-E'''S}{(z-\varrho)^2} - \frac{E''S}{z-\varrho} - E'S$, ou, ce qui est la même chose, $\frac{T-E''S}{z-\varrho} - E'S$ doit être divisible par $z-\varrho$, faisant

$$\frac{T-E'S}{z-\varrho} = T'',$$

il en résultera, dans le cas de $z = \varrho$,

$$T' - E'S = 0, \text{ d'où } E' = \frac{T'}{S} \left\{ \text{en faisant, dans } T' \text{ et } S, \ z = \varrho. \right.$$

Règle générale pour les Facteurs égaux.

On voit aisément qu'il y a une marche générale applicable à tous les exemples particuliers qu'on peut proposer; si dans la fraction $\frac{N}{D}$, on a $D = S(z - \varrho)^k$, S étant une fonction de x, et que les fractions partielles dues au facteur $(z - \varrho)^k$ soient

$$\frac{E^{(k)}}{(z-\varrho)^k} + \frac{E^{(k-1)}}{(z-\varrho)^{k-1}} + \frac{E^{(k-2)}}{(z-\varrho)^{k-2}} + \ldots\ldots + \frac{E''}{(z-\varrho)^2} + \frac{E'}{z-\varrho} = \frac{X}{(z-\varrho)^k},$$

on aura successivement

$$E^{(k)} = \frac{N}{S} \left\{ \begin{array}{l} \text{en faisant, dans} \\ N \ \& \ S, \ z = \varrho. \end{array} \right.$$

$$\frac{N - E^{(k)}S}{z-\varrho} = N', \text{ d'où } E^{(k-1)} = \frac{N'}{S} \left\{ \begin{array}{l} \text{en faisant, dans} \\ N' \ \& \ S, \ z = \varrho. \end{array} \right.$$

$$\frac{N' - E^{(k-1)}S}{z-\varrho} = N'', \text{ d'où } E^{(k-2)} = \frac{N''}{S} \left\{ \begin{array}{l} \text{en faisant, dans} \\ N'' \ \& \ S, \ z = \varrho. \end{array} \right.$$

$$\frac{N''' - E^{(k-2)}S}{z-\varrho} = N''', \text{ d'où } E^{(k-3)} = \frac{N'''}{S} \left\{ \begin{array}{l} \text{en faisant, dans} \\ N''' \ \& \ S, \ z = \varrho. \end{array} \right.$$

&c. &c.

Je ferai voir dans la suite, aux élèves, comment la décomposition des fractions rationnelles s'opère par le calcul différentiel; les procédés qu'il fournit ont quelques avantages sur les précédens, qui cependant sont autant praticables et commodes qu'on peut le désirer pour les diverses applications que les élèves auront à en faire.

INTÉGRATION COMPLÈTE

De l'Équation $A_{(x)} z_{(x)} + A_{(x)} z_{(x+1)} = X_{(x)}$, *dans laquelle* $A_{(x)}$, $A'_{(x)}$ *et* $X_{(x)}$ *sont des fonctions quelconques de* x. *Cas d'intégrabilité de l'équation* $A_{(x)} z_{(x)} + A'_{(x)} z_{(x+1)} + A''_{(x)} z_{(x+2)} + A'''_{(x)} z_{(x+3)} + \ldots\ldots + A^{(n)}_{(x)} z_{(x+n)} = X_{(x)}$, $A_{(x)}$, $A'_{(x)}$, $A''_{(x)}$, *&c. et* $X_{(x)}$ *étant des fonctions de* x; *d'où on déduit l'intégration complète des équations linéaires, résolues* n.° XXII, *lorsque le second membre, au lieu d'être zéro, est une fonction quelconque de* x.

N.° XXV. Les élèves ont paru goûter les recherches sur les équations linéaires, présentées dans les séances précédentes, et ils se pénétreront, de plus en en plus, de leur utilité, à mesure que les progrès du cours me fourniront l'occasion de les appliquer; je me propose, en ce moment, d'envisager cette théorie sous le point de vue le plus général, et j'aurai la satisfaction de les conduire, dans une des parties les plus importantes du calcul intégral, jusqu'aux limites des connaissances actuelles.

Nous avons appris à intégrer complétement l'équation

$$A z_{(x)} + A' z_{(x+1)} + A'' z_{(x+2)} + \ldots\ldots A^{(n)} z_{(x+n)} = 0,$$

$z_{(x)}$ étant fonction de x, et A, A', A'', &c. des constantes, et nous avons considéré la question sous tous les aspects de manière à n'avoir plus rien à désirer à cet égard; mais cette équation, quoique très-générale, n'est qu'un cas particulier de la suivante, qu'on peut regarder comme représentant toutes les équations différentielles linéaires à deux variables z et x.

$$A_{(x)} z_{(x)} + A'_{(x)} z_{(x+1)} + A''_{(x)} z_{(x+2)} + A'''_{(x)} z_{(x+3)} + \ldots + A^{(n)}_{(x)} z_{(x+n)} = X_{(x)},$$

$A_{(x)}$, $A'_{(x)}$, $A''_{(x)}$, &c. et $X_{(x)}$ étant des fonctions de x de même quantième, c'est-à-dire, rapportées à la même valeur de x que $z_{(x)}$; et $z_{(x+1)}$, $z_{(x+2)}$, &c. étant, comme précédemment, les termes qui suivent $z_{(x)}$ dans la série de z; *l'ordre* de l'équation se compte toujours par l'indice le plus élevé n, désignant le terme le plus éloigné de $z_{(x)}$.

On n'a encore intégré complétement que le premier ordre, et c'est à *Lagrange* que nous en sommes redevables (1); il a remarqué qu'on pouvait y appliquer le procédé d'intégration employé dans le calcul intégral ordinaire pour les équations de même espèce: ce premier pas l'a conduit à la véritable théorie des suites récurrentes, et lui a fait poser les fondemens du calcul intégral aux différences finies linéaires.

Laplace, qui a traité la même matière avec beaucoup de profondeur et de succès (2), a intégré l'équation du premier ordre $A_{(x)} z_{(x)} + A'_{(x)} z_{(x+1)} = X_{(x)}$ de deux manières différentes: je crois devoir les rapporter l'une et l'autre.

Intégration complète de l'Équation $A_{(x)} z_{(x)} + A'_{(x)} z_{(x+1)} = X_{(x)}$.

Première méthode. Je mets l'équation proposée sous la forme de

$$z_{(x+1)} = -\frac{A_{(x)}}{A'_{(x)}} z_{(x)} + \frac{X_{(x)}}{A'_{(x)}},$$

et en faisant $-\frac{A_{(x)}}{A'_{(x)}} = R_{(x)}$; $\frac{X_{(x)}}{A'_{(x)}} = S_{(x)}$, elle devient

$$z_{(x+1)} = R_{(x)} z_{(x)} + S_{(x)}.$$

Supposant successivement $x = 0$ et $x = 1$, on a

$$z_{,} = R_{0} z_{0} + S_{0}$$
$$z_{,,} = R_{,} z_{,} + S_{,}$$

la valeur de $z_{,}$ tirée de la première équation, et substituée dans la seconde, donne

$$z_{,,} = R_{0} R_{,} z_{0} + R_{,} S_{0} + S_{,};$$

d'où on déduit $z_{,,,} = R_{,} R_{,,} z_{,} + R_{,,} S_{,} + S_{,,}$ { en observant que $z_{,,,}$ doit être exprimé en $R_{,}$, $R_{,,}$, $S_{,}$, $S_{,,}$, de la même manière que $z_{,,}$ l'est en R_{0}, $R_{,}$, S_{0}, $S_{,}$.

(1) *Voyez* le Mémoire cité, *n.°* XXI.

(2) *Voyez* les Mémoires de Turin, tom. IV; ceux des savans étrangers, de 1773, &c.

Substituant la valeur de $z_{,}$ dans la dernière équation

$$z_{,,,} = R_0 R_{,} R_{,,} z_0 + R_{,} R_{,,} S_0 + R_{,,} S_{,} + S_{,,},$$

d'où on déduit $z_{IV} = R_{,} R_{,,} R_{,,,} z_{,} + R_{,,} R_{,,,} S_{,} + R_{,,,} S_{,,} + S_{,,,}$ en observant que z_{IV} doit être exprimé en $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$, $S_{,}$, $S_{,,}$, $S_{,,,}$, de la même manière que $z_{,,,}$ l'est en R_0, $R_{,}$, $R_{,,}$, S_0, $S_{,}$, $S_{,,}$.

Substituant encore la valeur de $z_{,}$ dans la dernière équation

$$z_{IV} = R_0 R_{,} R_{,,} R_{,,,} \cdot z_0 + R_{,} R_{,,} R_{,,,} S_0 + R_{,,} R_{,,,} S_{,} + R_{,,,} S_{,,} + S_{,,,},$$

on trouvera de la même manière

$$z_V = R_0 R_{,} R_{,,} R_{,,,} R_{IV} \cdot z_0 + R_{,} R_{,,} R_{,,,} R_{IV} S_0 + R_{,,} R_{,,,} R_{IV} S_{,} + R_{,,,} R_{IV} S_{,,} + R_{IV} S_{,,,} + S_{IV}.$$

La loi des valeurs successives est évidente, et on a en général

$$z_{(x)} = R_0 R_{,} R_{,,} R_{,,,} \ldots R_{(x-1)} z_0 + R_{,} R_{,,} R_{,,,} R_{IV} \ldots R_{(x-1)} S_0 + R_{,,} R_{,,,} R_{IV} \ldots R_{(x-1)} S_{,} + R_{,,,} R_{IV} \ldots R_{(x-1)} S_{,,} + R_{IV} \ldots R_{(x-1)} S_{,,,} \ldots\ldots + R_{(x-1)} S_{(x-2)} + S_{(x-1)}$$

ou, en multipliant et divisant, par le coëfficient de z_0, chacune des quantités S_0, $S_{,}$, $S_{,,}$, &c.

$$z_{(x)} = R_0 R_{,} R_{,,} R_{,,,} \ldots R_{(x-1)} \left\{ z_0 + \frac{S_0}{R_0} + \frac{S_{,}}{R_0 R_{,}} + \frac{S''}{R_0 R_{,} R_{,,}} + \frac{S_{,,,}}{R_0 R_{,} R_{,,} R_{,,,}} + \ldots + \frac{S_{(x-1)}}{R_0 R_{,} R_{,,} \ldots R_{(x-1)}} \right\}.$$

La somme des termes de la série renfermée dans l'accolade a pour différence $\frac{S_{(x)}}{R_0 R_, R_{,,} \ldots R_{(x)}}$ et cette considération transforme l'équation en

$$z_{(x)} = R_0 R_, R_{,,} R_{,,,} \ldots R_{(x-1)} \{ z_0 + \Sigma \frac{S_{(x)}}{R_0 R_, R_{,,} \ldots R_{(x)}} \}.$$

Représentons $R_0 R_, R_{,,} R_{,,,} \ldots R_{(x)}$, par $\Pi\,(R_{(x)})$
$R_0 R_, R_{,,} R_{,,,} \ldots R_{(x-1)}$, par $\Pi\,(R_{(x-1)})$

et ainsi de suite, Π étant un indice de produit qui ne représente par lui-même aucune quantité, on aura pour intégrale de l'équation proposée

$$z_{(x)} = \Pi\,(R_{(x-1)})\ \{ z_0 + \Sigma\,(\frac{S_{(x)}}{\Pi\,(R_{(x)})}) \},$$

ou en substituant pour $R_{(x-1)}$, $R_{(x)}$ et $S_{(x)}$ leurs valeurs $\frac{-A_{(x-1)}}{A'_{(1-x)}}$,
$\frac{-A'_{(x)}}{A'_{(x)}}$ et $\frac{X_{(x)}}{A_{(x)}}$

$$z_{(x)} = \Pi\,(\frac{-A_{(x-1)}}{A'_{(x-1)}})\ \{ z_0 + \Sigma\,[\frac{X_{(x)}}{A'_{(x)}\,\Pi\,(\frac{-A_{(x)}}{A'_{(x)}})}] \}$$

qu'on peut définitivement exprimer par

$$z_{(x)} = \Pi\,(\frac{-A_{(x-1)}}{A'_{(x-1)}})\ \{ z_0 + \Sigma\,[X_{(x)} . \Pi\,(\frac{-A'_{(x-1)}}{A_{(x)}})] \}$$

{ L'expression $\Pi\,(\frac{-A'_{(x-1)}}{A_{(x)}})$ synonyme de $\frac{\Pi\,(-A'_{(x-1)})}{\Pi\,(A_{(x)})}$ }

la quantité z_0, qui est le premier terme de la série des z, représente la constante arbitraire qui sert à compléter l'intégrale.

Deuxième Méthode. La solution précédente a l'avantage d'éviter ces espèces de substitutions dont on n'aperçoit pas d'abord le motif, et qui ne sont justifiées que par le résultat ; on y verra de plus un des obstacles qui s'opposent à l'intégration des équations d'un ordre plus élevé. Voici une autre solution plus courte, mais peut-être moins instructive pour les commençans ; je mets toujours l'équation proposée sous la forme de

$$z^{(x+1)} = -\frac{A_{(x)}}{A'_{(x)}} z_{(x)} + \frac{X_{(x)}}{A'_{(x)}} = R_{(x)} z_{(x)} + S_{(x)}.$$

Je suppose $z_{(x+1)} = u_{(x)} \Pi (R_{(x)})$, d'où on déduit, en substituant, dans les deux membres $(x-1)$ à x $z_{(x)} = u_{(x-1)} \Pi (R_{(x-1)})$; et mettant pour $z_{(x+1)}$ et $z_{(x)}$ leurs valeurs dans la proposée

$$u_{(x)} \Pi (R_{(x)}) = R_{(x)} u_{(x-1)} \Pi (R_{(x-1)}) + S_{(x)} = u_{(x-1)} \Pi (R_{(x)}) + S_{(x)};$$

divisant les deux membres par $\Pi (R_{(x)})$, et transposant $u_{(x-1)}$,

$$u_{(x)} - u_{(x-1)} = S_{(x)} : \Pi (R_{(x)}),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\Delta (u_{(x-1)}) = S_{(x)} : \Pi (R_{(x)}),$$

et en intégrant

$$u_{(x-1)} = C + \Sigma [S_{(x)} : \Pi (R_{(x)})];$$

enfin, substituant pour $u_{(x-1)}$ et $S_{(x)}$ leurs valeurs $z_{(x)} : \Pi (R_{(x-1)})$, et $\frac{X^{(x)}}{A'^{(x)}}$, et pour $R_{(x-1)}$, et $R_{(x)}$ leurs valeurs $\frac{-A_{(x-1)}}{A'_{(x-1)}}$ et $\frac{-A_x}{A'_x}$

$$z_{(x)} = \Pi \left(\frac{-A_{(x-1)}}{A'_x}\right) \{ C + \Sigma [X_{(x)} \Pi \left(\frac{-A'_{(x-1)}}{A_x}\right)] \};$$

ce qui est précisément la même équation donnée par la première méthode.

L'équation $A z_{x)} + A' z_{(x+1)} = X_{(x)}$ peut toujours se ramener à avoir l'unité pour coëfficient de $z_{(x)}$, si de plus le coëfficient de $z_{(x+1)}$ est égal à la quantité invariable $-\frac{1}{\varrho}$, on aura $\Pi (A'_{(x-1)}) = \left(\frac{-1}{\varrho}\right)^{x-1}$, puisque la fonction $A'_{(x)}$ de x devenant une constante, les $x-1$ facteurs $A_o A_{,} A_{,,} \ldots A_{(x-1)}$ donnent la puissance $x-1$ de cette constante, et l'intégrale se change en

$$z_x = \varrho^{x-1} \{ C + \Sigma \left(\frac{X_{(x)}}{\varrho^{x-1}}\right) \}.$$

Faisant $C = \mu \varrho$, et supposant $X_{(x)} = 0$, on a

$$z_{(x)} = \mu \varrho^x;$$

ce qui est l'intégrale de l'équation $z_{(x)} + A' z_{(x+1)} = 0$, telle qu'on l'aurait trouvée par les méthodes du *n.° XXII.*

Cas

Cas d'intégrabilité des Équations des ordres supérieurs.

J'AI dit que l'équation

$$A_{(x)}\, z_{(x)} + A'_{(x)}\, z_{(x+1)} + A''_{(x)}\, z_{(x+2)} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + A^{(n)}_{(x)}\, z_{(x+n)} = X_{(x)} \dots\dots\dots (K)$$

n'était généralement intégrable que pour le premier ordre; mais si, par quelque moyen que ce soit, on trouvait un nombre n de valeurs, en fonctions de x, qui substituées pour z dans le premier membre, réduisissent ce premier membre à zéro, on pourrait en déduire l'intégrale de l'équation entière. Cette belle propriété des équations linéaires a été démontrée par *Lagrange* avec beaucoup de simplicité et d'élégance dans les mémoires de Berlin, *année* 1775. Je vais donner sa démonstration avec quelques légers développemens.

Soient $\varrho'_{(x)}, \varrho''_{(x)}, \varrho'''_{(x)} \dots\dots\dots \varrho^{(n)}_{x}$ les n valeurs données en x, qui, chacune en particulier, réduisent à zéro le premier membre de l'équation précédente, c'est-à-dire, qui substituées pour z, satisfont à l'équation

$$A_{(x)}\, z_{(x)} + A'_{(x)}\, z_{(x+1)} + A''_{(x)}\, z_{(x+2)} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + A^{(n)}_{(x)}\, z_{(x+n)} = 0 \dots\dots\dots (K').$$

En appliquant à ces quantités le raisonnement que j'ai fait, *n.° XX*, sur les solutions particulières $\varrho_{\prime}^{x}$, $\varrho_{\prime\prime}^{x}$, on verra que μ', μ'', μ''', &c. étant des constantes arbitraires, l'équation (K') doit avoir pour intégrale complète

$$z_{(x)} = \mu' \varrho'_{(x)} + \mu'' \varrho''_{(x)} + \mu''' \varrho'''_{(x)} + \dots + \mu_{(n)}\, \varrho^{(n)}_{(x)} \dots (K'').$$

Je suppose maintenant que l'intégrale complète de l'équation (K) soit

$$z_{(x)} = \mu'_{(x)} \varrho'_{(x)} + \mu''_{(x)} \varrho''_{(x)} + \mu'''_{(x)} \varrho'''_{(x)} + \dots + \mu^{(x)}_{(x)}\, \varrho^{(n)}_{(x)} \dots (k^{\circ});$$

cette équation différant de (K''), en ce que au lieu des constantes μ', μ'', &c. on a ici les fonctions $\mu'_{(x)}$, $\mu''_{(x)}$, &c. de x, qu'il s'agit de déterminer de manière que (k°) soit vraiment l'intégrale de la proposée. Pour cela, j'observe qu'ayant un nombre n de ces indéterminées $\mu'_{(x)}\, \mu''_{(x)}$, &c., je puis me donner un nombre $n - 1$ de conditions ou d'équations qui, avec (K), fourniront le nombre n d'équations nécessaires pour trouver la

valeur de chacune d'elles. Voici comment on trouve les $n - 1$ premières conditions :

Les équations (K) et (k^{o}) étant l'une la différentielle, l'autre l'intégrale, je puis, en faisant varier x ou $z_{(x)}$, dans la dernière, en déduire les valeurs de $z_{(x+1)}$, $z_{(x+2)}$, &c. et les substituer dans la première; tirant donc de (k^{o}) la valeur de $z_{(x+1)}$, j'aurai

$$z_{(x+1)} = \mu'_{(x+1)}\, \rho'_{(x+1)} + \mu''_{(x+1)}\, \rho''_{(x+1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu^{(n)}_{(x+1)}\, \rho^{(n)}_{(x+1)},$$

qui, en faisant attention que $\mu'_{(x+1)} = \mu'_{(x)} + \Delta\mu'_{(x)}$; $\mu''_{(x+1)} = \mu''_{(x)} + \Delta\mu''_{(x)}$, &c.

se change en

$$z_{(x+1)} = \mu'_{(x)}\, \rho'_{(x+1)} + \mu''_{(x)}\, \rho''_{(x+1)} + \mu'''_{(x)}\, \rho'''_{(x+1)} + \ldots + \mu^{(n)}_{(x)}\, \rho^{(n)}_{(x+x)}$$
$$+ \rho'_{(x+1)}\, \Delta\mu'_{(x)} + \rho''_{(x+1)}\, \Delta\mu''_{(x)} + \rho'''_{(x+1)}\, \Delta\mu'''_{(x)} + \ldots\ldots + \rho^{(n)}_{(x+1)}\, \Delta\mu^{(n)}_{(x)}.$$

Je pose pour première condition que la seconde partie du deuxième membre de cette équation est égale à zéro, ce qui me donne

$$\rho'_{(x+1)}\, \Delta\mu'_{(x)} + \rho''_{(x+1)}\, \Delta\mu''_{(x)} + \rho'''_{(x+1)}\, \Delta\mu'''_{(x)} + \ldots\ldots + \rho^{(n)}_{(x+1)}\, \Delta\mu^{(n)}_{(x)} = 0 \ldots\ldots (k');$$

d'après cette hypothèse, pour avoir $z_{(x+2)}$, il suffira de faire varier la première partie de la valeur de $z_{(x+1)}$, ce qui, en continuant d'écrire $\mu'_{(x)} + \Delta\mu'_{(x)}$, $\mu''_{(x)} + \Delta\mu''_{(x)}$, &c. à la place de $\mu'_{(x+1)}$, $\mu''_{(x+1)}$, &c. donne

$$z_{(x+2)} = \mu'_{(x)}\, \rho'_{(x+2)} + \mu''_{(x)}\, \rho''_{(x+2)} + \mu'''_{(x)}\, \rho'''_{(x+2)} + \ldots + \mu^{(n)}_{(x)}\, \rho^{(x)}_{(x+2)}$$
$$+ \rho'_{(x+2)}\, \Delta\mu'_{(x)} + \rho''_{(x+2)}\, \Delta\mu''_{(x)} + \rho'''_{(x+2)}\, \Delta\mu'''_{(x)} + \ldots + \rho^{(n)}_{(x+2)}\, \Delta\mu^{(n)}_{(x)}.$$

Je pose pour deuxième condition, que la seconde partie du second membre de cette équation est égale à zéro, c'est-à-dire, qu'on a

$$\rho'_{(x+2)}\, \Delta\mu'_{(x)} + \rho''_{(x+2)}\, \Delta\mu''_{(x)} + \rho'''_{(x+2)}\, \Delta\mu'''_{(x)} + \ldots + \rho^{(n)}_{(x+2)}\, \Delta\mu^{(n)}_{(x)} = 0 \ldots (k'').$$

Continuant à faire varier z, et posant toujours pour condition que la partie de la variation due à $\mu'_{(x)}$, $\mu''_{(x)}$, $\mu'''_{(x)}$, &c. est nulle, j'aurai

$$z_{(x+3)} = \mu'_{(x)} \varrho'_{(x+3)} + \mu''_{(x)} \varrho''_{(x+3)} + \mu'''_{(x)} \varrho'''_{(x+3)} + \ldots + \mu^{(n)}_{(x)} \varrho^{(n)}_{(x+3)}$$

$$\varrho'_{(x+3)} \Delta \mu'_{(x)} + \varrho''_{(x+3)} \Delta \mu''_{(x)} + \varrho'''_{(x+3)} \Delta \mu'''_{(x)} + \ldots + \varrho^{(n)}_{(x+3)} \Delta \mu^{(n)}_{(x)} = 0 \ldots . (k''')$$

$$z_{(x+4)} = \mu'_{(x)} \varrho'_{(x+4)} + \mu''_{(x)} \varrho''_{(x+4)} + \mu'''_{(x)} \varrho'''_{(x+4)} + \ldots + \mu^{(n)}_{(x)} \varrho^{(n)}_{(x+4)}$$

$$\varrho'_{(x+4)} \Delta \mu'_{(x)} + \varrho''_{(x+4)} \Delta \mu''_{(x)} + \varrho'''_{(x+4)} \Delta \mu'''_{(x)} + \ldots + \varrho^{(n)}_{(x+4)} \Delta \mu^{(n)}_{(x)} = 0 \ldots . (k^{v})$$

....

....

$$z_{(x+n-1)} = \mu'_{(x)} \varrho'_{(x+n-1)} + \mu''_{(x)} \varrho''_{(x+n-1)} + \ldots + \mu^{(n)}_{(x)} \varrho^{(n)}_{(x+n-1)}$$

$$\varrho'_{(x+n-1)} \Delta \mu'_{(x)} + \varrho''_{(x+n-1)} \Delta \mu''_{(x)} + \ldots + \varrho^{n}_{(x+n-1)} \Delta \mu^{(n)}_{(x)} = 0. \; (k^{(n-1)}).$$

Il reste encore à faire varier $z_{(x+n-1)}$ pour en tirer la valeur de $z_{(x+n)}$; et comme j'ai obtenu, dans les variations précédentes, un nombre $n-1$ de conditions, qui, avec l'équation (K), me donneront le nombre n d'équations dont j'ai besoin, je pourrai conserver la valeur entière de $z_{(x+n)}$, qui sera

$$z_{(x+n)} = \mu_{(x)} \varrho'_{(x+n)} + \mu''_{(x)} \varrho''_{(x+n)} + \ldots + \mu^{(n)}_{(x)} \varrho^{(n)}_{(x+n)}$$
$$+ \varrho_{(x+n)} \Delta \mu'_{(x)} + \varrho''_{(x+n)} \Delta \mu''_{(x)} + \ldots + \varrho^{(n)}_{(x+n)} \Delta \mu^{(n)}_{(x)},$$

substituant dans l'équation (K) les valeurs de $z_{(x)}$, $z_{(x+1)}$, $z_{(x+2)} \ldots z_{(x+n)}$ données par (k^{o}), (k'), (k'') &c. $(k^{(n)})$, cette équation se réduira à

$$\varrho_{(x+n)} \Delta \mu'_{(x)} + \varrho''_{(x+n)} \Delta \mu''_{(x)} \; \varrho'''_{(x+n)} \Delta \mu'''_{(x)} + \ldots \ldots + \varrho^{(n)}_{(x+n)} \Delta \mu^{(n)}_{(x)} = \frac{X^{(x)}}{A^{(n)}_{(x)}} \; \ldots . . (k^{(n)}).$$

En effet, les valeurs de $z_{(x)}$, $z_{(x+1)}$, $z_{(x+2)} \ldots z_{(x+n-1)}$, et la première partie

des valeurs de $z_{(x+n)}$ sont employées comme si $\mu'_{(x)}$, $\mu''_{(x)}$, &c. n'avaient pas varié; les substitutions déduites des variations successives de l'équation (k°) sont donc, à cet égard, les mêmes, à la notion près, que si on eût employé des coëfficiens constans au lieu des coëfficiens variables $\mu'_{(x)}$, $\mu''_{(x)}$, &c., c'est-à-dire, produisent dans (K) le même effet que si elles eussent été déduites des variations successives de (K''); or (K'') étant, par hypothèse, l'intégrale de (K') ou du premier membre de (K), dans le cas de $X_{(x)} = 0$, ce premier membre de (K) doit se réduire à zéro si on y introduit des valeurs de $z_{(x)}$, $z_{(x+1)}$, $z_{(x+2)}$ .... $z_{(x+n)}$, tirées de (K''); et comme les valeurs réellement introduites ne diffèrent de celles tirées de (K'') que par la seconde partie de la valeur de $z_{(x+n)}$, cette seconde partie doit rester toute seule dans le premier membre de (K), tous les autres termes se détruisant d'eux-mêmes.

Je puis donc maintenant, au moyen des n équations (k'), (k''), (k''') .. $(k^{(n)})$ trouver la valeur des n différences $\Delta\mu'_{(x)}$, $\Delta\mu''_{(x)}$, $\Delta\mu'''_{(x)}$..... $\Delta\mu^{(n)}_{(x)}$, qui, lorsque les intégrations particulières pourront s'effectuer, donneront pour les coëfficiens variables $\mu'_{(x)}$, $\mu''_{(x)}$, &c. de l'équation (k°) les valeurs qui doivent rendre cette équation l'intégrale complète de la proposée (K).

Méthode générale d'intégration déduite de ce qui précède.

Lorsqu'on aura à intégrer une équation de l'ordre n

$$A_{(x)}\, z_{(x)} + A'_{(x)}\, z_{(x+1)} + A''_{(x)}\, z_{(x+2)} + \dots\dots\dots\dots + A^{(n)}_{(x)}\, z_{(x+n)} = X_{(x)} \quad \dots\dots (K)$$

dans laquelle $A_{(x)}$, $A'_{(x)}$, $A''_{(x)}$, &c. et $X_{(x)}$ sont des fonctions de x, et qu'on connaîtra d'une manière quelconque l'intégrale de l'équation

$$A_{(x)}\, z_{(x)} + A'_{(x)}\, z_{(x+1)} + A''_{(x)}\, z_{(x+2)} + \dots\dots\dots\dots + A^{(n)}_{(x)}\, z^{(x+n)} = 0,$$

si cette intégrale est supposée

$$z^{(x)} = \mu'\, \varrho'_{(x)} + \mu''\, \varrho''_{(x)} + \mu'''\, \varrho'''_{(x)} + \dots\dots\dots\dots + \mu^{(n)}\, \varrho^{(n)}_{(x)},$$

μ', μ'', μ''', &c. étant les constantes arbitraires, et $\varrho'_{(x)}$, $\varrho''_{(x)}$, $\varrho'''_{(x)}$ des fonctions de x, on posera les équations

Les quantités μ', μ'', μ''', &c. sont écrites ici, au lieu de $\Delta\,\mu'_{(x)}$, $\Delta\,\mu''_{(x)}$, $\Delta\,\mu'''_{(x)}$, &c. ce qui est indifférent, pourvu que leurs valeurs finales soient traitées comme des différences.

$$\left\{\begin{array}{l}
\mu'\,\varrho'_{(x+1)} + \mu''\,\varrho''_{(x+1)} + \mu'''\,\varrho'''_{(x+1)} + \ldots\ldots + \mu^{(n)}\,\varrho^{(n)}_{(x+1)} = 0 \\
\mu'\,\varrho'_{(x+2)} + \mu''\,\varrho''_{(x+2)} + \mu'''\,\varrho'''_{(x+2)} + \ldots\ldots + \mu^{(n)}\,\varrho^{(n)}_{(x+2)} = 0 \\
\mu'\,\varrho'_{(x+3)} + \mu''\,\varrho''_{(x+3)} + \mu'''\,\varrho'''_{(x+3)} + \ldots\ldots + \mu^{(n)}\,\varrho^{(n)}_{(x+3)} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mu'\,\varrho'_{(x+n-1)} + \mu''\,\varrho''_{(x+n-1)} + \mu'''\,\varrho'''_{(x+n-1)} \ldots\ldots + \mu^{(n)}\,\varrho^{(n)}_{(x+n-1)} = 0 \\
\mu'\,\varrho'_{(x+n)} + \mu''\,\varrho''_{(x+n)} + \mu'''\,\varrho'''_{(x+n)} + \ldots + \mu^{(n)}\,\varrho^{(n)}_{(x+n)} = X_{(x)} : A^{(x)}_{(n)}.
\end{array}\right.$$

Ces équations étant en nombre n, on en déduira les valeurs des n quantités μ', μ'', μ''' ...... $\mu^{(n)}$. Soient ces valeurs

$$\mu' = R'_{(x)};\ \mu'' = R''_{(x)};\ \mu''' = R'''_{(x)};\ \ldots\ \mu^{(n)} = R^{(n)}_{(x)},$$

et comme μ', μ'', μ''', &c. représentent $\Delta\,\mu'_{(x)}$, $\Delta\,\mu''_{(x)}$, $\Delta\,\mu'''_{(x)}$, &c. on aura pour l'intégrale complète de l'équation *(K)*

$$\begin{array}{l}
z_{(x)} = \varrho'_{(x)}\ \{C' + \Sigma\,(R'_{(x)})\} + \varrho''_{(x)}\ \{C'' + \Sigma\,(R''_{(x)})\} \\
\quad + \varrho'''_{(x)}\ \{C''' + \Sigma\,(R'''_{(x)})\} + \ldots + \varrho^{(n)}_{(x)}\ \{C^{(n)} + \Sigma\,(R^{(n)}_{(x)})\}
\end{array}$$

les quantités C', C'', C''' ...... $C_{(n)}$ étant n constantes arbitraires, introduites par les intégrales $\Sigma\,(R'_{(x)})$, $\Sigma\,(R''_{(x)})$, &c.

Intégration complète de l'Équation

$$A\,z_{(x)} + A'\,z_{(x+1)} + A''\,z_{(x+2)} + A'''\,z_{(x+3)} + \ldots + A^{(n)}\,z_{(x+n)} = X_{(x)},$$

dans laquelle A, A', A'', *&c. sont des coëfficiens constans, et* $X_{(x)}$ *une fonction de* x.

Cette équation est toujours intégrable, d'après ce que je viens de démontrer, puisqu'on sait intégrer complètement *(n° XXII)* l'équation

$$A\,z^{(x)} + A'\,z_{(x-1)} + A''\,z_{(x+2)} + \ldots\ldots + A^{(n)}\,z_{(x+n)} = 0,$$

qui a pour intégrale complète *(numéro cité)*

$$z_{(x)} = \mu_{\prime}\,\varrho_{\prime}^{\,x} + \mu_{\prime\prime}\,\varrho_{\prime\prime}^{\,x} + \mu_{\prime\prime\prime}\,\varrho_{\prime\prime\prime}^{\,x} + \ldots + \mu_{(n)}\,\varrho^{x}_{(n)}.$$

Appliquant aux différens ordres la règle de l'article précédent, on a

PREMIER ORDRE $n = 1$.

Équation différentielle... $A\, z_{(x)} + A'\, z_{(x+1)} = X_{(x)}$,

Intég. dans le cas de $X_{(x)} = 0 \ldots z_{(x)} = \mu_{,}\, \rho_{,}^{x}$ { $\rho_{,}$ étant la valeur de α dans l'équation $A + A'\alpha = 0$,

Équation de condition.... $\mu_{,}\, \rho_{,}^{x+1} = X_{(x)} : A'$; d'où on déduit $\mu_{,} = X_{(x)} : A'\, \rho^{x+1}$,

Intégrale complète $z_{(x)} = \rho_{,}^{x} \{ C' + \Sigma\, (X_{(x)} : A'\, \rho_{,}^{x+1}) \}$.

SECOND ORDRE $n = 2$.

Équation différentielle... $A\, z_{x} + A'\, z_{(x+1)} + A''\, z_{(x+2)} = X_{(x)}$,

Intég. dans le cas de $X_{(x)} = 0 \ldots z_{x} = \mu_{,}\, \rho_{,}^{x} + \mu_{,,}\, \rho_{,,}^{x}$ $\Big\{$ $\rho_{,}$ et $\rho_{,,}$ étant les valeurs de α, qui satisfont à l'équation $A + A'\alpha + A''\alpha^2 = 0$;

Équations de condition........ $\left\{ \begin{array}{l} \mu_{,}\rho_{,}^{x+1} + \mu_{,,}\, \delta_{,,}^{x+1} = 0 \\ \mu_{,}\rho_{,}^{x+2} + \mu''\, \rho_{,}^{x+2} = X_{(x)} : A_{,,} \end{array} \right\}$ d'où on déduit $\left\{ \begin{array}{l} \mu_{,} = X_{(x)} : (\rho' - \rho_{,,})\; A''\, \rho_{,}^{x+1} \\ \mu_{,,} = X_{(x)} : (\rho_{,,} - \rho_{,})\; A''\, \rho_{,,}^{x+1}; \end{array} \right.$

Intég. complète $z_{(x)} = \rho_{,}^{x} \{ C' + \Sigma\, [X_{(x)} : (\rho_{,} - \rho_{,,}) A''\, \rho_{,}^{x+1}] \} + \rho_{,,}^{x} \{ C'' + \Sigma\, [X_{(x)} : (\rho_{,,} - \rho_{,}) A''\, \rho_{,,}^{x+1}] \}$.

TROISIÈME ORDRE $n = 3$.

Équation différentielle....... $A\, z_{(x)} + A'\, z_{(x+1)} + A''\, z_{(x+2)} + A'''\, z_{(x+3)} = X_{(x)}$;

Intég. dans le cas de $X_{(x)} = 0 \ldots z_{(x)} = \mu_{,}\rho_{,}^{x} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{x} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{x}$ $\Bigg\{$ $\rho_{,}$, $\rho_{,,}$, $\rho_{,,,}$ étant les valeurs de α qui satisfont à l'équation $A + A'\alpha + A''\alpha^2 + A'''\alpha^3 = 0$;

Équations de condition........ $\left\{ \begin{array}{l} \mu_{,}\rho_{,}^{x+1} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{x+1} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{x+1} = 0 \\ \mu_{,}\rho_{,}^{x+2} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{x+2} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{x+2} = 0 \\ \mu_{,}\rho_{,}^{x+3} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{x+3} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{x+3} = \dfrac{X^{(x)}}{A_{,,,}} \end{array} \right\}$ d'où on déduit $\left\{ \begin{array}{l} \mu = X_{(x)} : (\rho_{,} - \rho_{,,})\, (\rho_{,} - \rho_{,,,}) A'''\, \rho_{,}^{x+1} \\ \mu_{,,} = X^{(x)} : (\rho_{,,} - \rho_{,})\, (\rho_{,,} - \rho_{,,,}) A'''\, \rho_{,,}^{x+1} \\ \mu_{,,,} = X_{(x)} : (\rho_{,,,} - \rho_{,})\, (\rho_{,,,} - {}_{,,}) A'''\, \rho_{,,,}^{x+1}; \end{array} \right.$

Intégrale complète $z_{(x)} = \ldots\ldots\ldots$ $\left\{ \begin{array}{l} \rho_{,}^{x}\; \{ C' + \Sigma\, [X_{(x)} : (\rho_{,} - \rho_{,,})\, (\rho_{,} - \rho_{,,,})\; A'''\, \rho_{,}^{x+1}\,] \} \\ + \rho_{,,}^{x}\; \{ C'' + \Sigma\, [X_{(x)} : (\rho_{,,} - \rho_{,})\, (\rho_{,,} - \rho_{,,,})\; A'''\, \rho_{,,}^{x+1}\,] \} \\ + \rho_{,,,}^{x}\; \{ C''' + \Sigma\, [X_{(x)} : (\rho_{,,,} - \rho_{,})\, (\rho''' - \rho_{,,})\; A'''\, \rho_{,,,}^{x+1}\,] \} \end{array} \right.$

En général, si on a à intégrer l'équation de l'ordre n

$$A\, z_{(x)} + A'\, z_{(x+1)} + A''\, z_{(x+2)} + \ldots\ldots + A_{(n)}\, z_{(x+n)} = X_{(x)},$$

et que l'intégrale dans le cas de $X_{(x)} = 0$ soit

$z_{(x)} = \mu_{,}\rho_{,}^{x} + \mu_{,,}\, \rho_{,,}^{x} + \mu_{,,,}\, \rho_{,,,}^{x} + \ldots + \mu_{(n)}\, \rho_{(n)}^{x}$ $\Bigg\{$ $\rho_{,}$, $\rho_{,,}$, $\rho_{,,,} \ldots \rho_{(n)}$ étant les valeurs de α qui satisfont à l'équation $A + A'\alpha + A''\alpha^2 + A_{,,,}\alpha^3 + \ldots + A^{(n)}\alpha^n = 0$,

l'intégrale complète sera

$$Z_{(x)} = \ldots \left\{ \begin{array}{l} \rho_{\prime}^{x} \{ C' + \Sigma [X_{(x)} : (\rho_{\prime} - \rho_{\prime\prime}) (\rho_{\prime} - \rho_{\prime\prime\prime}) \ldots\ldots\ldots\ldots (\rho_{\prime} - \rho_{(n)}) A^{(n)} \rho_{\prime}^{x+1}] \} \\ + \rho_{\prime\prime}^{x} \{ C'' + \Sigma [X_{(x)} : (\rho_{\prime\prime} - \rho_{\prime}) (\rho_{\prime\prime} - \rho_{\prime\prime\prime}) \ldots\ldots\ldots\ldots (\rho_{\prime\prime} - \rho_{(n)}) A^{(n)} \rho_{\prime\prime}^{x+1}] \} \\ + \rho_{\prime\prime\prime}^{x} \{ C_{\prime\prime\prime} + \Sigma [X_{(x)} : (\rho_{\prime\prime\prime} - \rho_{\prime}) (\rho_{\prime\prime\prime} - \rho_{\prime\prime}) (\rho_{\prime\prime\prime} - \rho_{\text{IV}}) \ldots\ldots (\rho_{\prime\prime\prime} - \rho_{(n)}) A^{(n)} \rho_{\prime\prime\prime}^{x+1}] \} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \rho_{(n)} \{ C^{(n)} + \Sigma [X_{(x)} : (\rho_{(n)} - \rho_{\prime}) (\rho_{(n)} - \rho_{\prime\prime}) (\rho_{(n)} - \rho_{\prime\prime\prime}) \ldots (\rho_{(n)} - \rho_{(n-1)}) A^{(n)} \rho_{(n)}^{x+1}] \} \end{array} \right.$$

Lorsque $X_{(x)}$ sera une quantité constante, les fonctions qui se trouvent sous le signe Σ d'intégration pourront être représentées par $N \Sigma \left(\frac{1}{\rho^{x}_{(k)}} \right)$, N étant une constante donnée, ce qui est le produit par N de la somme d'un nombre $x - 1$ de termes d'une progression géométrique, dont la raison est $\frac{1}{\rho_{(k)}}$, et le premier terme l'unité,

on a donc $N \Sigma \left(\frac{1}{\rho^{x}_{(k)}} \right) = N \frac{\frac{1}{\rho^{x}_{(k)}} - 1}{\frac{1}{\rho^{(k)}} - 1}$, et l'intégrale précédente prendra la forme

$$z_{(x)} = \rho_{\prime}^{x} \left\{ C' + N' \frac{1 : \rho_{\prime}^{x} - 1}{1 : \rho_{\prime} - 1} \right\} + \rho_{\prime\prime}^{x} \left\{ C'' + N'' \frac{1 : \rho_{\prime\prime}^{x} - 1}{1 : \rho_{\prime\prime} - 1} \right\}$$
$$+ \rho_{\prime\prime\prime}^{x} \left\{ C''' + N''' \frac{1 : \rho^{x}_{\prime\prime\prime} - 1}{1 : \rho_{\prime\prime\prime} - 1} \right\} + \ldots\ldots + \rho^{x}_{(n)} \left\{ C^{(n)} \right.$$
$$\left. + N^{(n)} \frac{1 : \rho^{x}_{(n)} - 1}{1 : \rho_{(n)} - 1} \right. .$$

Nous voilà parvenus à la connaissance des moyens d'intégrer une équation linéaire quelconque entre deux variables z et x, dans tous les cas où la chose est généralement possible, d'après la perfection actuelle de l'analyse.

DE L'INTÉGRATION

Des Équations différentielles dans lesquelles on ne suppose aucune différence constante.

N.° XXVI.

LORSQU'ON opère par *différentiation* sur une équation à un nombre quelconque de variables, et qu'il n'existe aucune autre relation particulièré entre quelques-unes d'elles, on sait, *n.*^{os} *III* et *V*, que n étant le nombre

total de ces variables, il y en a $n - 1$ d'*indépendantes*, dont les différences premières peuvent être considérées comme constantes. Il n'y a aucune circonstance où cette considération ne puisse s'appliquer à l'usage de la *méthode directe des différences*, et ce serait se jeter dans une complication inutile que de la négliger.

Il n'en est pas de même de la *méthode inverse ;* on est conduit, dans des problèmes importans, à des équations différentielles entre deux indéterminées z et y, qu'il faut intégrer avec la condition que Δz et Δy sont tous deux variables ; mais alors, pour que ces équations offrent un sens susceptible d'interprétation, il faut que y et Δy soient liés par un rapport déduit de l'état de la question. Les problèmes dont je parle, ont pour objet la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles du second et du troisième ordre, &c. qui contiennent différentes quantités sous les signes de fonction. Soit, par exemple, $z = \varphi(U) + \psi(V)$ une intégrale pareille (φ et ψ étant les signes de fonction) dans laquelle U et V sont fonctions données de x et y, l'équation $z = \varphi(U) + \psi(V)$, considérée indépendamment de toute condition particulière, appartient à autant de systèmes de surfaces courbes, qu'on peut faire de combinaisons de chacune des formes φ avec toutes celles que ψ représente, combinaisons dont le nombre est indéfini, puisque φ et ψ sont absolument arbitraires ; cet arbitraire cesse, et les fonctions sont déterminées, si on s'assujettit à faire passer la surface par deux courbes à double courbure données ; mais alors on parvient à une équation de la forme $\Delta\{\varphi(t)\} = F(t)$, dans laquelle t et $F(t)$ sont connues, et qu'il faut intégrer, en introduisant dans le calcul la condition que $f(t) = f'(\Delta t)$, l'acception de f et f' étant pareillement connue. On voit par-là que pour connaître φ, il faut intégrer une équation qui ne renferme des différentes constantes que dans des cas très-particuliers. Ainsi la question traitée dans cette séance pourra être utile aux élèves, lorsqu'on leur exposera, dans le cours d'analyse appliquée à la stéréotomie, la partie du calcul intégral aux différences partielles qui traite des équations du second et du troisième ordre.

Méthode

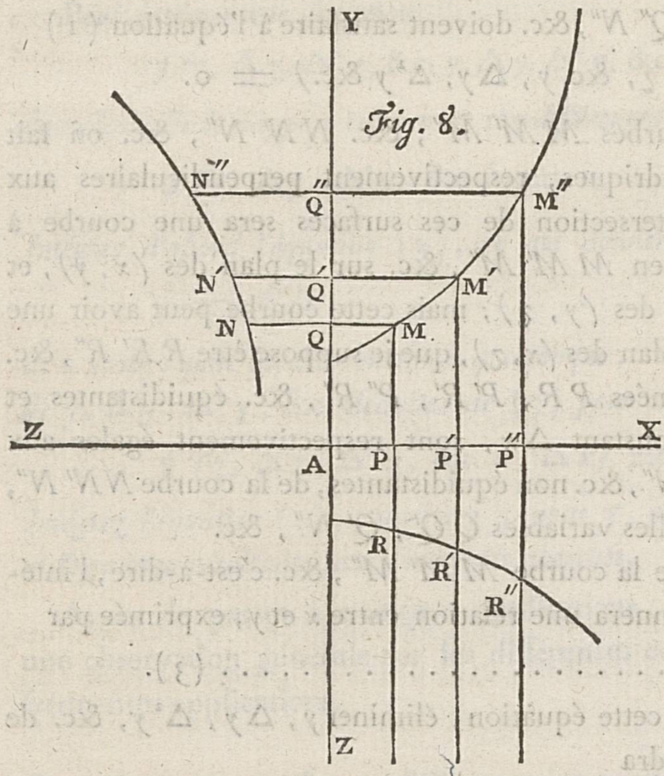
Méthode générale d'intégration.

L'équation principale à intégrer, et celle qui donne la relation entre une des variables et ses différences, devant avoir lieu en même temps, cette considération fournit un procédé de calcul très-simple. Soit la proposée

$$f(z, \Delta z, \Delta^2 z, \&c.\ y, \Delta y, \Delta^2 y, \&c., = 0 \ldots\ldots (1),$$

dans laquelle Δz et Δy sont variables, la relation entre y et ses différences étant donnée par l'équation

$$\varphi (y, \Delta y, \Delta^2 y, \&c.) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$



Je trace, *fig.* 8, les axes AX, AY, AZ, des x, des y et des z, les plans YAX, ZAX, ZAY étant respectivement ceux des (x, y), des (x, z) et des (y, z), le tout conformément au langage adopté *n.° III.*

L'intégrale de l'équation (1) doit donner une relation entre z et y, que je suppose représentée par la courbe $NN'N''$, dont les coordonnées sont $AQ\ (y)$, $QN\ (z)$; $AQ'\ (y_{,})$, $Q'N'\ (z_{,})$; $AQ''\ (y_{,,})$, $Q''N''\ (z_{,,})$; &c.

L'intégrale de l'équation (2) est le terme général de la série

$$y_0,\ y_{,},\ y_{,,},\ y_{,,,},\ \ldots\ldots\ldots y_{(x)},\ y_{(x+\Delta x)},\ y_{(x+2\Delta x)},\ \&c.$$

dans laquelle le terme $y_{(x)}$ est lié à un certain nombre des précédens ou des suivans par une relation qu'exprime cette même équation, la distance commune entre les termes étant Δx; cette manière d'envisager les intégrales, qui est générale, a été expliquée fort en détail, *n.*os XXI et XXII, &c.

pour les équations linéaires. Cette intégrale de l'équation (2) exprime donc que y est une fonction de x, c'est-à-dire, est une équation entre y et x, que je suppose représentée par la courbe $MM'M''$, dont les coordonnées sont $PM(y)$, $AP(x)$; $P'M'(y_{\prime})$, $AP'(x+\Delta x)$; $P''M''(y_{\prime\prime})$, $AP''(x+2\Delta x)$, &c.

Les rapports entre les ordonnées équidistantes PM, $P'M'$, $P''M''$, &c. ou entre les lignes qui leur sont égales AQ, AQ', AQ'', &c. satisfaisant à l'équation (2)

$$\varphi(y, \Delta y, \Delta^2 y, \&c.) = 0,$$

les ordonnées QN, $Q'N'$, $Q''N''$, &c. doivent satisfaire à l'équation (1)

$$f(z, \Delta z, \Delta^2 z, \&c.\ y, \Delta y, \Delta^2 y\ \&c.) = 0.$$

De plus, si par les courbes $MM'M''$, &c. $NN'N''$, &c. on fait passer deux surfaces cylindriques, respectivement perpendiculaires aux plans de ces courbes, l'intersection de ces surfaces sera une courbe à double courbure, projetée en $MM'M''$, &c. sur le plan des (x, y), et en $NN'N''$, &c. sur celui des (y, z); mais cette courbe peut avoir une troisième projection sur le plan des (x, z), que je suppose être $RR'R''$, &c. et dans laquelle les ordonnées PR, $P'R'$, $P''R''$, &c. équidistantes et séparées par l'intervalle constant Δx, sont respectivement égales aux ordonnées QN, $Q'N'$, $Q''N''$, &c. non équidistantes, de la courbe $NN'N''$, &c. séparées par les intervalles variables QQ', $Q'N''$, &c.

Maintenant l'équation de la courbe $MM'M''$, &c. c'est-à-dire, l'intégrale de l'équation (2) donnera une relation entre x et y, exprimée par

$$y = F(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

On peut, au moyen de cette équation, éliminer y, Δy, $\Delta^2 y$, &c. de l'équation (1), qui deviendra

$$f\{(z, \Delta z, \Delta^2 z, \&c.\ F(x), \Delta F(x)\, \Delta^2 F(x), \&c.\} = 0,$$

qu'on peut, puisque l'acception de F est connue, exprimer par

$$f'(z, \Delta z, \Delta^2 z, \&c.\ x, \Delta x) = 0 \ldots\ldots (4),$$

et qui sera l'équation différentielle de la courbe $RR'R''$, &c. puisqu'elle exprimera la relation entre z, z', z'', &c. x et Δx, c'est-à-dire, entre PR, $P'R'$, $P''R''$, &c. AP et $PP' = P'P'' =$ &c.

Intégrant l'équation (4) et substituant dans l'intégrale la valeur de x en y, tirée de l'équation (3), on aura la relation entre z et y, c'est-à-dire, l'intégrale de l'équation (1), ce qui résulte évidemment des propriétés connues des projections sur les trois plans, dont deux donnent toujours la troisième.

L'intégration de l'équation (1), dont aucune des différences n'est constante, se trouve donc ramenée à celle des deux équations (2) et (4), dans lesquelles une des variables a sa différence constante. Voici la récapitulation du procédé de calcul.

Pour intégrer une équation

$$f(z, \Delta z, \Delta^2 z, \&c.\ y, \Delta y, \Delta^2 y, \&c.) = 0 \ldots (1),$$

dans laquelle le rapport entre y *et ses différences est exprimé par*

$$\varphi(y, \Delta y, \Delta^2 y, \&c.) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Intégrez d'abord l'équation (2), *ce qui donnera*

$$y = F(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

Δx *étant l'unité ou une constante quelconque ; substituez dans* (1) *les valeurs de* y, Δy, $\Delta^2 y$, &c. *déduites de* (3) *pour avoir l'équation*

$$f'(z, \Delta z, \Delta^2 z, \&c.\ x, \Delta x) = 0 \ldots\ldots (4).$$

Intégrez l'équation (4), *substituez* y *pour* x, *sa valeur en* y, *tirée de* (3), *et l'équation résultante sera l'intégrale cherchée.*

Avant de passer à quelques applications, je crois nécessaire de faire une observation générale sur les différences constantes, qui peut avoir de fréquentes applications.

Du changement d'une différence constante en une autre différence égale ou à l'unité ou à une constante quelconque.

J'ai supposé, depuis le *n.° XXII*, dans toutes les équations à deux variables z et x, que la différence Δx était égale à l'unité ; mais cette hypothèse ne limite en aucune manière la généralité des résultats, et il est aisé de s'en rendre raison. Soit $z = \varphi(x)$, et faisons $\Delta x = \alpha$,

l'incrément ω étant constant, les différences successives de cette équation se dériveront des équations variées

$$z = \varphi(x);\ z_{,} = \varphi(x+\omega);\ z_{,,} = \varphi(x+2\omega)\ \ldots\ z_{(n)} = \varphi(x+n\omega).$$

Substituons maintenant à x une autre variable u, en posant l'équation de condition

$$x = \frac{\omega}{\Omega} u,$$

Ω étant une quantité qu'on peut se donner arbitrairement, pourvu que la valeur de u, correspondant à chaque valeur de x, se détermine en conséquence ; cette valeur de x, substituée dans les équations précédentes, donnera

$$z = \varphi\left(\frac{\omega}{\Omega} u\right);\ z_{,} = \varphi\left(\frac{\omega}{\Omega} u + \omega\right);\ z_{,,} = \varphi\left(\frac{\omega}{\Omega} u + 2\omega\right)\ \ldots\ z_{(n)}$$
$$= \varphi\left(\frac{\omega}{\Omega} u + n\omega\right),$$

ω étant l'accroissement du terme variable $\frac{\omega}{\Omega} u$, comme il l'était de son égal x; mais les équations précédentes peuvent se mettre sous la forme

$$z = \varphi\left\{\frac{\omega}{\Omega} u\right\};\ z_{,} = \varphi\left\{\frac{\omega}{\Omega}(u+\Omega)\right\};\ z_{,,} = \varphi\left\{\frac{\omega}{\Omega}(u+2\Omega)\right\}\ldots$$
$$z_{(n)} = \varphi\left\{\frac{\omega}{\Omega}(u+n\Omega)\right\};$$

donc, si on a deux équations $z = \varphi(x)$ et $z = \varphi\left(\frac{\omega}{\Omega} u\right)$, les valeurs de $z_{,}$, $z_{,,}$, $z_{,,,}$; &c. seront identiques dans l'une et l'autre équation, en faisant $\Delta x = \omega$, dans la première, et $\Delta u = \Omega$, dans la seconde, pourvu qu'on ait l'équation de condition $x = \frac{\omega}{\Omega} u$, ce qui fournit la règle générale :

Pour transformer, dans une équation, une différence constante ω en une autre Ω, pareillement constante, substituez à la variable dont ω est la différence, qu'on suppose désignée par x, *une autre variable* u, *dont le rapport avec* x *soit exprimé par l'équation* $x = \frac{\omega}{\Omega} u$.

Ainsi on pourra, dans toutes les équations précédemment intégrées et

où j'ai supposé $\Delta x = 1$, introduire, au lieu de x, une variable u, dont la différence constante soit une quantité quelconque Ω, en faisant $x = \frac{1}{\Omega} u$ et pour réduire celles où Δx n'est pas l'unité, mais a une valeur ω, à d'autres où on aurait $\Delta x = 1$, il faut supposer $x = \omega u$.

Je passe à des applications de la méthode qui fait l'objet de cette séance.

Intégration de l'équation $A z + A_{,} z_{,} + A_{,,} z_{,,} + \ldots + A_{(n)} z_{(n)} = 0$, *les coëfficiens* $A, A, A_{,,}$, *&c. étant constans, dans l'hypothèse où* z *serait fonction de* y, *et où* Δy *serait variable et donné par une équation entre* y *et* Δy.

Les valeurs de $z, z_{,}, z_{,,}$, &c. représentent QN, $Q'N'$, $Q''N''$, &c. de la figure, et comme y et Δy ne se trouvent point dans la proposée, la première substitution indiquée par la règle générale est inutile, et on peut dès l'abord considérer l'équation différentielle comme appartenant à la courbe $R R' R''$, &c. et faire une première intégration, en considérant z comme fonction d'une variable x, dont la différence Δx serait constante. Les procédés de cette intégration ont été expliqués fort en détail, *n.º XXII*, et si on veut y restituer le signe général Δx, au lieu de l'unité qui le représente dans le numéro cité, il faut, d'après ce que je viens de dire dans l'article précédent, écrire $\frac{1}{\Delta x} x$, au lieu de x; on aura donc pour l'équation de la courbe $R R' R''$, &c.

$$z = \mu_{,} \rho_{,}^{x:\Delta} + \mu_{,,} \rho_{,,}^{x:\Delta} + \mu \ \rho_{,,,}^{x:\Delta} + \ldots + \mu_{(n)} \rho_{(n)}^{x:\Delta x},$$

μ', $\mu_{,,}$, $\mu_{,,,}$, &c. $\rho_{,}$, $\rho_{,,}$, $\rho_{,,,}$, &c. étant des constantes qu'on détermine par les méthodes que j'ai données *n.º XX*.

Il s'agit maintenant de substituer dans cette valeur de z celle de x en y, déduite de l'intégrale de l'équation différentielle qui donne le rapport de y à Δy; je vais faire quelques hypothèses sur ce rapport, qui offriront autant d'exemples simples de l'application de la méthode.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE $\Delta y = a$.

Ce cas peut se résoudre sur-le-champ, d'après la règle donnée ci-dessus pour transformer une différence constante en une autre pareillement constante; il ne s'agit que de faire $x = \frac{\Delta x}{a} y$, et de substituer cette expression dans la valeur de z, ce qui donne

$$z = \mu_{,} \varrho_{,}^{y:a} + \mu_{,,} \varrho_{,,}^{y:a} + \ldots\ldots\ldots + \mu_{(n)} \varrho_{(n)}^{y:a}.$$

Si on veut y appliquer la règle générale, on aura, en intégrant $y = \Sigma(a) = \frac{a x}{\Delta x} + b$, d'où $x = \frac{(y-b)\Delta x}{a}$, b étant la valeur de y lorsque $x = 0$; on voit que la courbe $M M' M''$, &c. est une ligne droite, faisant avec l'axe des x un angle, dont la tangente $= \frac{a}{\Delta x}$. La valeur de x donnée par l'équation $y = \Sigma(a)$ coïncide avec la précédente, lorsque $b = 0$, ou lorsque la ligne $M M' M''$, &c. passe par l'origine, et on peut s'en tenir à la valeur de z qui résulte de cette solution, vu que pour satisfaire à l'équation $\Delta y = a$, il suffit que $M M' M''$, &c. fasse un certain angle avec l'axe des x, cette ligne pouvant d'ailleurs passer à une distance quelconque de l'origine.

SECONDE HYPOTHÈSE $\Delta y = y$.

Pour ramener cette équation à la notation à laquelle les élèves sont accoutumés, on substituera à Δy sa valeur $y_{,} - y$, et on aura $2y - y_{,} = 0$, ou en général $2\, y_{(x)} - y_{(x+1)} = 0$, dont l'intégrale est, d'après la méthode du *n.° XX*,

$$y_{(x)} = y_0 (2)^x.$$

Cette intégrale suppose $\Delta x = 1$; on peut y introduire au lieu de x une variable $\frac{1}{\Delta u} u$, dont la variation Δu serait quelconque, ou, ce qui revient au même, écrire $\frac{x}{\Delta x}$ à la place de x, et on aura $y = y_0 (2)^{x : \Delta x}$; d'où on tire

$$x = \frac{\Delta x \log. (y : y_0)}{\log. 2},$$

et substituant cette valeur de x dans celle de z

$$z = \mu_{,} \varrho_{,}^{[\log.(y:y_0)]:\log. 2} + \mu_{,,} \varrho_{,,}^{[\log.(y:y_0)]:\log. 2} + \ldots + \mu_{(n)} \varrho_{(n)}^{[\log.(y:y_0)]:\log. 2}.$$

x étant donné par le rapport de deux logarithmes, on peut calculer z avec les tables ordinaires; ainsi l'exposant commun de $\varrho_{,}$, $\varrho_{,,}$, &c. sera $\frac{\log. y - \log. y_0}{0,30103}$. La quantité y_0 est la valeur de y correspondante à $x = 0$, et il faut observer qu'on satisfera à l'équation $\Delta y = y$, soit en faisant $y_0 = 1$, soit en lui donnant toute autre valeur, pourvu néanmoins que $y_0 > 0$.

TROISIÈME HYPOTHÈSE $\Delta y = a + by$.

Je change, comme dans l'exemple précédent, la notation Δy en $y_{,} - y$ et j'ai $y - \frac{1}{1+b} y_{,} = - \frac{a}{1+b}$, et en général $y_{(x)} - \frac{1}{1+b} y_{(x+1)} = - \frac{a}{1+b}$; intégrant par les méthodes du *n.° XXIII*, on a

$$y_{(x)} = a\{1 + (b+1) + (b+1)^2 + (b+1)^3 + \ldots\ldots\ldots + (b+1)^{x-1}\} + (b+1)^x y_0,$$

qui, en sommant la suite multipliée par a, et introduisant Δx, au lieu de l'unité pour l'incrément de x, se réduit

$$y = \{\frac{a}{b} + y_0\}(b+1)^{x:\Delta x} - \frac{a}{b};$$

on déduit de cette équation

$$x = \frac{\Delta y \log. \{(a+by):(a+by_0)\}}{\log. (1+b)},$$

et la valeur de z devient

$$z = \mu_{,} \varrho_{,}^{[\log. \frac{a+by}{a+by_0}]:\log.(1+b)} + \mu_{,,} \varrho_{,,}^{[\log. \frac{a+by}{a+by_0}]:\log.(1+b)} + \ldots + \mu_{(n)} \varrho_{(n)}^{[\log. \frac{a+by}{a+by_0}]:\log.(1+b)};$$

y_0 est la valeur de y correspondante à $x = 0$, et j'observerai encore que l'équation $\Delta y = a + by$ sera satisfaite pour toute hypothèse sur y_0,

hors celle de $y_0 = -\frac{a}{b}$; on simplifiera la valeur de z en supposant $y_0 = \frac{1-a}{b}$ et elle se réduira à

$$z = \mu_{,} \rho_{,}^{\frac{\log.(a+by)}{\log.(1+b)}} + \mu_{,,} \rho_{,,}^{\frac{\log.(a+by)}{\log.(1+b)}} + \ldots + \mu_{(n)} \rho_{(n)}^{\frac{\log.(a+by)}{\log.(1+b)}}.$$

QUATRIÈME HYPOTHÈSE $\Delta y = a y^k - y$.

Éliminant, comme à l'ordinaire, $\Delta y = y_{,} - y$, cette hypothèse devient $y_{,} = a y^k$, et en général $y_{(x+1)} = a y_{(x)}^k$, équation qui n'est pas linéaire, mais qu'on intégrera aisément par une des méthodes du *n.°* XXIII, pour cela, on formera les valeurs successives

$$y_{,} = a y_0^k \qquad = a^1 y_0^k$$
$$y_{,,} = a y_{,}^k = a a^k y_0^{k^2} \qquad = a^{1+k} y_0^{k^2}$$
$$y_{,,,} = a y_{,,}^k = a a^k y_{,}^{k^2} = a a^k a^{k^2} y_0^{k^3} \qquad = a^{1+k+k^2} y_0^{k^3}$$
$$y_{,,,,} = a y_{,,,}^k = a a^k y_{,,}^{k^2} = a a^k a^{k^2} y_{,}^{k^3} = a a^k a^{k^2} a^{k^3} y_0^{k^4} = a^{1+k+k^2+k^3} y_0^{k^4}$$

. . . .

. . . .

en général . . . . $y_{(x)} = a^{1+k+k^2+\ldots+k^{x-1}} y_0^{k^x}$,

sommant l'exposant de a et écrivant $x : \Delta x$ au lieu de x

$$y = a^{\frac{k^{x:\Delta x}-1}{k-1}} y_0^{k^{x k:\Delta x}} = a^{-1:(k-1)} (y_0 a^{1:(k-1)})^{k^{x:\Delta x}}.$$

Passant une première fois des nombres aux logarithmes, on a $k^{x:\Delta x} = \frac{\log.(a^{1:(k-1)} y)}{\log.(a^{1:(x-1)} y_0)}$, et par une seconde transition

$$x = \frac{\Delta x}{\log.\ k} \log. \left\{ \frac{\log.(a^{1:(k-1)} y)}{\log.(a^{1:(k-1)} y_0)} \right\},$$

on aurait pu transformer la valeur de y en celle-ci :

$$y = a^{k^{x:\Delta x}-1}\, y_0^{(k-1)k^{x:\Delta x}} = a^{-1} (a y_0^{k-1})^{k^{x:\Delta x}}$$

qui

qui aurait donné la valeur de x sous cet autre forme

$$x = \frac{\Delta x}{\log. k} \cdot \log. \left\{ \frac{\log. (a y^{k} - 1)}{\log. (a y^{k} - 1)} \right\};$$

y_0 est toujours la valeur de y correspondante à $x = 0$, c'est la constante arbitraire qui détermine, sur le plan des (x, y) parmi le nombre indéfini de courbes qui satisfont à l'équation différentielle $\Delta y = a y^k - y$, quelle est celle qui satisfait, en outre, à une condition particulière que comporte la question; mais si, comme dans le cas actuel, on n'a pour but que de satisfaire à l'équation différentielle en général, une valeur quelconque de y_0 remplira cet objet, et on sera le maître d'adopter la plus commode pour le calcul; faisant donc $\log. (a y^{k}_{\cdot} - 1) = 1$, d'où $y^0 = (\frac{B}{a})^{1:(k-1)}$ (la base du système étant B) on aura

$$x = \frac{\Delta x \log. \{ \log. (a y^{k} - 1) \}}{\log. k},$$

valeur qui, substituée dans celle de z, donne

$$z = \mu_{\prime} \varrho_{\prime}^{\frac{\log. [\log. (a y^{k-1})]}{\log. k}} + \mu_{\prime\prime} \varrho_{\prime\prime}^{\frac{\log. [\log. (a y^{k-1})]}{\log. k}} + \ldots\ldots$$

$$+ \mu_{(n)} \varrho_{(n)}^{\frac{\log. [\log. (a y^{k-1})]}{\log. k}}.$$

Ces exemples offrent des exercices suffisans pour faire comprendre l'esprit de la méthode; les élèves qui voudront se familiariser avec cette théorie, et se préparer aux séances prochaines, étudieront deux mémoires de *Monge*, l'un publié dans la collection des savans étrangers, tome IX, *page 345*, l'autre parmi ceux de l'académie des sciences, année 1783, *page 725*.

CONSIDÉRATIONS

Sur les Équations différentielles élevées, et sur la multiplicité des intégrales qu'on en déduit.

N.° XXVII. LA théorie des équations différentielles élevées offre encore un vaste champ de découvertes aux géomètres ; j'ai principalement entretenu les élèves des équations linéaires, parce que ce sont celles qu'on rencontre à chaque instant dans la mécanique et dans les sciences physico-mathématiques en général ; cependant je ne veux pas terminer cette section du cours, sans leur donner une idée des résultats singuliers et même paradoxaux auxquels conduit l'intégration des équations élevées ; je me bornerai à donner un seul exemple qui suffira à l'objet que j'ai en vue, et qui étant susceptible d'une construction simple, offrira une image sensible des propriétés que je veux démontrer. Les élèves qui voudront de plus grands détails, pourront consulter plusieurs mémoires de *Monge* et de *Charles*, publiés dans les recueils de l'académie des sciences depuis 1783 jusqu'en 1788.

Soit l'équation du second degré

$$(\Delta z)^2 = a^2,$$

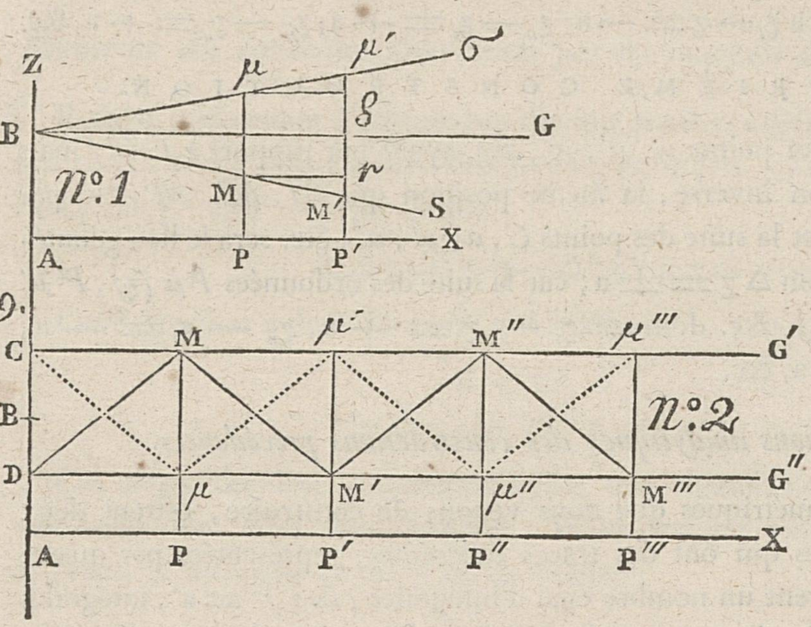
j'en tire $\Delta z = \pm a$, ce qui donne les deux valeurs

$$\Delta z = + a, \quad \Delta z = - a.$$

Ces équations expriment, comme on sait, que z est une certaine fonction de x, en supposant Δx constant, et à cause de l'ambiguité des signes, on peut établir une relation entre z et x, qui satisfasse 1.° à l'équation $\Delta z = + a$; 2.° à l'équation $\Delta z = - a$; 3.° à l'équation $\Delta z = \pm a$, en donnant à Δz des signes alternativement positifs et négatifs ; 4.° à l'équation $\Delta z = \pm a$, en donnant à Δz des signes alternativement négatifs et positifs ; je vais d'abord construire toutes ces relations, je traduirai ensuite mes constructions en expressions analytiques, et enfin je retrouverai les mêmes expressions par les procédés du calcul intégral.

PREMIÈRE CONSTRUCTION.

Fig. 9.



Je trace, *fig.* 9, *n.°* 1, les deux axes AZ et AX des z et des x, je prends AB, longueur arbitraire, et je mène BG, parallèle à AX; je trace $B\sigma$, faisant avec BG un angle dont la tangente $= \frac{a}{\Delta x}$ et cette ligne $B\sigma$ est le lieu géométrique de l'équation $\Delta z = + a$; en effet, menant deux ordonnées $P\mu\ (z)$, $P'\mu'\ (z_{,})$ séparées par l'intervalle $PP' = \Delta x$, et la parallèle $\mu\varrho$ à AX, on aura $P'\mu'\ (z_{,}) - P\mu (z) = \mu_{,}\varrho\ (a)$ ou $\Delta z = + a$.

SECONDE CONSTRUCTION.

Je trace la ligne BS, faisant avec BG le même angle que $B\sigma$, du côté opposé, et j'ai, en menant les ordonnées $PM\ (z)$, $P'M'\ (z_{,})$ et Mr parallèle à AG, $P'M'\ (z_{,}) - PM\ (z) = - M'r\ (a)$ ou $\Delta z = - a$.

TROSIÈME CONSTRUCTION (1).

Je trace, *n.°* 2, les axes AX, AZ des x et des z; je prends AB, longueur arbitraire, et de part et d'autre du point B je mesure BC et BD, égales entre elles et à $\frac{a}{2}$. Par les points D et C je mène CG', DG'', parallèles à AX, je prends $CM = \Delta x$, $MM'' = 2\ \Delta x$, et un nombre indéfini de divisions à partir de M'', toutes égales à $2\ \Delta x$; je prends de

(1) Les points qui donnent les deux dernières constructions sont liés entre eux par des lignes droites, mais c'est uniquemeut pour éviter la confusion et distinguer la série de ceux qui appartiennent à une même solution.

plus $DM' = M'M''' =$ &c. $= 2\,\Delta x$, et la suite des points D, M, M', M'', &c. est un des lieux géométriques de l'équation $\Delta z = \mp a$; en effet, menant les ordonnées $PM\,(z)$, $P'M'\,(z_{,})$, $P''M''\,(z_{,,})$, $P'''M'''\,(z_{,,,})$, &c. on a $z_{,} - z = -a$; $z_{,,} - z_{,} = +a$; $z_{,,,} - z_{,,} = +a$, &c.

QUATRIÈME CONSTRUCTION.

Je détermine les points μ, μ', μ'', &c. ayant par rapport à CG', mais dans une situation inverse, la même position que M, M', M'', &c. par rapport à DG'', et la suite des points C, μ, μ', μ'', &c. sera le lieu géométrique de l'équation $\Delta z = \pm a$, car la suite des ordonnées $P\mu\,(z)$, $P'\mu'\,(z_{,})$, $P''\mu''\,(z_{,,})$, &c. donnera $z_{,} - z = +a$, $z_{,,} - z_{,} = -a$, $z_{,,,} - z_{,,} = +a$, &c.

Traductions analytiques des constructions précédentes.

Les lieux géométriques que nous venons de construire, offrent deux systèmes de lignes qui ont des traces différentes, représentées par quatre équations qui offrent un nombre égal d'intégrales $(\Delta z_{,})^2 = a^2$, intégrales distinctes et dont les deux dernières ne peuvent point être des cas particuliers des deux premières.

La première équation qui exprime la relation entre les coordonnées de la ligne $B\sigma$, est, en faisant $AB = C$,

$$z = C + \frac{a x}{\Delta x}.$$

La seconde équation entre les coordonnées de la ligne BS, est

$$z = C - \frac{a x}{\Delta x}.$$

La troisième équation qui donne les valeurs de z correspondantes aux points D, M, M', M'', &c. est, en faisant $AB = C$,

$$z = C - \tfrac{1}{2}\,a\,(-1)^{x : \Delta x}.$$

La quatrième équation qui donne les valeurs de z correspondantes aux points C, μ, μ', μ'', &c., est

$$z = C + \tfrac{1}{2}\,a\,(-1)^{x : \Delta x}.$$

En substituant successivement pour x dans toutes ces équations, les

nombres o, Δx, $2\,\Delta x$, $3\,\Delta x$, &c. on aura toutes les valeurs que comportent chacune des constructions de $(\Delta z)^2 = a^2$ qu'elles représentent respectivement.

Recherche des équations précédentes par les procédés du calcul intégral.

Il s'agit maintenant d'obtenir par des intégrations effectives les équations qui résultent des constructions différentes ; pour cela, je différencie l'équation $(\Delta z)^2 = a^2$, ce qui donne

$$2\,\Delta z\,\Delta^2 z + (\Delta^2 z)^2 = 0.$$

Cette équation a deux facteurs, qui sont

$$\Delta^2 z = 0$$
$$2\,\Delta z + \Delta^2 z = 0.$$

Ces deux dernières équations ayant une signification aussi étendue que celle dont elles sont déduites, je les intègre l'une après l'autre ; la première intégrale de $\Delta^2 z = 0$ donne

$$\Delta z = A,$$

et pour seconde intégrale . . . . . . $z = \dfrac{Ax}{\Delta x} + C.$

Des deux constantes A et C, l'une doit se déterminer de manière à satisfaire à des conditions particulières de la question, et l'autre de manière à satisfaire à la proposée $(\Delta z)^2 = a^2$, cette dernière considération donne $\pm a = A$, et substituant cette valeur dans celle de z, on a $z = \pm \dfrac{ax}{\Delta x} + C$, c'est-à-dire,

$$z = C + \frac{ax}{\Delta x}$$
$$z = C - \frac{ax}{\Delta x}.$$

Ce sont les deux premières équations fournies par la construction, *n.° 1* de la figure.

Je passe au second facteur

$$2\,\Delta z + \Delta^2 z + 0;$$

il donne pour première intégrale

$$2z + \Delta z = 2C,$$

équation qui peut se mettre sous la forme $z + z_{,} = 2C$, ou, en général,

$$z_{(x+1)} = 2C - z_{(x)}.$$

Nous avons vu que l'équation générale $z_{(x+1)} = \alpha + \beta z_{(x)}$ avait pour intégrale $z = (\frac{\alpha}{\beta - 1} + z_0)\beta^{x:\Delta x} - \frac{\alpha}{\beta - 1} = B^{x:\Delta x} - \frac{\alpha}{\beta - 1}$, l'incrément de x étant Δx, au lieu de l'unité, et B une constante arbitraire; faisant donc $\alpha = 2C$ et $\beta = -1$, on a

$$z = B(-1)^{x:\Delta x} + C.$$

Des deux constantes B et C, l'une doit se déterminer par des conditions particulières de la question, et l'autre de manière à satisfaire à la proposée $(\Delta z)^2 = a^2$; cette dernière considération donne $\pm \frac{a}{2} = B$, et en substituant cette valeur, on a $z = C \pm \frac{1}{2}a(-1)^{x:\Delta x}$, d'où résultent les deux équations

$$z = C + \tfrac{1}{2}a(-1)^{x:\Delta x}$$
$$z = C - \tfrac{1}{2}a(-1)^{x:\Delta x}.$$

Ce sont les troisième et quatrième équations fournies par la construction, *n.° 2* de la figure.

OBSERVATIONS.

L'intégrale $z = C \pm \frac{ax}{\Delta x}$ est celle qu'on aurait obtenue par les méthodes ordinaires, en intégrant l'équation $(\Delta z)^2 = a^2$ ou son équivalente $\Delta z = \pm a$; il n'en est pas de même de l'intégrale $z = C \pm \frac{1}{2}a(-1)^{x:\Delta x}$; celle-ci dérive d'un facteur donné par la différenciation de $(\Delta z)^2 = a^2$, et sans ce procédé on n'aurait qu'une partie des solutions dont la question est susceptible. L'équation $(\Delta z)^3 = a^3$, traitée par la même méthode, exige l'intégration de trois équations facteurs; les constantes déterminées de manière à satisfaire à la proposée, introduisent dans chacune des trois intégrales la quantité $\sqrt[3]{(1)}$,

et ayant égard aux trois valeurs de cette quantité qui, d'après ce que j'ai démontré *n.° XX*, sont faciles à trouver, on a en tout neuf intégrales distinctes, dont les trois premières seulement sont données par la méthode ordinaire, savoir, celles contenues dans l'équation $z = \frac{a x}{\Delta x} \sqrt[3]{(1)} + B$; l'équation $(\Delta z)^4 = a^4$ donnerait par la même raison seize intégrales, et ainsi de suite.

Voici le calcul du cas du troisième degré

$$(\Delta z)^3 = a^3:$$

on a par la différenciation

$$3(\Delta z)^2 \Delta^2 z + 3 \Delta z (\Delta^2 z)^2 + (\Delta^2 z)^3 = 0,$$

équation qui se décompose en deux facteurs

$$\Delta^2 z = 0$$

$$3(\Delta z)^2 + 3 \Delta z (\Delta^2 z) + (\Delta^2 z)^2 = 0.$$

Le premier facteur donne

1.re intégrale.. $\Delta z = A$

2.e intégrale.... $z = \frac{A}{\Delta x} + B$

D'où on tire, en faisant des substitutions pour x, savoir :

$x = 0 \ldots \; z_0 = B$
$x = \Delta x \;\; z_1 = A + B$

$z_1 - z_0 = \Delta z = \sqrt[3]{a^3}$
$z_1 - z_0 = A.$

Déterminant A de manière à satisfaire à la proposée, qui donne en général $z_{(x+1)} - z_{(x)} = a \sqrt[3]{1}$, on trouve $A = a \sqrt[3]{1}$; ainsi cette intégrale devient

$$z = \frac{a x}{\Delta x} \sqrt[3]{1} + B \ldots\ldots (1).$$

Le second facteur divisé par $(\Delta z)^2$, donne

$$3 + 3 \frac{\Delta^2 z}{\Delta z} + \left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta z}\right)^2 = 0,$$

faisant $\frac{\Delta^2 z}{\Delta z} = u$, il vient

$$3 + 3u + u^2 = 0;$$

différenciant cette équation, il vient

$$3 \Delta u + 2 u \Delta u + (\Delta u)^2 = 0,$$

équation qui a deux facteurs, savoir,

$$\Delta u = 0$$

$$3 + 2u + \Delta u = 0.$$

Le premier facteur donne $u = A$, et en mettant pour u sa valeur $\frac{\Delta^2 z}{\Delta z}$

1.re intégrale. . . . . . $\Delta^2 z = C \Delta z$;

2.e intégrale. . . . . . $\Delta z = C z + D$.

Cette 2.e intégrale donne $z_{,} - z = C z + D$, d'où $z_{(x+1)} = D + (C + 1) z_x$, dont l'intégrale est

3.e intégrale. . . . . . $z = E (C + 1)^{x : \Delta x} - \frac{D}{C}$,

ou $C z + D = E (C + 1)^{x : \Delta x}$;

il faut déterminer C et E de manière à satisfaire à la proposée; faisant donc différentes hypothèses pour x, on a

Pour $x = 0$ . . . . . $C z_0 + D = E$
Pour $x = \Delta x$ . . . $C z_{,} + D = E (C + 1)$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a $C (z_{,} - z_0) = E C$, d'où $E = z_{,} - z_0 = \Delta z$, et comme en général $z_{(x+1)} - z_x = a \sqrt[3]{1}$, on a $E = a \sqrt[3]{1}$.

Pour $x = 2 \Delta x$ . . $C z_{,,} + D = E (C + 1)^2$

Retranchant les 2.e et 3.e équations l'une de l'autre, on a $C (z_{,,} - z_{,}) = E C (C + 1)$, qui, en substituant pour $z_{,,} - z_{,}$ et pour E leur valeur commune $a \sqrt[3]{1}$, donne $1 = C + 1$ ou $C = 0$.

Ces équations donnent $E = a \sqrt[3]{1}$ et $C = 0$; ainsi la 3.e intégrale se réduit à

$$z = x.$$

Le deuxième facteur $3 + 2u + \Delta u = 0$ se change en $3 + 2u + u_{,} - u = 0$, ou en $u' = -3 - u$, ou en $u_{(x+1)} = -3 - u_{(x)}$ dont l'intégrale est

$$u = G (-1)^{x : \Delta x} \tfrac{3}{2};$$

et mettant pour u sa valeur $\frac{\Delta^2 z}{\Delta z}$,

$$\Delta^2 z + \tfrac{3}{2} \Delta z = \Delta z \, G (-1)^{x : \Delta x},$$

qui se change en $\Delta z_{(x+1)} - \Delta z_{(x)} + \frac{3}{2} \Delta z_{(x)} = \Delta z_{(x)} G (-1)^{x : \Delta x}$, ou en $\Delta z_{(x+1)} = \Delta z_x \{ G (-1)^{x + \Delta x} - \frac{1}{2} \}$;

donnant

donnant successivement à x différentes valeurs

$$\Delta z_{,} = \Delta z_{0} \left\{ G(-1)^{0} - \tfrac{1}{2} \right\},$$

$$\Delta z_{,,} = \Delta z_{,} \left\{ G(-1)^{1} - \tfrac{1}{2} \right\} = \left\{ G(-1)^{0} - \tfrac{1}{2} \right\} \left\{ G(-1)^{1} - \tfrac{1}{2} \right\} \Delta z_{0},$$

$$\Delta z_{,,,} = \left\{ G(-1)^{1} - \tfrac{1}{2} \right\} \left\{ G(-1)^{2} - \tfrac{1}{2} \right\} \Delta z_{,} = \left\{ G(-1)^{0} - \tfrac{1}{2} \right\} \left\{ G(-1)^{1} - \tfrac{1}{2} \right\} \left\{ G(-1)^{2} - \tfrac{1}{2} \right\} \Delta z_{0},$$

&c. &c.

et en général

$$\Delta z_{(x)} = \left\{ G(-1)^{0} - \tfrac{1}{2} \right\} \left\{ G(-1)^{1} - \tfrac{1}{2} \right\} \left\{ G(-1)^{2} - \tfrac{1}{2} \right\} \ldots\ldots \left\{ G(-1)^{(x-1):\Delta x} - \tfrac{1}{2} \right\} \Delta z_{0} \quad (*);$$

$$\log.\,(\Delta z_{(x)}) = \Sigma \left[\log. \left\{ G(-1)^{x:\Delta x} - \tfrac{1}{2} \right\} \right] + \log.\,(\Delta z_{0})$$

$$\Delta z = e^{\Sigma \left[\log. \left\{ G(-1)^{x:\Delta x} - \frac{1}{2} \right\} \right] + \log.\,(\Delta z_{0})}$$

$$z = H + \Sigma\, e^{\Sigma \left[\log. \left\{ G(-1)^{x:\Delta x} - \frac{1}{2} \right\} \right] + \log.\,(\Delta z_{0})}.$$

on déterminera deux des trois constantes G, H et Δz_{0} de manière à satisfaire à la proposée.

DES FONCTIONS ARBITRAIRES

Qui doivent compléter les intégrales.

N.° XXVIII.

J'ai développé aux élèves la théorie des constantes arbitraires, et je leur ai fait voir comment, sans ces constantes, les intégrales n'avaient qu'une acception individuelle, et n'offraient aucune ressource pour adapter les résultats du calcul à chacune des questions dont la solution conduirait à l'équation différentielle intégrée ; je leur ai fait voir encore que lorsque d'une solution complète on voulait passer à des applications particulières, la détermination des constantes se réduisait toujours, dans le cas de deux variables, à faire passer une courbe par des points donnés ; mais ces considérations, quelque générales qu'elles soient, n'offrent point encore,

---

(*) Le dernier facteur a pour exposant $\frac{(x-1)}{\Delta x}$ et non pas $x - 1$, parce que les ordonnées z_{0}, $z_{,}$, $z_{,,}$, &c. correspondent à l'extrémité de chaque Δx, et que leur nombre qui détermine celui des exposans 0, 1, 2, 3, &c. est égal au nombre de fois que Δx est contenu dans l'abcisse correspondante au dernier z, en ajoutant l'unité à ce nombre, à cause de z_{0}.

dans toute son étendue, la signification des nouvelles quantités introduites par l'intégration, et il est temps d'en entretenir les élèves; les détails où je vais entrer leur fourniront des exemples intéressans de la richesse de la langue analytique.

Comment une constante arbitraire peut devenir Fonction variable, sans cesser de satisfaire au système de différenciation d'une Équation proposée.

Soit une équation intégrale du premier ordre

$$z = \varphi\ (x) + K,$$

je la décompose en deux équations

$$u = \varphi\ (x),$$
$$t = K,$$

dans lesquelles on a, $z = u + t$; maintenant, le *module* de différenciation étant une quantité donnée et constante Δx, pour satisfaire aux deux équations précédentes, il faut qu'on ait en même temps

$$u' = \varphi\ (x + \Delta x), \text{ ou } u^{(n)} = \varphi\ (x + n\,\Delta x);$$
$$t' = t \text{ ....} \text{ ou } t^{(n)} = t.$$

En considérant, ainsi que nous l'avons fait jusqu'à présent, K comme une constante absolue, l'équation $t = K$ est celle d'une ligne droite parallèle à l'axe des x dont chaque ordonnée t s'ajoute à l'ordonnée u, correspondante au même x, de la courbe quelconque $u = \varphi x$, pour former la courbe $z = \varphi x + K$; mais ce n'est-là qu'une manière très-particulière d'envisager la chose; l'équation $t = K$ est susceptible d'un nombre indéfini de constructions différentes, dans lesquelles K sera une fonction de x, et qui toutes rempliront la condition de donner $t^{(n)} = t$; pour cela, on portera sur l'axe des x, à partir de l'extrémité d'un x quelconque, un nombre indéfini de divisions égales à Δx, on tracera un arc de courbe terminé à deux ordonnées menées par deux points de division consécutifs, et on répétera le même arc à toutes les autres divisions, en le plaçant par tout de la même manière par rapport aux Δx successifs qui lui correspondent; on aura ainsi, ou une courbe continue, ou un système d'arcs de courbe,

tel que quelque part qu'on lui mène une ordonnée que j'appelle t, cette ordonnée aura la même longueur que toutes celles qui en seront à une distance multiple de Δx. Donc $t = K$ étant l'équation de cette courbe, et K fonction de x, on aura $\Delta t = 0$, $\Delta^2 t = 0$, &c. ou $t = t' = t'' =$ &c. en prenant Δx pour *module* de la différenciation de K; donc, dans l'équation intégrale $z = \varphi\ (x) + K$, la fonction K de x doit disparaître par différenciation et compléter l'intégrale comme si elle était une constante absolue.

Il y a néanmoins une grande différence dans les résultats, en considérant K comme constante absolue ou comme fonction de x; dans le premier cas, la courbe $u = \varphi\ (x)$ est seulement transportée parallèlement à l'axe des u ou des z, d'une quantité égale à K; mais dans le second cas elle change entièrement de forme, parce qu'à chaque u il faut ajouter le t correspondant, qui, quoique le même à l'extrémité de chaque Δx, est cependant variable dans la longueur qui sépare les points extrêmes d'un Δx quelconque.

J'ai supposé que la constante K était additive, si elle faisait fonction de multiplicateur, ou si l'équation avait la forme $z = K\varphi\ (x)$; le même raisonnement que je viens de faire s'y appliquerait encore en substituant le mot *produit* au mot *somme*, c'est-à-dire en décomposant l'équation précédente en deux autres $u = \varphi\ (x)$; $t = K$, dans lesquelles on aurait $z = ut$; on voit en effet que l'équation intégrale $z = K\varphi\ (x)$ sera satisfaite si K est une fonction de x telle qu'aux valeurs $u, u', u'' \ldots u^{(n)}$ prises à l'extrémité de chaque Δx, correspondent les valeurs égales $t = t' = t'' = \ldots = t^{(n)}$.

La fonction arbitraire K *peut être continue, discontinue ou discontiguë.*

On voit par tout ce qui précède que pour transformer K de constante absolue en fonction variable, on n'est assujetti à d'autre condition sinon que cette fonction offre les mêmes valeurs à certains intervalles égaux au *module* de différenciation ; or, cette condition peut être remplie par un système de lignes quelconques qui se répéterait le même, de forme et de position, vis-à-vis chaque division de l'axe des abscisses égale à ce module ; supposant donc qu'à cet axe on ait mené une suite d'ordonnées distantes entr'elles de Δx, on pourra, d'une première ordonnée à la suivante, mener un arc de courbe d'une forme arbitraire, et le répéter entre chaque couple

d'ordonnées consécutives, sans s'embarrasser si d'une division à l'autre ces arcs ont une tangente commune, ou même si l'extrémité de l'un est liée au commencement de l'autre.

Lorsque cette construction est ainsi faite pour une division de l'axe des abscisses, elle satisfait pour toute autre division, en plaçant à volonté le point du départ, pourvu que les intervalles soient toujours égaux à Δx.

Je suppose ici que la fonction arbitraire se construit indépendamment de la courbe intégrale, ce n'est pas le cas ordinaire, et je ferai voir bientôt ce qui doit être donné dans cette courbe pour que la fonction arbitraire soit déterminée; mais il fallait faire voir d'avance toute la généralité de l'acception de K qui communique à la courbe intégrale elle-même, la possibilité d'être discontinue et discontiguë.

Intégrales des ordres supérieurs au premier, qui renferment un nombre quelconque de termes variables et de constantes arbitraires.

Si on a l'équation intégrale

$$z = K\,\varphi\,(x) + K'\,\varphi'\,(x) + K''\,\varphi''\,(x) + \&c.$$

dans laquelle le module de différenciation Δx ait comme précédemment une valeur invariable, les constantes arbitraires K, K', K'' &c. pourront encore représenter des fonctions arbitraires ayant un sens aussi étendu que dans le cas où il n'y en a qu'une seule. On peut, en effet, supposer la valeur de z décomposée en différentes couples d'équations, telles que $u = \varphi\,(x)$, $t = K$; $u' = \varphi'\,(x)$, $t' = K'$, &c., sur chacune desquelles on fera le même raisonnement qu'on a fait précédemment sur une seule; on aura donc un certain nombre de courbes $t = K$, $t' = K'$ &c. continues, discontinues ou discontiguës, dans chacune desquelles l'ordonnée menée à l'extrémité d'un x quelconque sera multiplicateur de l'ordonnée correspondante au même x, dans celle des courbes $u = \varphi\,(x)$, $u' = \varphi'\,(x)$, &c. qui lui est accouplée, et la somme de tous les produits donnera l'ordonnée z (1).

(1) L'énoncé que je donne ici, ne doit pas être regardé comme indiquant le procédé de construction le plus commode à suivre; je ne l'ai adopté que pour faciliter l'intelligence de la méthode.

Forme générale de la fonction arbitraire qui satisfait aux conditions précédentes ; cette forme est indépendante de l'équation intégrée.

Il s'agit maintenant de trouver une forme générale de fonction qui, sous toutes les modifications particulières dont les diverses questions la rendront susceptible, ait la propriété de ne point changer de valeur lorsque x s'accroît de Δx; pour cela j'observe que 2π étant la circonférence du cercle, et α un angle quelconque, on a $\sin. \alpha = \sin. (\alpha + 2\pi) = \sin. (\alpha + 4\pi) = \sin. (a + 6\pi) =$ &c. $\cos. \alpha = \cos. (\alpha + 2\pi) = \cos. (\alpha + 4\pi) =$ &c.; d'où il suit que les expressions $\sin. \frac{2\pi x}{\Delta x}$ et $\cos. \frac{2\pi x}{\Delta x}$ ne changeront point de valeur lorsque x augmentera de Δx, de $2\Delta x$, &c. et en général de $n\Delta x$, car ces expressions deviendront $\sin. \{2\pi . \frac{x}{\Delta x}\}$, $\sin. \{2\pi (\frac{x}{\Delta x} + 1)\}$, $\sin. \{2\pi (\frac{x}{\Delta x} + 2)\}$, &c.; $\cos. \{2\pi \frac{x}{\Delta x}\}$, $\cos. \{2\pi (\frac{x}{\Delta x} + 1)\}$, $\cos. \{2\pi (\frac{x}{\Delta x}) + 2\}$, &c.; la fonction K peut donc être représentée par la fonction arbitraire $\varphi \{\sin. (\frac{2\pi x}{\Delta x}), \cos. (\frac{2\pi x}{\Delta x})\}$ dont la forme générale ainsi déterminée d'avance est indépendante de l'équation intégrale, sauf à adapter à chaque question l'acception particulière du signe φ.

Application de la théorie précédente aux cas d'intégration dans lesquels on ne suppose aucune différence constante.

Euler a le premier observé que lorsque dans une équation différentielle entre deux variables, z et x par exemple, la différence de x était constante, l'intégrale devait, pour être complète, contenir une fonction arbitraire des quantités $\sin. (\frac{2\pi x}{\Delta x})$ et $\cos. (\frac{2\pi x}{\Delta x})$, la demi-circonférence dont le

rayon est l'unité, étant égale à π. *Monge* a ensuite étendu cette considération aux équations différentielles, dans lesquelles il n'y a aucune différence constante, et a donné sur cet objet un très-beau mémoire publié dans le tome IX de la collection de ceux des Savans étrangers ; il explique la propriété qu'ont les fonctions arbitraires de satisfaire aux conditions demandées, en engendrant les courbes qui les représentent par la révolution d'autres courbes, qui sont fermées, avec le périmètre $= \Delta x$ lorsque Δx est constant, et qui ont la forme de spirale lorsque Δx est variable ; je renvoie les élèves aux développemens intéressans que contient ce mémoire ; et pour ne pas trop multiplier les objets soumis à leur attention, je résoudrai le cas dont il s'agit par la théorie exposée *n.° XXVI.*

J'ai démontré dans le n.° cité, que lorsqu'on a une équation différentielle

$$f\,\{z,\ \Delta z,\ \Delta^2 z,\ \&c.\ y,\ \Delta y,\ \Delta^2 y,\ \&c.\} = 0 \ldots (1)$$

dans laquelle la relation entre y et Δy est exprimée par

$$F\,(y,\ \Delta y,\ \Delta^2 y,\ \&c.) = 0 \ldots (2),$$

l'intégrale de cette dernière équation étant, en supposant Δx constant,

$$y = F'\,(x) \ldots (3),$$

il fallait au moyen de (3), éliminer dans (1), y et ses différences, ce qui donnait

$$f'\,(z,\ \Delta z,\ \Delta^2 z,\ \&c.\ x,\ \Delta x) = 0 \ldots (4),$$

ensuite intégrer (4) pour avoir

$$z = f''\,(x) \ldots (5);$$

enfin, au moyen de (3), éliminer x de (5), ce qui donnait l'intégrale de la proposée

$$z = f'''\,(y) \ldots (6).$$

On voit sur-le-champ que la fonction arbitraire $\varphi\,\{\sin.\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)$, $\cos.\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)\}$, doit, telle que je l'ai considérée jusqu'à présent, être introduite dans l'intégrale (5) pour la compléter, qui alors deviendra

$$z = \Gamma\,(x) \ldots (5'),$$

et ensuite, au moyen de (3), substituer dans (5') la valeur de x en y, ce qui donnera pour l'intégrale complète finale

$$z = \Gamma' (y) \ldots . (6') ;$$

appliquant cette règle à l'exemple du n.° cité, où j'ai choisi l'équation différentielle

$$A z + A_{,} z_{,} + A_{,,} z_{,,} + A_{,,,} z_{,,,} + \ldots\ldots + A_{(n)} z_{(n)} = 0,$$

dans laquelle z est supposé fonction de y; la relation entre y et sa différence étant donnée par l'équation $\Delta y = y$, on trouvera pour l'intégrale de cette équation

$$z = \varrho_{,}^{\frac{\log. y}{\log. 2}} \varphi' \left\{ \sin. \left(\frac{2 \pi \log. y}{\log. 2} \right), \cos. \left(\frac{2 \pi \log. y}{\log. 2} \right) \right\} + \varrho_{,,}^{\frac{\log. y}{\log. 2}} \varphi''$$

$$\left\{ \sin. \left(\frac{2 \pi \log. y}{\log. 2} \right), \cos. \left(\frac{2 \pi \log. y}{\log. 2} \right) \right\} + \ldots\ldots\ldots +$$

$$\varrho_{(n)}^{\frac{\log. y}{\log. 2}} \varphi^{(n)} \left\{ \sin. \left(\frac{2 \pi \log. y}{\log. 2} \right), \cos. \left(\frac{2 \pi \log. y}{\log. 2} \right) \right\},$$

dans laquelle les quantités affectées des signes de fonction φ', φ'', &c. ne changent point de valeur lorsqu'à y on substitue $y + \Delta y$, c'est-à-dire $y + y$ ou $2y$, d'après le rapport entre y et Δy donné par l'équation $\Delta y = y$.

Il en sera de même des autres hypothèses sur le rapport entre y et Δy contenues dans le n.° cité.

Les fonctions arbitraires ne sont point déterminées par la seule condition que la courbe intégrale passe par des points donnés ; comment elles se déterminent.

On peut toujours, en employant les fonctions arbitraires dont je viens de m'occuper, remplir la condition de faire passer la courbe intégrale par un nombre de points donnés, mais aucune d'elles ne peut être déterminée par cette seule condition. Pour le prouver par un exemple simple, soit $z = X + k$, la fonction arbitraire étant k, soient de plus a', b' ; a'', b'' ; a''', b''', &c.,

les coordonnées des points donnés, x', u'; x''; u''; x''', u''', les coordonnées correspondantes de la courbe $u = X$, on divisera l'axe des x en intervalles égaux à Δx, et dans l'un quelconque de ces intervalles on rapportera les longueurs $b' - u'$, $b'' - u''$, $b''' - u'''$, &c. placées par rapport à l'origine de cet intervalle, de la même manière que b', b'', b''', &c. le sont par rapport à l'origine de l'intervalle où chacune d'elles se trouve respectivement; on pourra ensuite tracer un arc de courbe quelconque, avec les seules conditions qu'il passe par les extrémités de $b' - u'$, $b'' - u''$, $b''' - u'''$, &c., et qu'il n'excède point, dans le sens des x, les limites du Δx auquel il répond. Cet arc répété à tous les intervalles Δx, de la manière que j'ai indiquée précédemment, représentera la fonction arbitraire K, propre à faire passer la courbe $z = X + k$ par les points donnés, à chacun desquels on aura $z = u' + (b' - u') = b'$; $z = u'' + (b'' - u'') = b''$, &c. Mais comme pour remplir ce but on n'est assujetti qu'à tracer une courbe qui passe par des points donnés, et qu'on peut satisfaire à cette condition avec un nombre indéfini de courbes, il suit de-là que les points donnés ne suffisent pas pour déterminer la fonction arbitraire; seulement, plus ces points seront nombreux, et plus, sous un certain aspect, l'indétermination sera limitée.

Cette indétermination cessera entièrement, si la courbe intégrale est assujettie à se confondre dans une partie de son tracé, correspondante, dans le sens des x, à une longueur Δx, avec un arc de courbe quelconque donné *à priori*. En effet, la différence entre les ordonnées de cet arc de courbe et les ordonnées correspondantes de la courbe $z = X$, donneront, dans l'étendue du Δx, la fonction k, qu'il faudra ensuite répéter dans tous les Δx précédens et suivans.

Lorsque l'équation intégrale renfermera deux fonctions arbitraires, leur détermination exigera que la courbe intégrale soit assujettie à se confondre avec un arc de courbe quelconque donné *à priori*, et correspondant à $2\,\Delta x$; s'il y a trois fonctions arbitraires, l'arc de courbe correspondra à $3\,\Delta x$, et ainsi de suite.

Tout ce que je viens de dire sur la détermination des fonctions arbitraires, et qui se rapporte au cas où une des différences est constante, s'appliquera aisément à celui où les deux différences sont variables,

variables, au moyen de ce que j'ai dit dans l'article précédent et dans le *n.° XXIV.*

CONCLUSION.

Il résulte de la théorie exposée dans ce numéro, que la construction de l'intégrale d'une équation différentielle à deux variables, consiste à continuer, par un procédé uniforme, une portion de courbe plane, tracée d'une manière quelconque, et correspondante à une partie de l'axe des abscisses qui dépend du degré de l'équation différentielle ; ainsi cette équation peut être censée appartenir à toutes les courbes planes continues et discontinues qui ont une même formation ; cette propriété est analogue à celle des équations en différences partielles qui appartiennent à toutes les surfaces courbes engendrées de la même manière.

DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

N.° XXIX.

J'ai donné dans les séances dont les numéros III, IV et V offrent le résumé, les principes nécessaires pour connaître la signification et toute l'étendue des solutions que fournissent les équations à trois et un plus grand nombre de variables, et les conséquences qui résultent de l'*indépendance* d'une partie d'entre elles; les élèves ont vu que cette *indépendance* rendait absolument arbitraires les rapports entre les variations des indéterminées, et qu'ainsi étant donnée l'équation $z - \phi(x, y, t, \&c.) = 0$, dans laquelle ϕ est signe de fonction, et cette équation existant seule, on pouvait la différencier en attribuant une valeur quelconque à une des différences, Δx par exemple, et supposant les autres nulles, ce qui fournit autant d'expressions différentielles égales, séparément, à zéro, qu'il y a de variables indépendantes. On peut donc être conduit par la solution de quelques problèmes à des équations qui renferment de ces espèces de différences rapportées à une seule des variables indépendantes et desquelles il faille déduire une équation, sans différence, entre les variables. Les méthodes pour traiter ces espèces d'équations, constituent ce qu'on nomme

le calcul intégral aux différences partielles, branche d'analyse dont l'invention, postérieure de plus de 50 années à celle du calcul différentiel, n'a eu moins d'éclat, comme l'observe *Condorcet*, que parce qu'on s'est servi de signes connus pour exprimer des idées nouvelles.

De la notation des différences partielles des second, troisième, &c. ordres.

Étant donnée l'équation

$$z = f(x, y, t, \&c.),$$

j'ai donné, *n.*° *V*, la manière d'écrire les différences premières partielles

$$\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\Delta x = f\{(x + \Delta x), y, t, \&c.\} - f(x, y, t, \&c.),$$

$$\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta x = f\{x, (y \pm \Delta y), t, \&c.\} - f(x, y, t, \&c.),$$

&c.

et j'ai expliqué le sens qu'on doit donner aux signes $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$, $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$, &c. ainsi que la différence qui existait entre $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta z}{\Delta y}$; cette notation demeurant toujours la même, je puis simplifier celle des valeurs de $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$, $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$, &c. en exprimant que z est fonction de x, y, t, &c. de la même manière que j'ai exprimé dans les numéros précédens qu'il était fonction de x seul. Ainsi $z_{(x)}$ désignant une fonction de x, une fonction z de x et y sera désignée par ${}_{(y)}z_{(x)}$; si elle renferme x, y et t, on écrira ${}_{(y)}z^{(t)}_{(x)}$. Il est inutile pour les objets d'application que je mettrai par la suite sous les yeux des élèves, d'aller au-delà de trois variables indépendantes. D'après cela, les différences de x, y et t étant supposées égales à l'unité (ce qui, *n.*° *XXVI*, ne limite en rien la généralité des résultats), ${}_{(y)}z^{(t)}_{(x+1)}$ exprimera que dans ${}_{(y)}z^{(t)}_{(x)}$ on a substitué $x + 1$ à x, et ${}_{(y)}z^{(t)}_{(x+2)}$, ${}_{(y)}z^{(t)}_{(x+3)}$, &c. exprimeront les substitutions, dans la même fonction, de $x+2$, $x+3$, &c. au lieu de x. On fera un raisonnement analogue sur les variations de y et

de t. Les différences partielles premières pourront donc s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) = {}_{(y)}z^{(t)}_{(x+1)} - {}_{(y)}z^{(t)}_{(x)}$$
$$\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right) = {}_{(y+1)}z^{(t)}_{(x)} - {}_{(y)}z^{(t)}_{(x)}$$
$$\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right) = {}^{(y)}z^{(t+1)}_{(x)} - {}_{(y)}z^{(t)}_{(x)}$$

Je continue à mettre Δx, Δy et Δt au-dessous de Δz, entre les parenthèses, quoique ces différences soient égales à l'unité, afin qu'on puisse, dans tous les cas, savoir par rapport à quelle variable on a différencié.

Si on différencie une 2.e fois par rapport à Δx, on aura une différence partielle 2.e qui s'exprimera par $\left(\frac{\Delta^2 z}{(\Delta x)^2}\right)$ et qui aura pour valeur

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{(\Delta x)^2}\right) = {}_{(y)}z^{(t)}_{(x+2)} - 2\,{}_{(y)}z^{(t)}_{(x+1)} + {}_{(y)}z^{(t)}_{(x)}.$$

Les différences partielles des ordres supérieurs, par rapport à x, se désigneront par $\left(\frac{\Delta^3 z}{(\Delta x)^3}\right)$, $\left(\frac{\Delta^4 z}{(\Delta x)^4}\right)$ &c., et leurs expressions en valeurs variées de ${}_{(y)}z^{(t)}_{(x)}$ se déduiront quant aux coëfficiens dépendant de l'ordre de la différence et aux numéros x, $x+1$, $x+2$, &c. des formules du *n.° VII*. Le même procédé et une notation analogue s'appliquent aux deux autres variables lorsqu'on différencie successivement par rapport à chacune d'elles en particulier.

Les différences partielles étant fonctions des variables indépendantes, peuvent elles-mêmes se différencier partiellement ; si donc on différencie par rapport à y ou à t l'une des expressions $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$, $\left(\frac{\Delta^2 z}{(\Delta x)^2}\right)$, &c. les résultats se désigneront respectivement par $\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta x\,\Delta t}\right)$, $\left(\frac{\Delta^3 z}{(\Delta x)^2\,\Delta t}\right)$, &c. ou par $\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta x\,\Delta t}\right)$, $\left(\frac{\Delta^3 z}{(\Delta x)^2\,\Delta t}\right)$, &c. les quantités $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$, $\left(\frac{\Delta^2 z}{(\Delta y)^2}\right)$, &c. $\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$, $\left(\frac{\Delta^2 z}{(\Delta t)}\right)$, &c. fourniront les expressions

analogues $\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta y\,\Delta x}\right)$, $\left(\frac{\Delta^3 z}{(\Delta y)^2\,\Delta x}\right)$, &c., $\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta y\,\Delta t}\right)$,

$\left(\frac{\Delta^3 z}{(\Delta y)^2\,\Delta t}\right)$, &c.; $\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta t\,\Delta x}\right)$, $\left(\frac{\Delta^3 z}{(\Delta t)^2\,\Delta x}\right)$, &c.,

$\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta t\,\Delta y}\right)$, $\left(\frac{\Delta^3 z}{(\Delta t)^2\,\Delta y}\right)$, &c. $\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta t\,\Delta x}\right)$, $\left(\frac{\Delta^3 z}{(\Delta t)^2\,\Delta x}\right)$, &c. &c.

Équations de condition, ou *Quantités identiques données par les différenciations partielles.*

En appliquant la notation précédente aux différences partielles des valeurs de $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$, $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$ et $\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$ données précédemment, on aura

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta x\,\Delta y}\right) = {}_{(y+1)}z^{(t)}_{(x+1)} - {}_{(y+1)}z^{(t)}_{(x)} - {}_{(y)}z^{(t)}_{(x+1)} + {}_{(y)}z^{(t)}_{(x)};$$

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta x\,\Delta t}\right) = {}_{(y)}z^{(t+1)}_{(x+1)} - {}_{(y)}z^{(t+1)}_{(x)} - {}_{(y)}z^{(t)}_{(x+1)} + {}_{(y)}z^{(t)}_{(x)}$$

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta y\,\Delta x}\right) = {}_{(y+1)}z^{(t)}_{(x+1)} - {}_{(y)}z^{(t)}_{(x+1)} - {}_{(y+1)}z^{(t)}_{(x)} + {}_{(y)}z^{(t)}_{(x)};$$

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta y\,\Delta t}\right) = {}_{(y+1)}z^{(t+1)}_{(x)} - {}_{(y)}z^{(t+1)}_{(x)} - {}_{(y+1)}z^{(t)}_{(x)} + {}_{(y)}z^{(t)}_{(x)}$$

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta t\,\Delta x}\right) = {}_{(y)}z^{(t+1)}_{(x+1)} - {}_{(y)}z^{(t)}_{(x+1)} - {}_{(y)}z^{(t+1)}_{(x)} + {}_{(y)}z^{(t)}_{(x)};$$

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta t\,\Delta y}\right) = {}_{(y+1)}z^{(t+1)}_{(x)} - {}_{(y+1)}y^{(t)}_{(x)} - {}_{(y)}z^{(t+1)}_{(x)} + {}_{y)}z^{(t)}_{(x)}.$$

Pour avoir ces différences, on substitue dans les 2.[es] membres des équations qui donnent les valeurs de $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$, $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$, $\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$, les quantités $x + 1$, $y + 1$, $t + 1$, respectivement à la place des x, y, t, et on retranche les valeurs primitives des valeurs variées.

Si on prend garde aux 2.[es] membres des équations précédentes qui

renferment les mêmes termes, on aura les quantités égales ou identiques.

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}\right) = \left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta y \Delta x}\right); \left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta t}\right) = \left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta t \Delta x}\right);$$

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta y \Delta t}\right) = \left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta t \Delta y}\right).$$

Ces équations de condition, qui sont de la plus grande importance dans la théorie du calcul intégral, se déduisent, comme on voit, très-naturellement de la différenciation écrite avec les signes analytiques que je viens d'établir, avantage qui résulte de ce que ces signes permettent de distinguer dans le résultat tous les termes identiques des différentielles. On aura aisément les équations de condition analogues pour les ordres supérieurs.

Les équations différentielles dont nous nous sommes occupés depuis le *n.° XXII*, ont, en général, été écrites en employant les quantités $z_{(x)}$, $z_{(x+1)}$, &c. au lieu de celles affectées du signe Δ, les premières pouvant aisément être substituées aux secondes par les formules du *n.° VII*; il sera commode d'employer le même expédient pour les équations de trois ou quatre variables; ainsi z étant fonction de y et de x, au lieu de l'équation $(a + b - 1) z + a\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right) - \Delta z = 0$, on écrira ${}_{(y+1)}z_{(x+1)} = a\,{}_{(y+1)}z_{(x)} + b\,{}_{(y)}z_{(x)}$; au lieu de $(a + b - 1) z - 2a\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right) + a\left(\frac{\Delta^2 z}{(\Delta y)^2}\right) - \Delta z = 0$, on écrira ${}_{(y+1)}z_{(x+1)} = a\,{}_{(y+2)}z_{(x)} + b\,{}_{(y)}z_{(x)}$, &c. Cette notation, souvent plus simple que l'autre, a toujours l'avantage de faire voir la correspondance réciproque des termes ou plutôt des suites que représentent les équations.

Des Suites à double entrée, exprimées par les équations différentielles à trois variables; fonctions arbitraires dont le calcul de ces Suites exige la détermination.

J'ai fait voir, *n°. III*, comment toutes les solutions d'une équation à trois variables pouvaient former une table à double entrée; en appliquant

les mêmes raisonnemens aux diverses valeurs dont ${}_{(y)}z_{(x)}$ peut être susceptible, on pourra les ranger de la manière suivante :

${}_{(0)}z_{(0)}$	${}_{(0)}z_{(1)}$	${}_{(0)}z_{(2)}$	${}_{(0)}z_{(3)}$	${}_{(0)}z_{(4)}$	&c... ${}_{(0)}z_{(x)}$	${}_{(0)}z_{(x+1)}$	&c.
${}_{(1)}z_{(0)}$	${}_{(1)}z_{(1)}$	${}_{(1)}z_{(2)}$	${}_{(1)}z_{(3)}$	${}_{(1)}z_{(4)}$	&c... ${}_{(1)}z_{(x)}$	${}_{(1)}z_{(x+1)}$	&c.
${}_{(2)}z_{(0)}$	${}_{(2)}z_{(1)}$	${}_{(2)}z_{(2)}$	${}_{(2)}z_{(3)}$	${}_{(2)}z_{(4)}$	&c... ${}_{(2)}z_{(x)}$	${}_{(2)}z_{(x+1)}$	&c.
${}_{(3)}z_{(0)}$	${}_{(3)}z_{(1)}$	${}_{(3)}z_{(2)}$	${}_{(3)}z_{(3)}$	${}_{(3)}z_{(4)}$	&c... ${}_{(3)}z_{(x)}$	${}_{(3)}z_{(x+1)}$	&c.
${}_{(4)}z_{(0)}$	${}_{(4)}z_{(1)}$	${}_{(4)}z_{(2)}$	${}_{(4)}z_{(3)}$	${}_{(4)}z_{(4)}$	&c... ${}_{(4)}z_{(x)}$	${}_{(4)}z_{(x+1)}$	&c.
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
${}_{(y)}z_{(0)}$	${}_{(y)}z_{(1)}$	${}_{(y)}z_{(2)}$	${}_{(y)}z_{(3)}$	${}_{(y)}z_{(4)}$	&c... ${}_{(y)}z_{(x)}$	${}_{(y)}z_{(x+1)}$	&c.
${}_{(y+1)}z_{(0)}$	${}_{(y+1)}z_{(1)}$	${}_{(y+1)}z_{(2)}$	${}_{(y+1)}z_{(3)}$	${}_{(y+1)}z_{(4)}$	&c... ${}_{(y+1)}z_{(x)}$	${}_{(y+1)}z_{(x+1)}$	&c.
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	

Les termes pris dans le sens vertical, varient par rapport à y, dans le sens horizontal par rapport à x, et les différences complètes sont données en soustrayant l'un de l'autre deux termes pris dans une direction diagonale : or une équation aux différences partielles à trois variables, exprimant la relation entre plusieurs termes de la forme ${}_{(y+m)}z_{(x+n)}$, les nombres m et n désignent les positions respectives de ces termes dans le tableau ci-dessus, et l'équation différentielle suffit toujours pour calculer la table entière lorsque, par l'état de la question, on connaît *à priori* un nombre suffisant de suites formant un même nombre de colonnes horizontales ou verticales. Cette propriété répond à celle que j'ai fait remarquer *(n.° XXII et suiv.)* dans les équations différentielles à deux variables, au moyen desquelles on peut calculer ou construire les séries entières, dont les intégrales sont les termes généraux, lorsqu'on connaît d'avance un nombre de termes consécutifs de ces séries égal à l'indice de l'ordre de l'équation.

Soit, par exemple, l'équation ${}_{(y+1)}z_{(x+1)} = 2\,{}_{(y+1)}z_{(x)} + 2\,{}_{(y)}z_{(x)}$; cette équation exprime qu'un terme quelconque du tableau est égal au double de celui qui est à sa gauche sur le même rang horizontal, plus le double de celui qui est immédiatement au-dessus de ce dernier dans la même bande verticale, et il est évident que si on se donne à volonté une suite indéfinie de nombres composant une bande quelconque, ou verticale ou horizontale, on pourra, par de simples additions, former toutes les bandes à droite de l'une, ou au-dessus de l'autre.

Il faut bien observer que la suite qu'on se donne est absolument arbitraire; les termes qui la composent peuvent être, ou non, liés par une loi entr'eux, la table qu'on en déduira n'en satisfera pas moins à l'équation proposée.

Je remarque encore que pour former les colonnes verticales à gauche de la colonne génératrice, si cest une colonne verticale qu'on s'est donnée, ou les bandes horizontales au-dessous de la génératrice, si on s'est donné une série horizontale, il faudra, dans chacune des nouvelles colonnes ou bandes, se donner un terme arbitraire.

En général, soit une équation

$$A_{(y)}\,z_{(x)} + B_{(y-a)}\,z_{(x-\alpha)} + C_{(y-b)}\,z_{(x-\beta)} + \dots\dots + N_{(y-n)}\,z_{(x-\mu)} = 0,$$

dans laquelle $y - n$ et $x - \mu$ sont les plus petits indices de z, les coëfficiens A, B, C........ N étant supposés constans. On voit que les termes dont cette équation exprime la relation, seront disposés sur le tableau de manière que les deux termes les plus distans entr'eux, dans le sens horizontal, seront l'un dans la colonne verticale numérotée x, et l'autre dans la colonne verticale numérotée $x - \mu$; il y aura donc de l'un à l'autre un nombre μ de colonnes verticales. De plus, les deux termes les plus distans, dans le sens vertical, seront, l'un dans la bande horizontale numérotée y, et l'autre dans la bande horizontale numérotée $y - n$; il y aura donc de l'un à l'autre un nombre n de bandes horizontales. Il suit de-là qu'en supposant a, b, &c. α, β, &c. des nombres entiers positifs, la colonne verticale, dans laquelle se trouve ${}_{(y)}z_{(x)}$ sera donnée par un nombre μ des colonnes verticales consécutives qui sont à sa gauche; et que la colonne horizontale, dans laquelle se trouve ce même terme ${}_{(y)}z_{(x)}$,

sera donnée par un nombre n des bandes horizontales consécutives qui se trouvent au-dessus de lui. Ceci rend très-sensible l'analogie dont j'ai déjà parlé entre les équations à deux variables et celles à trois, et on voit comment les constantes arbitraires génératrices dans les premières deviennent des fonctions arbitraires dans celles-ci.

Puisque toute la table peut se calculer, ou avec μ colonnes verticales consécutives, ou avec n colonnes horizontales consécutives, le plus petit nombre des fonctions arbitraires nécessaire pour la formation des colonnes ou des bandes, en avant, sera égal au plus petit des nombres μ et n, ou au plus grand indice de variation de ${}_{(y)}z_{(x)}$ dans le sens où cette quantité varie le moins; quant aux colonnes ou bandes en arrière, il faut faire attention à ce que j'ai observé pour l'équation

$$ {}_{(y+1)}z_{(x+1)} = 2 \cdot {}_{(y+1)}z_{(x)} + 2\, {}_{(y)}z_{(x)}, $$

relativement aux termes arbitraires qu'il faut introduire lorsqu'on veut calculer les bandes en arrière. Au surplus, je le répète, lorsqu'on se restreint à la condition unique de satisfaire à l'équation différentielle, les termes qui composent les colonnes ou les bandes génératrices peuvent n'être assujetties à aucune loi entr'eux, soit dans le même rang, soit d'un rang à l'autre; on peut les choisir au hasard, et les colonnes ou les bandes qu'on en déduira n'en fourniront pas moins des solutions de la proposée.

Intégration complète de l'Équation générale aux différences partielles, dans laquelle x *et* y *varient de la même manière.*

Soit l'équation

$$ {}_{(y)}A_{(x)}\ {}_{(y)}z_{(x)} + {}_{(y)}A'_{(x)}\ {}_{(y+1)}z_{(x+1)} + {}_{(y)}A''_{(x)}\ {}_{(y+2)}z_{(x+2)} + \ldots + {}_{(y)}A^{(n)}_{(x)}\ {}_{(y+n)}z_{(x+n)} = 0, $$

on voit que cette équation exprime la relation entre un nombre $n+1$ de termes qui se suivent diagonalement dans le tableau, en s'écartant continuellement de la première colonne verticale à gauche et de la bande supérieure horizontale. Supposons qu'une direction diagonale quelconque, remplissant ces deux conditions, rencontre la bande horizontale supérieure au carreau ${}_{(0)}z_{(k)}$, il arrivera que dans toute cette direction diagonale le

numéro

numéro d'un carreau quelconque, pris dans le sens horizontal, surpassera de k le numéro du même carreau pris dans le sens vertical, c'est-à-dire, qu'on aura $x - k = y$; on voit en effet que si dans la proposée on substitue à y et x deux nombres qui diffèrent entr'eux de k, les indices de variation de chaque z différeront de la même quantité k. Éliminant donc y, au moyen de l'équation $y = x - k$, on aura une fonction de x égale à zéro, qui pourra être mise sous la forme

$$a_{(x)} u_{(x)} + a'_{(x)} u_{(x+1)} + a''_{(x)} u_{(x+2)} + \ldots + a^{(n)}_{(x)} u_{(x+n)} = 0,$$

équation de l'espèce de celle que nous avons appris à intégrer, lorsque la chose est possible, et qui, traitée par les méthodes du *n.°* XXIII, donne une intégrale de la forme

$$u_{(x)} = C' X' + C'' X'' + C''' X''' + \ldots + C^{(n)} X^{(n)},$$

les quantités C, C', C'', &c. étant des constantes arbitraires qui peuvent renfermer k, et X, X', X'', &c. des fonctions de x qui renferment aussi k. Maintenant on peut dans ces quantités X, X', &c. substituer pour k sa valeur $x - y$, et elles deviendront des fonctions de x et d'y, que je nommerai, respectivement, ${}_{(y)}Z_{(x)}$, ${}_{(y)}Z'_{(x)}$, ${}_{(y)}Z''_{(x)}$, &c. et faisant attention que $u_{(x)}$ redevient ${}_{(y)}z_{(x)}$ lorsqu'on en élimine k, on aura

$${}_{(y)}z_{(x)} = C' \,{}_{(y)}Z'_{(x)} + C'' \,{}_{(y)}Z''_{(x)} + C''' \,{}_{(y)}Z'''_{(x)} + \ldots + C^{n} \,{}_{(y)}Z^{(n)}_{(x)},$$

où k n'est plus contenu dans C, C' C'', &c.; cette quantité k a été supposée constante, parce qu'on considérait la suite des termes donnée par une seule direction diagonale, dont le carreau supérieur était ${}_{(o)}z_{(k)}$; mais pour appliquer l'équation finale à une direction diagonale quelconque, c'est-à-dire l'étendre à tout le tableau, il faut donner à k différentes valeurs, ce qui se réduit à considérer C, C', C'', &c. comme des fonctions d'une variable k, ou parce que $k = x - y$, à considérer C, C', &c. comme des fonctions de $x - y$: on aura donc pour intégrale complète

$${}_{(y)}z_{(x)} = {}_{(y)}Z'_{(x)} \varphi(x-y) + {}_{(y)}Z''_{(x)} \varphi'(x-y) + {}_{(y)}Z'''_{(x)} \varphi''(x-y) + \ldots$$
$$+ {}_{(y)}Z^{(n)}_{(x)} \varphi^{(n)}(x-y).$$

Les fonctions arbitraires se détermineront en faisant un nombre n d'hypothèses particulières, soit sur x, soit sur y, et des valeurs de ${}_{(y)}z_{(x)}$ qui en résulteront.

INTÉGRATION, EN DIFFÉRENCES PARTIELLES,

De l'équation ${}_{(y)}u_{(n)} = n\,[{}_{(y-1)}u_{(n)} + {}_{(y-1)}u_{(n-1)}]$, *en y introduisant les conditions relatives à la détermination des coëfficiens des différences d'un ordre quelconque d'une fonction* z *de* x; *Méthodes et tables pour le calcul abrégé de ces coëfficiens et pour celui des différenciations en général.*

N.° XXX. L'EXEMPLE d'intégration que je donne aux élèves réunit à l'avantage d'être un exercice utile de calcul, celui de fournir des formules très-commodes pour simplifier et abréger considérablement les opérations des différenciations de tous les ordres. Sous ce point de vue, on doit avoir, comme je le ferai voir bientôt,

$$ {}_{(0)}u_{(0)} = 1;\ {}_{(0)}u_{(1)} = 0;\ {}_{(0)}u_{(2)} = 0,\ \&c.\ldots {}_{(0)}u_{(n)} = 0; $$

$$ {}_{(1)}u_{(0)} = 0;\ {}_{(2)}u_{(0)} = 0,\ \&c.\ldots {}_{(y)}u_{(0)} = 0. $$

Les conditions de la question donnent donc une première bande horizontale et une première colonne verticale composées de zéros, à l'exception de la case qui se trouve à leur intersection qui contient l'unité; avec ces données on peut aisément, au moyen de l'équation ${}_{(y)}u_{(n)} = n\,[{}_{(y-1)}u_{(n)} + {}_{(y-1)}u_{(n-1)}]$, construire la table suivante :

TABLE A.

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	&c.
$y=0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	&c.
$y=1$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	&c.
$y=2$	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	&c.
$y=3$	0	1	6	6	0	0	0	0	0	0	0	&c.
$y=4$	0	1	14	36	24	0	0	0	0	0	0	&c.
$y=5$	0	1	30	150	240	120	0	0	0	0	0	&c.
$y=6$	0	1	62	540	1560	1800	720	0	0	0	0	&c.
$y=7$	0	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	0	0	0	&c.
$y=8$	0	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320	0	0	&c.
$y=9$	0	1	510	18150	186480	834120	1905120	2328480	1451520	362880	0	&c.
$y=10$	0	1	1022	55980	818520	5103000	16435440	29635200	30240000	16329600	3628800	&c.
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

On voit aisément, par la génération des termes de cette table, 1.° que le premier nombre plus grand que zéro de chaque colonne verticale, se trouve à la case dont les indices vertical et horizontal sont les mêmes, c'est-à-dire, qu'on a ${}_{(0)}u_{(n)} = 0$, ${}_{(1)}u_{(n)} = 0$, ${}_{(2)}u_{(n)} = 0$, &c. .... ${}_{(n-1)}u_{(n)} = 0$, et que les valeurs significatives ne commencent qu'à ${}_{(n)}u_{(n)}$, et ont lieu pour les valeurs $y = n$, $y = n + 1$, $y = n + 2$, &c. ou pour les termes ${}_{(n)}u_{(n)}$, ${}_{(n+1)}u_{(n)}$, ${}_{(n+2)}u_{(n)}$, &c. .... ${}_{(n+\omega)}u_{(n)}$; 2.° que le premier terme significatif de la colonne verticale du numéro n est égal au produit $1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots n$, en sorte qu'on a généralement ${}_{(n)}u_{(n)} = 2.3.4 \ldots\ldots n$.

Ces propriétés serviront à intégrer l'équation ${}_{(y)}u_{(n)} = n\,[{}_{(y-1)}u_{(n)} + {}_{(y-1)}u_{(n-1)}]$, c'est-à-dire, à trouver une fonction de n qui représente la valeur générale de ${}_{(y)}u_{(n)}$ ou de ${}_{(n+\omega)}u_{(n)}$; et pour y parvenir, je vais d'abord déterminer la relation qui existe entre les termes consécutifs d'une même bande verticale, ou chercher une équation entre les quantités ${}_{(y)}u_{(n)}$, ${}_{(y-1)}u_{(n)}$, ${}_{(y-2)}u_{(n)}$, ${}_{(y-3)}u_{(n)}$ &c. .... ${}_{(n)}u_{(n)}$.

La colonne verticale, *n.° 1*, donne

$$ {}_{(1)}u_{(1)} = 1,\ {}_{(2)}u_{(1)} = 1,\ {}_{(3)}u_{(1)} = 1 \ldots\ldots\ldots {}_{(y)}u_{(1)} = 1, $$

on a ensuite

$$ {}_{(y)}u_{(2)} = 2\,({}_{(y-1)}u_{(2)} + {}_{(y-1)}u_{(1)}) = 2 \cdot {}_{(y-1)}u_{(2)} + 2. $$

En observant que ${}_{(y-1)}u_{(1)} = 1$.

$$ {}_{(y)}u_{(3)} = 3\,({}_{(y-1)}u_{(3)} + {}_{(y-1)}u_{(2)}) = (2 + 3)\,{}_{(y-1)}u_{(3)} - 2.3\,{}_{(y-2)}u_{(3)} + 2.3. $$

En éliminant d'abord ${}_{(y-1)}u_{(2)}$, et ensuite ${}_{(y-2)}u_{(2)}$

$$ {}_{(y)}u_{(4)} = 4\,({}_{(y-1)}u_{(4)} + {}_{(y-1)}u_{(3)}) = (2 + 3 + 4)\,{}_{(y-1)}u_{(4)} - (2.3 + 2.4 + 3.4)\,{}_{(y-2)}u_{(4)} + 2.3.4\,{}_{(y-3)}u_{(4)} + 2.3.4 $$

$$ {}_{(y)}u_{(5)} = (2 + 3 + 4 + 5)\,{}_{(y-1)}u_{(5)} - (2.3 + 2.4 + 2.5 + 3.4 + 3.5 + 4.5)\,{}_{(y-2)}u_{(5)} + (2.3.4 + 2.3.5 + 2.4.5 + 3.4.5)\,{}_{(y-3)}u_{(5)} - 2.3.4.5\,{}_{(y-4)}u_{(5)} + 2.3.4.5, $$

et généralement désignant par $A'_{(n)}$, $A''_{(n)}$, $A'''_{(n)}$, &c. respectivement, la

somme des nombres $2, 3, 4, \ldots\ldots n$, celle de leurs produits deux à deux, celle de leurs produits trois à trois, &c. on aura

$$ {}_{(y)}u_{(n)} = A'_{(n)}\,{}_{(y-1)}u_{(n)} - A''_{(n)}\,{}_{(y-2)}u_{(n)} + A'''_{(n)}\,{}_{(y-3)}u_{(n)} - \&c. \ldots\ldots $$
$$ \pm\, 2.3.4\ldots n_{(y-n-1)}u_{(n)} + 2.3.4\ldots n \ldots (H), $$

équation qui donne la relation entre un nombre n de termes consécutifs de la colonne verticale, numéro n, et qui comprend en outre le terme ${}_{(n)}u_{(n)} = 2.3.4\ldots n$. Ainsi la valeur de ${}_{(y)}u_{(n)}$ sera déduite de n termes quand on aura $y > 2n$; mais lorsqu'on aura $y < 2n$, elle ne sera donnée que pour $y - n$ termes, parce qu'il y aura un nombre $2n - y$ termes supérieurs à ${}_{(n)}u_{(n)}$ qui seront zéro par eux-mêmes.

L'intégration de l'équation précédente exige qu'on ait un nombre $n - 1$ de solutions, condition qui est remplie par les valeurs ${}_{(n)}u_{(n)} = 2.3.4\ldots n$, ${}_{(n-1)}u_{(n)} = 0$, ${}_{(n-2)}u_{(n)} = 0$, &c.; posant donc d'après la formule (H) les équations

$$ {}_{(n)}u_{(n)} = 2.3\ldots\ldots n, $$
$$ {}_{(n+1)}u_{(n)} = A'_{(n)}\,{}_{(n)}u_{(n)} + 2.3.4\ldots\ldots n, $$
$$ {}_{(n+2)}u_{(n)} = A'_{(n)}\,{}_{(n+1)}u_{(n)} - A''_{(n)}\,{}_{(n)}u_{(n)} + 2.3.4\ldots\ldots n, $$
$$ {}_{(n+3)}u_{(n)} = A'_{(n)}\,{}_{(n+2)}u_{(n)} - A''_{(n)}\,{}_{(n+1)}u_{(n)} + A'''_{(n)}\,{}_{(n)}u_{(n)} + 2.3.4\ldots\ldots n, $$
$$ \&c. \qquad \&c. $$
$$ {}_{(n+\omega)}u_{(n)} = A'_{(n)}\,{}_{(n+\omega-1)}u_{(n)} - A''_{(n)}\,{}_{(n+\omega-2)}u_{(n)} + A'''_{(n)}\,{}_{(n+\omega-3)}u_{(n)} - \&c. \ldots $$
$$ \pm A^{\omega}_{(n)}\,{}_{(n)}u_{(n)} + 2.3.4\ldots\ldots n, $$

on pourra, par des éliminations successives, faire disparaître dans la valeur de ${}_{(n+\omega)}u_{(n)}$ les quantités ${}_{(n+\omega-1)}u_{(n)}$, ${}_{(n+\omega-2)}u_{(n)}$, &c. en observant que le 2.e membre de chaque équation contient toujours tous les u de l'équation précédente. On pourra donc obtenir une équation finale dans laquelle ${}_{(n+\omega)}u_{(n)}$ sera exprimée par $A'_{(n)}$, $A''_{(n)}$, $A'''_{(n)}$, &c.; mais ces quantités sont fonctions de n, et j'ai fait voir, n.° XVI, comment on en trouvait la valeur; ainsi, désignant l'intégrale de ${}_{(y)}u_{(n)} = \{ {}_{(y-1)}u_{(n)} + {}_{(y-1)}u_{(n-1)} \}$ ou la valeur du terme général ${}_{(n+\omega)}u_{(n)}$ qui exprime toutes les valeurs au-dessus de zéro, par

$$ {}_{(n+\omega)}u_{(n)} = \mathrm{f}\,(n), $$

on aura tout ce qu'il faut pour calculer $\mathrm{f}\,(n)$. Les objets d'application

de cette théorie supposent que les valeurs successives sont divisées respectivement par $1.2.3\ldots n$, $1.2.3\ldots(n+1)$ $1.2.3\ldots(n+2)$, &c.... $1.2.3\ldots(n+\omega)$, on aura, en disposant les formules sous ce point de vue,

$$
\begin{aligned}
{}_{(n)}u_{(n)} &= 1.2.3\ldots\ldots\ldots n,\\
{}_{(n+1)}u_{(n)} &= \frac{n}{1.2}\,.\,1.2.3\ldots\ldots\ldots(n+1),\\
{}_{(n+2)}u_{(n)} &= \frac{n(3n+1)}{1.2.3.4}\,1.2.3\ldots\ldots\ldots(n+2),\\
{}_{(n+3)}u_{(n)} &= \frac{n^2(n+1)}{1.2.3.4.2}\,1.2.3\ldots\ldots\ldots(n+3),\\
{}_{(n+4)}u_{(n)} &= \frac{n}{1.2.3.4.5}\,.\,\frac{15n^3+30n^2+5n-2}{48}\,1.2.3\ldots(n+4),\\
{}_{(n+5)}u_{(n)} &= \frac{n^2}{1.2.3.4.5.6}\,.\,\frac{3n^3+10n^2+5n-2}{16}\,1.2.3\ldots(n+5),\\
&\quad \&c. \qquad\qquad\qquad \&c.
\end{aligned}
$$

Application de ce qui précède à la détermination et au calcul des coëfficiens des différences d'un ordre quelconque d'une fonction.

J'AI fait voir, *n.*° VIII, que la différence n^e de x^k avait pour valeur

$$
\Delta^{(n)}x^k = \left\{
\begin{aligned}
& x^{k-n}\,(\Delta x)^n \Big\{ \frac{k.k-1.k-2\ldots\ldots[k-(n-2)]\,[k-(n-1)]}{1.2.3\ldots\ldots n} \\
&\qquad \Big[n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n.n-1}{1.2}(n-2)^n - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-3)^n + \&c.\Big]\Big\} \\
& + x^{k-n-1}\,(\Delta x)^{n+1} \Big\{ \frac{k.k-1.k-2\ldots\ldots[k-(n-1)]\,[k-n]}{1.2.3\ldots\ldots(n+1)} \\
&\qquad \Big[n^{n+1} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+1} + \frac{n.n-1}{1.2}(n-2)^{n+1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-3)^{n+1} + \&c.\Big]\Big\} \\
& + x^{k-n-2}\,(\Delta x)^{n+2} \Big\{ \frac{k.k-1.k-2\ldots\ldots[k-n]\,[k-(n+1)]}{1.2.3\ldots\ldots(n+2)} \\
&\qquad \Big[n^{n+2} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+2} + \frac{n.n-1}{1.2}(n-2)^{n+2} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-3)^{n+2} + \&c.\Big]\Big\} \\
& + \&c.
\end{aligned}
\right.
$$

et je démontrerai dans le calcul différentiel qu'en général la différence n^e d'une fonction z de x a pour valeur

$$\Delta^{(n)} z = \begin{cases} \frac{X_{(n)}}{1.2.3\ldots n}(\Delta x)^{n} \ \{ n - \frac{n}{1}(n-1)^{n} + \frac{n.n-1}{1.2}(n-2)^{n} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-3)^{n} + \&c. \\ + \frac{X(n+1)}{1.2.3\ldots(n+1)}(\Delta x)^{n+1} \ \{ n^{n+2} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+1} + \frac{n.n-1}{1.2}(n-2)^{n+1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-3)^{n+1} + \&c. \\ + \frac{X(n+2)}{1.2.3\ldots(n+2)}(\Delta x)^{n+2} \ \{ n^{+n2} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+2} + \frac{n.n-1}{1.2}(n-2)^{n+2} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-3)^{n+2} + \&c. \\ + \&c. \end{cases}$$

les quantités $X_{(n)}$, $X_{(n+1)}$, $X_{)n+2)}$, &c. étant des fonctions de x données par les *différentielles* n^e, $(n+1)^e$, $(n+2)^e$, &c. de z, ainsi qu'on le verra.

Les coëfficiens des puissances de x et de Δx dans la première des deux formules précédentes, peuvent être divisés chacun en deux parties, la première de la forme

$$\frac{k.k-1.k-2\ldots\ldots[k-(y-1)]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y},$$

qu'on peut représenter par le signe général ${}_{(y)}t_{(k)}$.

La deuxième de la forme

$$n^y + \frac{n}{1}(n-1)^y + \frac{n.n-1}{1.2}(n-2)^y - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-3)^y + \&c.$$

qui est commune à $\Delta^{(n)} x^k$ et à $\Delta^{(n)} z$, et qu'on peut représenter par le signe général ${}_{(y)}u_{(n)}$. D'après cela les deux formules précédentes de différence se changeront en

$$\Delta^{(n)} x^k = {}_{(n)}t_{(k)}\ {}_{(n)}u_{(n)}\ x^{k-n}(\Delta x)^n + {}_{(n+1)}t_{(k)}\ {}_{(n+1)}u_{(n)}\ x^{k-n-1} (\Delta x)^{n+1} + {}_{(n+2)}t_{(k)}\ {}_{(n+2)}u_{(n)}\ x^{k-n-2}(\Delta x)^{n+2} + \&c.$$

$$\Delta^{(n)} z = \frac{X_{(n)}}{1.2.3\ldots n}(\Delta x)^n\ {}_{(n)}u_{(n)} + \frac{X_{(n+1)}}{1.2.3\ldots(n+1)}(\Delta x)^{n+1}\ {}_{(n+1)}u_{(n)} + \frac{X_{(n+2)}}{1.2.3\ldots(n+2)}(\Delta x)^{n+2}\ {}_{(n+2)}u_{(n)} + \&c.$$

La série des termes ${}_{(n)}t_{(k)}$, ${}_{(n+1)}t_{(k)}$, ${}_{(n+2)}t_{(k)}$, &c. se rapporte aux nombres figurés de différens ordres dont j'ai parlé *n.*os VIII et XVII; celle des termes ${}_{(n)}u_{(n)}$, ${}_{(n+1)}u_{(n)}$, &c. se rapporte aux nombres donnés par l'équation ${}_{(y)}u_{(n)} = n\,({}_{(y-1)}u_{(n)} + {}_{(y-1)}u_{(n-1)})$, comme je le démontrerai bientôt; on peut donc, au moyen de la table *A* et d'une table

des nombres figurés, obtenir très-aisément les coëfficiens des valeurs de $\Delta^{(n)}\, x^{(k)}$ et $\Delta^n \,.\, z$.

Formation de la Table des termes qui dépendent des nombres figurés.

L'expression $\dfrac{k\,.\,k-1\,.\,k-2\,\ldots\ldots\,[k-(y-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,y}$, représentée par le signe ${}_{(y)}t_{(k)}$, fournit, d'après ce que j'ai démontré sur les suites de nombres figurés, *n.*os *VIII* et *XVII*, l'équation générale

$$ {}_{(y+1)}t_{(k+1)} = {}_{(y+1)}t_{(k)} + {}_{(y)}t_{(k)}. $$

On voit, par l'expression que représente ${}_{(y)}t_{(k)}$, qu'en faisant $k=0$ et $y=0$, on a ${}_{(0)}t_{(0)}=1$, ensuite pour $k=0$ et $y=1$, $y=2$, $y=3$, &c. on a ${}_{(y)}t_{(0)}=0$; enfin pour $y=0$ et $k=1$, $k=2$, $k=3$, &c. on a ${}_{(0)}t_{(k)}=1$, au moyen des deux bandes verticale et horizontale que fournissent ces valeurs (*), on peut, par de simples additions successives, former le tableau suivant des valeurs de ${}_{(y)}t_{(k)}$:

TABLE B.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	&c.
$y=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	&c.
$y=1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.
$y=2$	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	&c.
$y=3$	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	&c.
$y=4$	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	&c.
$y=5$	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252	&c.
$y=6$	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210	&c.
$y=7$	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120	&c.
$y=8$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45	&c.
$y=9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10	&c.
$y=10$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	&c.
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

(*) L'état de la question fournit deux bandes dans cette table et dans la table A; mais on voit par ce qui a été dit dans le numéro précédent, qu'une seule bande suffirait, pourvu qu'elle fût prolongée indéfiniment de part et d'autre.

On poussera cette table très-loin en fort peu d'instans ; lorsqu'on voudra y trouver les nombres correspondant à la différence $\Delta^{(n)} x^k$, on prendra dans la colonne verticale qui a pour numéro la valeur particulière de k, les nombres qui correspondent à $y = n$, $y = n + 1$, $y = n + 2$, &c., c'est-à-dire, que les termes qui doivent exister dans cette différence, sont ${}_{(n)}t_{(k)}$, ${}_{(n+1)}t_{(k)}$, ${}_{(n+2)}t_{(k)}$, &c., comme on le sait d'ailleurs ; ainsi pour $\Delta^3 x^7$, on aura les nombres

$$
\begin{aligned}
{}_{(3)}t_{(7)} &= 35\\
{}_{(4)}t_{(7)} &= 35\\
{}_{(5)}t_{(7)} &= 21\\
{}_{(6)}t_{(7)} &= 7\\
{}_{(7)}t_{(7)} &= 1
\end{aligned}
$$

qui pour former les coëfficiens des puissances de x et de Δx, doivent multiplier les nombres représentés par ${}_{(3)}u_{(3)}$, ${}_{(4)}u_{(3)}$, ${}_{(5)}u_{(3)}$, &c. pris dans la table qui est au commencement de ce numéro, ainsi qu'on va le voir.

De la Table des Facteurs qui ont la forme

$$n^y - \frac{n}{1}(n-1)^y + \frac{n.n-1}{1.2}(n-2)^y - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-3)^y + \&c.$$

La relation entre les quantités fournies par cette expression générale que j'ai représentée par ${}_{(y)}u_{(n)}$, donne l'équation différentielle ${}_{(y)}n_{(n)} = u\left({}_{(y-1)}u_{(n)} + {}_{(y-1)}u_{(n-1)}\right)$, intégrée au commencement de ce numéro ; pour le démontrer, je divise et multiplie l'expression par n, et j'en fais autant de chaque puissance en particulier par sa racine, ce qui donne

$${}_{(y)}u_{(n)} = n\left\{ n^{y-1} - (n-1)(n-1)^{y-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(n-2)^{y-1} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}(n-3)^{y-1} + \&c. \right\}$$

Si on fait attention que $(n-1)(n-1)^{y-1} = n(n-1)^{y-1} - (n-1)^{y-1}$; $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(n-2)^{y-1} = \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{y-1} - \frac{n-1}{1}(n-2)^{y-1}$; $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-3)^{y-1}}{1.2.3} = \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(n-3)^{y-1}$, &c.,

on

on aura, en substituant ces valeurs,

$$
{}_{(y)}u_{(n)} = n \left\{ \begin{array}{l}
n^{y-1} - \frac{n}{1}(n-1)^{y-1} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \\
(n-2)^{y-1} - \frac{n \cdot (n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(n-3)^{y-1} + \&c. \\
+ (n-1)^{y-1} - \frac{n-1}{1}(n-2)^{y-1} + \frac{(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2} \\
(n-3)^{y-1} - \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(n-4)^{y-1} + \&c.
\end{array} \right\}
$$

La première des lignes horizontales multipliées par n est l'expression générale, représentée par ${}_{(y)}u_{(n)}$, dans laquelle on substituerait $y - 1$ à y, c'est donc ${}_{(y-1)}u_{(n)}$; la deuxième ligne horizontale est la même expression, dans laquelle on substituerait $y - 1$ et $n - 1$ à y et à n, c'est donc ${}_{(y-1)}u_{(n-1)}$; ainsi l'équation ${}_{(y)}u_{(n)} = n^y - \frac{n}{1}(n-1)^y + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}(n-2)^y - \&c.$ offre la propriété générale indiquée par l'équation ${}_{(y)}u_{(n)} = n\left({}_{(y-1)}u_{(n)} + {}_{(y-1)}u_{(n-1)}\right)$, C. Q. F. D.

De plus, si dans l'expression $n^y - \frac{n}{1}(n-1)^y + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}$. $(n-2)^y - \&c.$ on fait $n = 0$, elle sera $= 1$ pour $y = 0$ et ensuite $= 0$ pour toutes les autres valeurs de y; si on y fait $y = 0$, elle sera $= 1$ pour $n = 0$, et aura pour $n = 1$, $n = 2$, &c. $n = 3$ &c. respectivement, les valeurs suivantes

$$
\begin{array}{l}
1 - 1, \\
1 - 2 + 1, \\
1 - 3 + 3 - 1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1 - n + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} - \&c. \ldots \pm 1,
\end{array}
$$

toutes valeurs qui sont zéro par elles-mêmes; cette expression offrira donc les mêmes entrées que la table A, et leur rapprochement fournit le moyen

de trouver les valeurs générales de Δz, $\Delta^2 z$, $\Delta^3 z$ &c.; pour cela, dans l'équation

$$\Delta^{(n)} z = \frac{X_{(n)}}{1.2.3\ldots n} (\Delta x)^n {}_{(n)}u_{(n)} + \frac{X_{(n+1)}}{1.2.3\ldots(n+1)} (\Delta x)^{n+1} {}_{(n+1)}u_{(n)} + \frac{X_{(n+2)}}{1.2.3\ldots(n+2)} (\Delta x)^{n+2} {}_{(n+2)}u_{(n)} \&c.$$

on donnera différentes valeurs à n, et on prendra, dans la table A, les nombres correspondans, en observant que les indices n, $n+1$, $n+2$, &c. qui sont à gauche de u, représentent les y, les substitutions donneront

$$\Delta z = X_{(1)} \Delta x + \tfrac{1}{2} X_{(2)} (\Delta x)^2 + \tfrac{1}{6} X_{(3)} (\Delta x)^3 + \tfrac{1}{24} X_{(4)} (\Delta x)^4 + \&c.$$
$$\Delta^2 z = X_{(2)} (\Delta x)^2 + X_{(3)} (\Delta x)^3 + \tfrac{7}{12} X_{(4)} (\Delta x)^4 + \tfrac{1}{4} X_{(5)} (\Delta x)^5 + \&c.$$
$$\Delta^3 z = X_{(3)} (\Delta x)^3 + \tfrac{3}{2} X_{(4)} (\Delta x)^4 + \tfrac{5}{4} X_{(5)} (\Delta x)^5 + \tfrac{3}{4} X_{(6)} (\Delta x)^6 + \&c.$$

&c. &c.

On peut aisément continuer ces équations aussi loin qu'on voudra; je les donnerai avec plus d'étendue quand je parlerai de la manière de déterminer les fonctions X, $X_{(1)}$, $X_{(2)}$, &c.

Formation de la Table des Coëfficiens de $\Delta^{(n)} x^k$.

Puisqu'on a en général

$$\Delta^{(n)} x^k = {}_{(n)}t_{(k)}\, {}_{(n)}u_{(n)}\, x^{k-n} (\Delta x)^n + {}_{(n+1)}t_{(k)}\, {}_{(n+1)}u_{(n)}\, x^{k-n-1} (\Delta x)^{n+1} + {}_{(n+2)}t_{(k)}\, {}_{(n+2)}u_{(n)}\, x^{k-n-2} (\Delta x)^{n+2} + \&c.,$$

on trouvera aisément la valeur d'un coëfficient quelconque ${}_{(n+\omega)}t_{(k)}\, {}_{(n+\omega)}u_{(n)}$, en cherchant dans la table B la valeur de ${}_{(n+\omega)}t_{(k)}$ et la multipliant par celle ${}_{(n+\omega)}u_{(n)}$, prise dans la table A, bien entendu que $n+\omega$ représente y dans l'une et l'autre table. Cette substitution de $n+\omega$ à y vient, comme on a vu, de ce que le terme général ${}_{(y)}t_{(k)}$ ne peut être employé qu'à compter de la valeur $y = n$, parce que lorsque $y < n$ il se trouve multiplié par des termes ${}_{(n-1)}u_{(n)}$, ${}_{(n-2)}u_{(n)}$, ${}_{(n-3)}u_{(n)}$, &c. qui sont zéro par eux-mêmes. D'un autre côté, les termes ${}_{(y)}u_{(n)}$ qui commencent lorsque $y = n$ ne peuvent pas être employés au-delà de ${}_{(k)}u_{(n)}$, parce qu'alors ils se trouvent multipliés par ${}_{(k+1)}t_{(k)}$, ${}_{(k+2)}t_{(k)}$, &c. quantités nulles par elles-mêmes; d'où il suit que le nombre des termes de $\Delta^{(n)} x^k$ sera égal à $k+1-n$. Si on fait dans ${}_{(n+\omega)}t_{(k)}\, {}_{(n+\omega)}u_{(n)}$ des hypothèses successives pour n, et que dans chacune de ces hypothèses on fasse une table à double entrée ordonnée horizontalement par rapport à k, et verticalement par rapport à ω; en n'inscrivant que les produits qui ne sont pas zéro, on aura le tableau suivant:

n	ω	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$n=1$	$\omega=0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\omega=1$	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
	$\omega=2$	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120
	$\omega=3$	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210
	$\omega=4$	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252
	$\omega=5$	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210
	$\omega=6$	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120
	$\omega=7$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45
	$\omega=8$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10
	$\omega=9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$n=2$	$\omega=0$	0	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90
	$\omega=1$	0	0	0	6	24	60	120	210	336	504	720
	$\omega=2$	0	0	0	0	14	70	210	490	980	1764	2940
	$\omega=3$	0	0	0	0	0	30	180	630	1680	3780	7560
	$\omega=4$	0	0	0	0	0	0	62	434	1736	5208	13020
	$\omega=5$	0	0	0	0	0	0	0	126	1008	4536	15120
	$\omega=6$	0	0	0	0	0	0	0	0	254	2286	11430
	$\omega=7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	510	5100
	$\omega=8$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1022
$n=3$	$\omega=0$	0	0	0	6	24	60	120	210	336	504	720
	$\omega=1$	0	0	0	0	36	180	540	1260	2520	4536	7560
	$\omega=2$	0	0	0	0	0	150	900	3150	8400	18900	37800
	$\omega=3$	0	0	0	0	0	0	540	3780	15120	45360	113400
	$\omega=4$	0	0	0	0	0	0	0	1806	14448	65016	216720
	$\omega=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	5796	52164	260820
	$\omega=6$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18150	181500
	$\omega=7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	55980
$n=4$	$\omega=0$	0	0	0	0	24	120	360	840	1680	3024	5040
	$\omega=1$	0	0	0	0	0	240	1440	5040	13440	30240	60480
	$\omega=2$	0	0	0	0	0	0	1560	10920	43680	131040	327600
	$\omega=3$	0	0	0	0	0	0	0	8400	67200	302400	1008000
	$\omega=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	40824	367416	1837080
	$\omega=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	186480	1864800
	$\omega=6$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	818520
$n=5$	$\omega=0$	0	0	0	0	0	120	720	2520	6720	15120	30240
	$\omega=1$	0	0	0	0	0	0	1800	12600	50400	151200	378000
	$\omega=2$	0	0	0	0	0	0	0	16800	134400	604800	2016000
	$\omega=3$	0	0	0	0	0	0	0	0	126000	1134000	5670000
	$\omega=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	834120	8341200
	$\omega=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5103000
$n=6$	$\omega=0$	0	0	0	0	0	0	720	5040	20160	60480	151200
	$\omega=1$	0	0	0	0	0	0	0	15120	120960	544320	1814400
	$\omega=2$	0	0	0	0	0	0	0	0	191520	1723680	8618400
	$\omega=3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1905120	19051200
	$\omega=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16435440
$n=7$	$\omega=0$	0	0	0	0	0	0	0	5040	40320	181440	604800
	$\omega=1$	0	0	0	0	0	0	0	0	141120	1270080	6350400
	$\omega=2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2328480	23284800
	$\omega=3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	29635200
$n=8$	$\omega=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	40320	362880	1814400
	$\omega=1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1451520	14515200
	$\omega=2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	30240000
$n=9$	$\omega=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	362880	3628800
	$\omega=1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16329600
$n=10$	$\omega=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3628800

Si on fait ${}_{(n+\omega)}t_{(k)}\ {}_{(n+\omega)}u_{(n)} = {}_{(\omega)}z^{(n)}_{(k)}$, le terme général ${}_{(\omega)}z^{(n)}_{(k)}$ représentera un nombre quelconque de la table précédente, et la valeur de $\Delta^{(n)}\, x^k$ sera

$$\Delta^{(n)}\, x^k = {}_{(0)}z^{(n)}_{(k)}\, x^{k-n}\, (\Delta x)^n + {}_{(1)}z^{(n)}_{(k)}\, x^{k-n-1}\, (\Delta x)^{n+1} + {}_{(2)}z^{(n)}_{(k)}\, x^{k-n-2}\, (\Delta x)^{n+2} + \&c. \ldots\ldots\ldots + {}_{(k-n)}z^{(n)}_{(k)}\, (\Delta x)^k,$$

ce qui comprend tous les termes de la k^e colonne verticale prise dans la n^e table. Cette formule peut être très-utile pour différencier une fonction transcendante réduite en série rationelle lorsqu'on veut calculer une table par de simples additions ; je donnerai quelques détails sur cet objet dans l'introduction aux grandes tables du cadastre.

D'UN ALGORITHME PARTICULIER

Fondé sur l'analogie entre les indices de différences et les exposans de puissance.

N.° XXXI. Je suis arrivé au terme où je m'étais proposé de conduire les élèves dans les méthodes analytiques qui servent de fondement au calcul intégral; et ceux d'entre eux qui ont donné quelqu'attention aux séances précédentes doivent être en état de consulter, avec fruit, les collections académiques. Les principes que j'ai posés sont rigoureux, et les procédés de calculs qu'on en déduit offrent une marche sûre qui conduit toujours à des résultats vrais; mais, dans certaines circonstances, on peut, par des considérations indirectes, abréger considérablement les opérations, et même parvenir très-facilement à des conclusions qu'on pourrait à peine se flatter d'obtenir par les procédés ordinaires. Je consacrerai quelques instans à entretenir les élèves d'un des exemples les plus singuliers et les plus remarquables de cette manière de traiter l'analyse : *Leibnitz* et *Jean Bernouilli* en ont eu la première idée; la matière a été ensuite traitée avec profondeur par *Lagrange* et *Laplace;* mais leurs recherches et leurs applications sont, en général, fondées sur la théorie du *calcul différentiel* ordinaire. Pour éviter d'anticiper sur des théories que les élèves n'ont point

encore vues, et cependant ne pas les priver de la connaissance d'un procédé de calcul curieux et dont ils pourront déjà faire usage très-avantageusement, je choisirai quelques exemples donnés par *Lorgna*, dans un mémoire sur le même objet, qu'on trouve dans le volume de l'académie de Turin de 1786 et 1787, en attendant que l'avancement du cours permette de revenir sur cette matière.

Les règles à suivre dans cette espèce de calcul se réduisent à considérer les nombres qui désignent, soit les divers ordres de Δ, soit le rang des quantités z^0, z', z'', &c. comme des exposans de puissances, à opérer dans cette hypothèse, et à changer ensuite ces exposans en indices de différences ou de variation, avec l'attention 1.° de laisser z^0 dans tous les termes où il n'est pas multiplié par un autre z; 2.° dans les termes où z^0 accompagné d'un Δ, se trouve multiplié par un autre z, et où on peut l'effacer en le considérant comme l'unité, d'affecter à cet autre z le Δ de z^0.

Les mêmes règles s'appliquent aux expressions dans lesquelles se trouve le signe Σ, considéré comme signe d'intégration; on sait (*n.° XII*) que le passage du Δ au Σ a lieu en rendant l'indice négatif. Ainsi, n étant regardé comme susceptible de toutes les valeurs possibles, les formules qui contiendront $\Delta^{(n)}$, $\Delta^{(n-1)}$, &c. se changeront en d'autres qui contiendront $\Sigma^{(-n)}$, $\Sigma^{(-n-1)}$, &c. en substituant par tout $-n$ à $+n$; mais alors les quantités $z^{(n)}$, $z^{(n-1)}$, &c. deviendront $z^{(-n)}$, $z^{(-n-1)}$, &c. et il faudra, avant de considérer les exposans comme des indices, les transformer en $\frac{1}{z^{(n)}}$, $\frac{1}{z^{(n+1)}}$, &c.

Enfin le signe S de sommation peut se traiter de la même manière que les signes Δ et Σ; on connaît d'ailleurs la manière de le substituer au signe Σ par le moyen de l'équation $\Sigma z^{(n)} = S z^{(n)} + z^{(n)}$, démontrée *n.° XIII*. Ces règles vont s'éclaircir par les exemples suivans, et j'aurai, dans la suite du cours, l'occasion non-seulement d'en multiplier les applications, mais encore de développer, *à priori*, les principes sur lesquels elles sont fondées.

Théorèmes fondamentaux de la méthode des différences.

Je commence par appliquer cette règle à la recherche des théorèmes

généraux donnés pour les équations (1), (2) et (3) du *n.° VII;* pour les obtenir, on posera les équations

$$\Delta^{(n)} z^{(0)} = (\Delta^{(1)} z^{0})^{(n)} = \{ z^{(1)} - z^{(0)} \}^{(n)},$$
$$z^{(n)} = (z')^{(n)} = \{ \Delta^{(1)} z^{(0)} + z^{(0)} \}^{(n)},$$
$$z^{(0)} = (z^{(0)})^{(n)} = \{ z^{(1)} - \Delta^{(1)} z^{(0)} \}^{n},$$

développant les puissances des binomes, passant ensuite des exposans de puissances aux indices de différence, on aura

$$\Delta^{(n)} z^{(0)} = z^{(n)} - n z^{(n-1)} + \frac{n\,\overline{n-1}}{1\,.\,2} z^{(n-2)} - \&c.$$

$$z^{(n)} = \Delta^{(n)} z^{(0)} + n \Delta^{(n-1)} z^{(0)} + \frac{n\,.\,\overline{n-1}}{1\,.\,2} \Delta^{(n-2)} z^{(0)} + \&c.$$

$$z^{0} = z^{(n)} - n \Delta^{(1)} z^{(n-1)} + \frac{n\,.\,\overline{n-1}}{1\,.\,2} \Delta^{(2)} z^{(n-2)} - \&c.$$

(Le développement du premier binome donnera les quantités $z^{(n-1)} z^{(0)}$, $z^{(n-2)} z^{(0)2}$, &c. qui se réduisent à $z^{(n-1)}$, $z^{(n-2)}$, &c. Celui du second binome donnera $(z^{(0)})^{n}$, $(z^{(0)})^{(n-1)} z^{(0)}$, $(z^{(0)})^{(n-2)} (z^{(0)})^{2}$, &c. qui se réduiront chacun à $z^{(0)}$. Le troisième binome aura des réductions pareilles, le tout conformément à la valeur qu'on donne dans l'algèbre à z^{0}; et le Δ d'un indice quelconque sera affecté au z qui restera dans chaque terme; ainsi $z^{(k)} \Delta^{(n)} z^{0}$ deviendra $\Delta^{(n)} z^{(k)}$, &c.

équations qui sont précisément les mêmes que celles du numéro cité.

Transformation des formules qui donnent les différences de l'ordre n *en d'autres qui donnent les Intégrales du même ordre.*

L'expression $\Delta^{(n)} z^{0}$ équivaut (*n.° XII*) à $\Sigma^{(-n)} z^{(0)}$; on a donc

$$\Delta^{(-n)} z^{0} = z^{(n)} - n z^{(n-1)} \pm \frac{n\,.\,\overline{n-1}}{1\,.\,2} z^{(n-2)} - \&c. \pm z^{(0)}.$$

Si on change le signe de n, les termes $z^{(n)}$, $z^{(n-1)}$, &c. considérés comme des puissances, se changeront en $\frac{1}{z^{(n)}}$, $\frac{1}{z^{(n+1)}}$, &c. ce qui donnera

$$\Sigma^{(n)} z^{(0)} = \frac{1}{z^{(n)}} + \frac{n}{z^{(n+1)}} + \frac{n\,.\,\overline{n+1}}{1\,.\,2\, z^{(n+2)}} + \frac{n\,.\,\overline{n+1}\,.\,\overline{n+2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\, z^{(n+3)}} + \&c.$$

Cette série ne se termine plus comme celle qui donne $\Delta^{(n)} z^{(0)}$ ou $\Sigma^{(-n)} z^{(0)}$; en effet, tout étant positif dans les numérateurs, il n'y aura

jamais de facteur égal à zéro, comme serait celui qui suivrait le terme $\pm z^{o}$ dans $\Delta^{(n)} z^{o}$, et qui aurait la forme $\frac{n.n-1.n-2.....(n-n)}{1.2.3......(n+1)}$; ce terme, dans $\Sigma^{(n)} z^{(o)}$, se change en $\frac{n.n+1.n+2.....2n}{1.2.3...(n+1)\, z^{(2n+1)}}$; car il faut observer que le dernier terme $\pm z^{(o)}$ de la valeur de $\Delta^{(n)} z^{(o)}$, dont la véritable forme est $\frac{n.n-1.n-2.....\{n-(n-1)\}}{1.2.3...........n} z^{(n-n)}$, devient ici $\frac{n.n+1.n+2.....(2n-1)}{1.2.3.....n.\, z^{(2n)}}$, après quoi les indices de z continuent d'augmenter.

Si on suppose $n = 1$, il viendra

$$\Sigma^{(1)} z^{(o)} = \frac{1}{z^{(1)}} + \frac{1}{z^{(2)}} + \frac{1}{z^{(3)}} + \&c.$$

qui se change en

$$\Sigma^{(1)} z^{(o)} = \frac{1}{\Delta^{(1)} z^{(o)} + z^{(o)}} + \frac{1}{\Delta^{(2)} z^{(o)} + 2\Delta^{(1)} z^{(o)} + z^{(o)}} + \frac{1}{\Delta^{(3)} z^{(o)} + 3\Delta^{(1)} z^{(o)}\, 3\Delta^{(4)} z^{(o)} + z^{(o)}} + \&c.$$

Relations entre les Intégrales et les Sommes.

J'ai établi, *n.° XIII*, la distinction entre les sommes et les intégrales, fondée sur l'équation

$$S^{(1)} z^{(o)} = \Sigma^{(1)} z^{(o)} + z^{(o)},$$

on en déduit

$$(S^{(1)} z^{(o)})^{(n)} = (\Sigma^{(1)} z^{(o)} + z^{o})^{n}.$$

Développant le binome et changeant les exposans en indices;

$$S^{(n)} z^{(o)} = \Sigma^{(n)} z^{(o)} + n\Sigma^{(n-1)} z' + \frac{n.n-1}{1.2} \Sigma^{(n-2)} z^{(o)} + \&c.$$

Même observation que ci-dessus pour les $z_{(o)}$; les Σ se traitent comme on a fait des Δ.

réciproquement l'équation

$$\Sigma^{(1)} z^{o} = S^{(1)} z^{(o)} - z^{(o)},$$

de laquelle on déduit

$$(\Sigma^{(1)} z^{(o)})^{(n)} = (S^{(1)} z^{(o)} - z^{(o)})^{(n)},$$

donne, en développant le binome et changeant les exposans en indices,

$$\Sigma^{(n)} z^{(0)} = S^{(n)} z^{(0)} - n S^{(n-1)} z^{(0)} + \frac{n . n-1}{1 . 2} S^{(n-2)} z^{0} - \&c.$$

Même observation que ci-dessus pour les $z^{(0)}$; les S se traitent comme on a fait des Δ et des Σ.

Autres Formules pour trouver les Intégrales par la différenciation.

Voici une autre manière de trouver l'intégrale de $z^{(0)}$, d'un ordre quelconque qui aura des applications importantes; si dans l'équation qui donne $z^{(n)}$ on substitue successivement $n-1$, $n-2$, $n-3$, &c. à n, on aura

$$z^{(n)} = z^{(0)} + \frac{n}{1} \Delta^{(1)} z^{(0)} + \frac{n . n-1}{1 . 2} \Delta^{(2)} z^{(0)} + \frac{n . n-1 . n-2}{1 . 2 . 3} \Delta^{(3)} z^{(0)} + \&c.$$

$$z^{(n-1)} = z^{(0)} + \frac{n-1}{1} \Delta^{(1)} z^{(0)} + \frac{n-1 . n-2}{1 . 2} \Delta^{(2)} z^{(0)} + \frac{n-1 . n-2 . n-3}{1 . 2 . 3} \Delta^{(3)} z^{(0)} + \&c.$$

$$z^{(n-2)} = z^{(0)} + \frac{n-2}{1} \Delta^{(1)} z^{(0)} + \frac{n-2 . n-3}{1 . 2} \Delta^{(2)} z^{(0)} + \frac{n-2 . n-3 . n-4}{1 . 2 . 3} \Delta^{(3)} z^{(0)} + \&c.$$

&c. &c.

$$z^{(n-n)} = z^{(0)};$$

maintenant, si dans l'équation

$$\Delta^{(n)} z^{(0)} = z^{(n)} - n z^{(n-1)} + \frac{n . n-1}{1 . 2} z^{(n-2)} - \frac{n . n-1 . n-2}{1 . 2 . 3} z^{(n-3)} + \&c.$$

on substitue à $z^{(n)}$, $z^{(n-1)}$, $z^{(n-2)}$, &c. leurs valeurs données par les équations ci-dessus, on aura

$\Delta^{(n)}$

$$\Delta^{(n)} z^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} + 1 \left\{ z^{(0)} + \frac{n}{1} \Delta^{(1)} z^{(0)} + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \right. \\ \left. \quad \Delta^{(2)} z^{(0)} + \&c. \right\} \\ - n \left\{ z^{(0)} + \frac{n - 1}{1} \Delta^{(1)} z^{(0)} + \frac{n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2} \right. \\ \left. \quad \Delta^{(2)} z^{(0)} + \&c. \right\} \\ + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \left\{ z^{0} + \frac{n - 2}{1} \Delta^{(1)} z^{(0)} + \frac{n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2} \right. \\ \left. \quad \Delta^{(2)} z^{(0)} + \&c. \right\} \\ - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ z^{0} + \frac{n - 3}{1} \Delta^{(1)} z^{(0)} + \frac{n - 3 \cdot n - 4}{1 \cdot 2} \right. \\ \left. \quad \Delta^{(2)} z^{(0)} + \&c. \right\} \\ + \&c. \end{array} \right.$$

Écrivant horizontalement toutes les colonnes verticales, c'est-à-dire, rassemblant tous les facteurs respectifs de $z^{(0)}$, $\Delta^{(1)} z^{(0)}$, $\Delta^{(2)} z^{(0)}$, &c. on aura

$$\Delta^{(n)} z^{(0)} = \Sigma^{(-n)} z^{0} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{n}{1} + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \right. \\ \left. \quad - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c. \right\} \Delta^{(0)} z^{(0)} \\ + \left\{ \frac{n}{1} - \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 1} + \frac{n \cdot n - 1 : n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 1} \right. \\ \left. \quad - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} + \&c. \right\} \Delta^{(1)} z^{(0)} \\ + \left\{ \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot n - 1 \; n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \right. \\ \left. \quad - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} + \&c. \right\} \Delta^{(2)} z^{(0)} \\ + \&c. \end{array} \right.$$

Cette équation doit offrir des valeurs identiques toutes les fois que n sera un nombre entier positif, c'est-à-dire, que dans ce cas il ne restera de la série des termes du deuxième membre que celui qui contient $\Delta^{(n)} z^{(0)}$, dont le coëfficient se réduira à l'unité. Il n'en sera pas de même lorsque n sera un nombre fractionnaire, irrationnel, ou négatif; alors le deuxième membre

contiendra une série de différences : ainsi supposant n négatif, on aura

$$\Sigma^{(n)} z^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{1} + \frac{n}{1} + \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2} \right. \\ \quad \left. + \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{\&c.} \right) z^{(0)} \\ - \left(\frac{n}{1} + \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 1} + \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2 \cdot 1} \right. \\ \quad \left. + \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} + \text{\&c.} \right) \Delta^{(1)} z^{(0)} \\ + \left(\frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \right. \\ \quad \left. + \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} + \text{\&c.} \right) \Delta^{(2)} z^{(0)} \\ - \text{\&c.} \end{array} \right.$$

Ainsi voilà le problème de l'intégration d'un ordre quelconque réduit à celui de la différenciation; et comme toute fonction est susceptible d'être différenciée, on pourra, au moyen de la formule précédente, avoir, dans tous les cas, l'intégrale ou exacte, ou sous la forme de série. Le cas des intégrales premières des fonctions d'une variable présente une forme simple et élégante, comme on va le voir.

Formules pour calculer l'intégrale ou la somme d'une fonction de x *par le moyen des différences de cette fonction et des quantités, connues d'avance,* $S^{(1)}_{(x)}$, $S^{(2)}_{(x)}$, $S^{(3)}_{(x)}$, *&c.*

Soit fait, dans la formule précédente, $n = 1$, elle se changera en

$$\Sigma z = \left\{ \begin{array}{l} \quad \{ 1 + 1 + 1 + 1 + \text{\&c.} \} \; z \\ - \{ 1 + 2 + 3 + 4 + \text{\&c.} \} \; \Delta z \\ + \{ 1 + 3 + 6 + 10 + \text{\&c.} \} \; \Delta^2 z \\ - \{ 1 + 4 + 10 + 20 + \text{\&c.} \} \; \Delta^3 z \\ + \text{\&c.} \end{array} \right.$$

Maintenant z étant supposé fonction de x et l'incrément Δx égal à l'unité, j'observe que l'intégrale de z se compose de z répété autant de fois que Δx est contenu dans x (ou dans la partie de x mesurée depuis

l'origine de l'intégrale), plus une fonction des différences de z. Cette propriété se déduit aisément des considérations présentées *n.° XII*. Si donc on suppose que l'intégrale commence lorsque $x = 0$, la somme des unités qui multiplient z dans la première ligne horizontale, représentera la somme des Δx contenus dans x, c'est-à-dire, x lui-même, et cette première ligne sera $x z$; ensuite on sait, d'après la théorie que j'ai donnée des nombres figurés, que la deuxième ligne sera $\Delta z\, S^{(1)}_{(x)}$, la troisième $\Delta^{(2)} z\, S^{(2)}_{(x)}$, &c., ce qui changera la formule en

$$\Sigma z = z x - \Delta z\, S^{(1)}_{(x)} + \Delta^2 z\, S^{(2)}_{(x)} - \Delta^3 z\, S^{(3)}_{(x)} + \&c.$$

Si on introduit dans cette formule au lieu de Σz sa valeur $S z - z$, on aura

$$S z = z(x + 1) - \Delta z\, S^{(1)}_{(x)} + \Delta^2 z\, S^{(2)}_{(x)} - \Delta^3 z\, S^{(3)}_{(x)} + \&c.$$

Ainsi la somme ou l'intégrale d'une fonction quelconque de z se réduit à calculer les différences successives de cette fonction, ce qui est toujours possible, et à les multiplier, respectivement, par les sommes de différens ordres de x linéaire; or, rien n'est plus aisé à obtenir que ces sommes, d'après la théorie exposée *n.° XVII*, et on peut en dresser d'avance une table calculée une fois pour toutes.

Ces exemples suffisent pour donner une idée du nouvel algorithme et faire concevoir l'utilité dont il peut être dans beaucoup de circonstances; j'aurai occasion de faire voir par la suite que cette utilité se fait remarquer principalement dans des questions importantes dépendant de théories que je n'ai pas encore exposées aux élèves.

DU passage de la méthode des différences à celle du calcul différentiel; divers théorèmes importans et en partie nouveaux, dont la démonstration et l'énonciation dépendent de la nature de ce calcul et de la notation qui lui est propre.

J'OFFRE ici aux élèves le résumé des six séances pendant lesquelles je les ai entretenus des principes fondamentaux du calcul *différentiel*; *Lagrange* a traité cette matière, par une méthode particulière et nouvelle, — N.° XXXII.

avec la supériorité qui caractérise toutes ses conceptions; on imprime ses leçons, et cette circonstance m'engage à supprimer tous les détails relatifs à l'exposition des principes et à la pratique de la différenciation. Je me bornerai à rappeler aux élèves plusieurs conséquences auxquelles cette exposition m'a conduit, dont quelques-unes paraîtront, je crois, nouvelles, et qui toutes sont d'une grande utilité dans l'analyse.

Théorème fondamental qui établit le passage de l'analyse des quantités finies à celle appelée des quantités infiniment petites.

J'ai expliqué aux élèves comment on pouvait assigner pour caractère distinctif au calcul *différentiel*, relativement à la méthode des *différences*, l'introduction de la loi de *continuité* entre les quantités variables que considère cette méthode, et dans quel sens le mot *continuité* devait être pris lorsqu'on l'appliquait à une pareille question. Voici le théorème important et fondamental auquel cette considération m'a conduit.

Nous avons vu, *n.° VII*, qu'on avait généralement, entre une suite de quantités z_0, $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, &c. . . $z_{(n)}$ séparées par l'intervalle commun Δx, la relation

$$z_{(n)} = z_{(0)} + n\Delta z + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 z + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 z + \&c.$$

z est, pour plus de facilité, supposé fonction de x. Concevons maintenant que l'intervalle Δx soit sous-divisé en un nombre k d'intervalles égaux δx, ou qu'on ait

$$\Delta x = k\delta x.$$

On pourra mener entre $z_{(0)}$ et $z_{\prime}$ un nombre $k-1$ d'ordonnées correspondantes chacune à l'extrémité d'un δx, et nommant δz, $\delta^2 z$, $\delta^3 z$, &c. les différences de z prises par rapport à ces ordonnées intercalées entre z_0 et $z_{\prime}$, on aura

$$z_{\prime} = z_0 + k\delta z + \frac{k.k-1}{1.2}\delta^2 z + \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\delta^3 z + \&c.$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$z_{\prime} = z_0 + \frac{1}{1}(k\delta x)^1 \frac{\delta z}{\delta x} + \frac{1\left(1-\frac{1}{k}\right)}{1.2}(k\delta x)^2 . \frac{\delta^2 z}{(\delta x)^2}$$

$$+ \frac{1\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)}{1.2.3} . (k\delta x)^3 . \frac{\delta^3 z}{(\delta x)^3} + \&c.$$

ou en substituant pour $k\delta x$ sa valeur Δx

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{1}\frac{\delta z}{\delta x}\Delta x + \frac{1\left(1-\frac{1}{k}\right)}{1.2}\frac{\delta^2 z}{(\delta x)^2}(\Delta x)^2 + \frac{1\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)}{1.2.3}\cdot\frac{\delta^3 z}{(\delta x)^3}(\Delta x)^3 + \&c.$$

le nombre k étant tout-à-fait arbitraire, la fraction $\frac{1}{k}$ peut avoir toutes les valeurs possibles, et chacune de ces valeurs en comporte une correspondante de $\frac{\delta z}{\delta x}$, qui dépend et de k et de la relation qui lie z à x.

Parmi toutes les hypothèses qu'on peut faire sur $\frac{1}{k}$, la plus remarquable est celle de $\frac{1}{k} = 0$, et pour distinguer la valeur qui en résulte pour $\frac{\delta z}{\delta x}$, de toutes les valeurs qui résulteraient d'autres hypothèses, on désignera ce rapport par $\frac{dz}{dx}$; avec cette double condition l'équation précédente deviendra, en en tirant la valeur $z_1 - z_0$ ou Δz,

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{d^2 z}{1.2\,dx^2}(\Delta x)^2 + \frac{d^3 z}{1.2.3.dx^3}(\Delta x)^3 + \&c.$$

C'est le fameux théorème de *Taylor*, qu'on peut regarder comme le fondement du calcul différentiel, calcul dont l'objet est de donner les moyens abrégés de trouver dans tous les cas les valeurs des rapports $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$, $\frac{d^3 z}{dx^3}$, &c.

J'ai fait observer aux élèves que chacune des quantités z, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 z}{(\Delta x)^2}$, &c. se déduisait de celle qui la précède par un procédé commun; qu'il en était de même de la suite z, $\frac{\delta z}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 z}{(\delta x)^2}$, &c., et par conséquent de la suite z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 z}{(dx)^2}$; &c.

Le théorème de *Taylor* peut s'énoncer d'une manière fort abrégée, en

observant que si e est le nombre dont le logarithme hyperbolique $=1$, on a

$$e^{\frac{dz}{dx}\Delta x} = 1 + \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{1}{1.2}\left(\frac{dz}{dx}\Delta x\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{dz}{dx}\Delta x\right)^3 + \&c.$$

au moyen de quoi on pourra écrire ainsi le théorème

$$\Delta z = e^{\frac{dz}{dx}\Delta x} - 1,$$

en observant, dans le développement de $e^{\frac{dz}{dx}\Delta x}$, de changer tous les exposans des puissances de dz en exposans de différences.

Théorème pour avoir la valeur de $\Delta^n z$, sans s'assujettir à la condition de l'équidistance des ordonnées z_0, $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, &c.

Voici des conséquences curieuses du théorème de *Taylor*.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Soit la suite} \ldots\ldots z_{(o)}\ z_{\prime}\ z_{\prime\prime} \ldots z_{(n)} \\ \text{correspondante à} \ldots x_{(o)}\ x_{\prime}\ x_{\prime\prime} \ldots x_{(n)}\end{array}\right\}\ \text{avec la condition que} \left\{\begin{array}{l} x_{\prime} - x_0 = \varepsilon_{\prime} \\ x_{\prime\prime} - x_0 = \varepsilon_{\prime\prime} \\ x_{\prime\prime\prime} - x_0 = \varepsilon_{\prime\prime\prime} \\ \&c. \end{array}\right.$$

J'ai fait voir qu'il était aisé de trouver la valeur suivante

$$\Delta^n z = \frac{dz}{dx}\{(\varepsilon_{\cdot} - 1)^n \pm 1\} + \frac{d^2 z}{1.2.dx^2}\{(\varepsilon^2 - 1)^n \pm 1\} + \frac{d^3 z}{1.2.3.dx^3}\{(\varepsilon^3 - 1) \pm 1\} + \&c.$$

les signes supérieurs ou inférieurs ayant lieu suivant que n est impair ou pair, et observant dans le développement des puissances n.^{es} de mettre en accens tous les exposans n, $n-1$, $n-2$, &c. et de ne laisser à la lettre ε que l'exposant qu'elle avait avant le développement.

Si on suppose les z équidistans, on aura

$$\varepsilon_{\prime} = \Delta x;\ \varepsilon_{\prime\prime} = 2\Delta x;\ \varepsilon_{\prime\prime\prime} = 3\Delta x \ldots\ldots\ldots \varepsilon_{(n)} = n\Delta x.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation précédente, et observant que dans le cas dont il s'agit, tous les coëfficiens de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$, &c,

jusqu'à $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$, inclusivement, sont zéro par eux-mêmes (ce dont je donnerai tout-à-l'heure une démonstration générale), on aura

$$\Delta^n z = \frac{d^n z}{1.2.3\ldots n.dx^n}\left\{n^n - \frac{n.(n-1)^n}{1} + \frac{n.n-1.(n-2)^n}{1.2} - \frac{n.n-1.n-2.(n-3)^n}{1.2.3} + \&c.\right\}(\Delta x)^n$$

$$+ \frac{d^{n+1}z}{1.2.3\ldots(n+1)dx^{n+1}}\left\{n^{n+1} - \frac{n.(n-1)^{n+1}}{1} + \frac{n.n-1.(n-2)^{n+2}}{1.2} - \frac{n.n-1.n-2.(n-3)^{n+1}}{1.2.3} + \&c.\right\}(\Delta x)^{n+1}$$

$$+ \frac{d^{n+2}z}{1.2.3\ldots(n+2)dx^{n+2}}\left\{n^{n+2} - \frac{n.(n-1)^{n+2}}{1} + \frac{n.n-1.(n-2)^{n+2}}{1.2} - \frac{n.n-1.n-2.(n-3)^{n+2}}{1.2.3} + \&c.\right\}(\Delta x)^{n+2}$$

&c.

On voit ici ce que sont les coèfficiens $X_{(n)}$, $X_{(n+1)}$, &c., que j'avais introduits provisoirement dans la valeur de $\Delta^n z$ (*n.° xxx*); ce sont, respectivement, les rapports $\frac{d^n z}{dx^n}$, $\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}}$, &c. que le calcul différentiel apprend à trouver.

Maintenant il est très-aisé de voir que les quantités $\{n^n - \frac{n(n-1)^n}{1} + \&c.\}$; $\{n^{n+1} - \frac{n.(n-1)^{n+1}}{1} + \&c.\}$; $\{n^{n+2} - n.(n-1)^{n+2} + \&c.\}$; &c. sont respectivement les derniers termes des différences $\Delta^n x^n$, $\Delta^n x^{n+1}$, $\Delta^n x^{n+2}$, &c., c'est-à-dire les valeurs de ces différentielles, lorsqu'on y fait $x = 0$, et que les quantités analogues qui correspondraient à $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}$ &c., dériveraient des valeurs de $\Delta^n x^{n-1}$, $\Delta^n x^{n-2}$ &c. Or ces valeurs étant zéro par elles-mêmes, les quantités $\{n^{n-1} - \frac{n(n-1)^{n-1}}{1} + \&c.\}$; $\{n^{n-2} - \frac{n(n-2)^{n-2}}{1} + \&c.\}$; qui multiplieraient $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}$, &c. sont aussi zéro; ce que je m'étais proposé de démontrer.

Trouver ce que devient une fonction d'un nombre quelconque de variables x, y, t, &c., lorsque chacune de ces variables prend un accroissement Δx, Δy, Δt, &c.

J'ai donné une règle générale fort simple pour étendre le théorème de *Taylor* à un nombre quelconque de variables ; cette matière sera discutée dans l'ouvrage de *Lagrange*, et se trouve aussi exposée avec beaucoup de clarté et de détail dans le traité du calcul différentiel et intégral de *Lacroix (tome 1, page 131 et suiv.)*. Voici l'énoncé de la règle :

Si on a l'équation $z =$ fonction $(x, y, t, \&c.)$ *pour trouver l'accroissement de* z, *lorsque* fonction $(x, y, t, \&c.)$ *devient* fonction $(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t, \&c.)$ *calculez les quantités successives* $\frac{\Delta x + \Delta y + \Delta t + \&c.}{1}$; $\frac{(\Delta x + \Delta y + \Delta t + \&c.)^2}{1.2}$; $\frac{(\Delta x + \Delta y + \Delta t + \&c.)^3}{1.2.3}$; $\frac{(\Delta x + \Delta y + \Delta t + \&c.)^4}{1.2.3.4}$; *&c.; un terme quelconque de ces quantités sera* $A\,(\Delta x)^m\,(\Delta y)^n\,(\Delta t)^p$ *&c. On le multipliera par* $\left(\frac{d^{n+m+p+\&c.}z}{dx^m\,dy^n\,dt^p\,\&c.}\right)$, *cette notation désignant des différenciations partielles, et la collection des termes, ainsi formés, donnera la valeur de* Δz *ou la variation cherchée.*

D'après cette règle, on a en général pour $z =$ *fonction* $(x, y, t, \&c.)$

$$z' = z + \left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right)\Delta y + \left(\frac{dz}{dt}\right)\Delta t + \&c.$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)(\Delta x)^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\Delta x\,\Delta y + 2\left(\frac{d^2z}{dx\,dt}\right)\Delta x\,\Delta t + \&c.\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^2z}{d^2y}\right)(\Delta y)^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dy\,dt}\right)\Delta y\,\Delta t + \&c.\right\}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\left\{\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)(\Delta x)^3 + 3\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dy}\right)(\Delta x)^2\,\Delta y + 3\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dt}\right)(\Delta x)^2\,\Delta t + \&c.\right.$$
$$\left. + 3\left(\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right)\Delta x(\Delta y)^2 + \&c. + \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)(\Delta y)^3 + \&c.\right\}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4}\left\{\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right)(\Delta x)^4 + 4\left(\frac{d^4z}{dx^3\,dy}\right)(\Delta x)^3\Delta y + \&c. + 6\left(\frac{d^4z}{dx^2dy^2}\right)(\Delta x)^2(\Delta y)^2 + \&c.\right.$$
$$\left. + 4\left(\frac{d^4z}{dx\,dy^3}\right)\Delta x(\Delta y)^3 + \&c. + \left(\frac{d^4z}{dy^4}\right)(\Delta y)^4 + \&c.\right\}$$

&c. &c. et

et supprimant dans cette formule tous les termes affectés de t, &c., on aura celle qui convient à une fonction z de deux variables x et y.

Manière de représenter graphiquement les quantités $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, *&c. lorsque* y *est fonction de* x.

Je ne répéterai point les détails des procédés de calcul au moyen desquels on déduit les quantités $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, &c. d'une relation donnée entre y et x, et de ceux qui donnent les quantités analogues dans le cas d'un plus grand nombre de variables ; mais il sera curieux et utile de donner un procédé de construction qui fasse tomber sous les sens la signification de ces rapports différentiels ; c'est en rapportant les phrases analytiques à des objets visibles, que la géométrie peut principalement contribuer aux progrès de l'analyse.

Soit $y = \varphi\,(x)$ l'équation d'une courbe (φ est le signe de fonction), et supposant cette courbe construite, choisissons à volonté un de ses points auxquels correspondent deux coordonnées que nous considérerons comme des quantités données et connues, et que nous désignerons en conséquence par x et y; on aura pour ce point particulier

$$y = (x),$$

et on pourra, au moyen de cette équation, trouver les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{(dx)^2}$, &c. qui seront des quantités données et connues, comme celles de x et y, faisant

$$y = A;\ \frac{dy}{dx} = A_{,};\ \frac{d^2y}{dx^2} = A_{,,};\ \frac{d^3y}{dx^3} = A_{,,,}\ \&c.$$

Prenant le pied de l'ordonnée y pour une nouvelle origine des coordonnées, savoir, les abcisses, en prolongement de x, désignées par t, et les ordonnées parallèles à y, désignées par des v différemment accentués, si on trace les courbes paraboliques

$v_0 = A$ .... ligne droite parallèle à l'axe des abcisses.

$v_, = A + A_, t$ ....
$v_{,,} = A + A_, t + A_{,,} t^2$ ......
$v_{,,,} = A + A_, t + A_{,,} t^2 + A_{,,,} t^3$.
&c. &c.

Paraboles de différens ordres tangentes à la courbe $y = \varphi\,(x)$, au point dont les coordonnées sont y et x.

On aura pour une abcisse t égale à Δx

$$y = v_0 ; \frac{dy}{dx} = \frac{v_, - v_0}{\Delta x} ; \frac{d^2 y}{dx} = \frac{v_{,,} - v_,}{(\Delta x)^2} ; \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{v_{,,,} - v_{,,}}{(\Delta x)^3} \text{ \&c.}$$

Ainsi les portions d'une même ordonnée comprises entre les courbes paraboliques consécutives, sont, respectivement, les valeurs de $\frac{dy}{dx}\,\Delta x$, $\frac{d^2 y}{dx^2}\,(\Delta x)^2$, $\frac{d^3 y}{dx^3}\,(\Delta x)^3$, &c.

Manière, analogue à la précédente, de représenter graphiquement les différentielles de divers ordres de l'aire d'une courbe.

Voici une extension de la construction précédente à un cas intéressant; on sait que l'aire de la courbe qui a $y = \varphi\,(x)$ pour équation, est $\int y\,dx$, ou $\int [\,dx\,.\,\varphi\,(x)\,]$; cette aire étant comptée jusqu'à l'ordonnée y correspondant à x, s'augmente depuis l'extrémité de x jusqu'à celle de $x + \Delta x$ d'une quantité donnée par l'équation

$$\Delta \{\int y\,dx\} = y\,\Delta x + \frac{dy}{1\,.\,2\,.\,dx}(\Delta x)^2 + \frac{d^2 y}{1\,.\,2\,.\,3\,dx^2}(\Delta x)^3 + \text{\&c.}$$

en observant que

$$y = \frac{d\{\int y\,dx\}}{dx} ; \frac{dy}{dx} = \frac{d^2\{\int y\,dx\}}{dx^2} ; \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^3\{\int y\,dx\}}{dx^3} \text{ \&c.}$$

Maintenant A, $A_,$, $A_{,,}$, &c. et t ayant les mêmes acceptions que ci-dessus, posons les équations

$V_0 = At$ ....
$V_, = At + \frac{1}{2} A_, t^2$ ....
$V_{,,} = At + \frac{1}{2} A_, t^2 + \frac{1}{3} A_{,,} t^3$ ....
$V_{,,,} = At + \frac{1}{2} A t^2 + \frac{1}{3} A_{,,} t^3 + \frac{1}{4} A_{,,,} t^3$..
&c. &c.

Équations qui expriment les aires des courbes paraboliques $V_0 = A$; $V_, = A + A_, t$; $V_{,,} = A + A_, t + A_{,,} t^2$, &c. qu'il faut construire pour avoir les rapports $\frac{dy}{dx}$; $\frac{n^3 y}{dx}$; $\frac{d^3 y}{dx}$, &c.

On aura pour une abcisse t égale à Δx

$$\frac{d\{\int y\,dx\}}{dx} = \frac{V_0}{\Delta x};\ \frac{d^2\{\int y\,dx\}}{dx^2} = .2.\ \frac{V_{,}-V_0}{(\Delta x)^2};\ \frac{d^3\{\int y\,dx\}}{dx^3}$$

$$= .3.\ \frac{V_{\prime\prime}-V_{,}}{(\Delta x)^3}, \text{ \&c.}$$

Ainsi les espaces compris entre les arcs des mêmes courbes donneront les différentielles de l'aire de la même manière que des portions de lignes droites comprises entre ces arcs donnent les différentielles de l'ordonnée.

Méthode pour interpoler, par de simples additions et soustractions, un nombre quelconque de termes entre des termes donnés d'une suite numérique.

Mouton, astronome lyonnais, a publié en 1670, des recherches sur la détermination des diamètres du soleil et de la lune; le troisième chapitre de son ouvrage, intitulé *De nonnullis numerorum proprietatibus*, contient des procédés arithmétiques, au moyen desquels, ayant une suite dont les différences 2.es, 3.es ou 4.es sont constantes ou très-petites, on trouve les différences du même ordre qui conviennent à cette suite, en supposant qu'on interpole entre les termes donnés un certain nombre d'autres termes; ces différences ainsi trouvées, servent à effectuer l'interpolation par de simples additions ou soustractions. *Mouton* se procura par-là des méthodes très-abrégées, et jusqu'alors inconnues, pour le calcul des tables; mais ayant voulu étendre ses recherches au cas d'un nombre quelconque de différences, et la question s'étant trouvée au-dessus de ses forces, il consulta un de ses amis, nommé *François Regnauld*, homme très-ingénieux, qui lui fournit une espèce de solution générale, dont voici l'idée. *Regnauld* forma un tableau composé de plusieurs colonnes, dont les têtes étaient des quantités indéterminées, a, b, c, &c. La première colonne à droite était composée uniquement de la quantité a; celle à gauche de cette première était une progression arithmétique, dont le premier terme était b et la différence a; celle à gauche de cette seconde était une progression du deuxième ordre, dont le premier terme était c, et dont les différences entre les autres termes étaient successivement les termes de la seconde colonne b, $b+a$, $b+2a$, &c.;

la quatrième colonne de droite à gauche se formait de la troisième, de la même manière que la troisième se formait de la deuxième, et ainsi de suite, et les premières lignes de son tableau étaient

f	e	d	c	b	a
$f+e$	$e+d$	$d+c$	$c+b$	$b+$a	a
$f+2e+d$	$e+2d+c$	$d+2c+b$	$c+2b+$a	$b+2$a	&c.
$f+3e+3d+c$	$e+3d+3c+b$	$d+3c+3b+$a	$c+3b+3$a	&c.	
$f+4e+6d+4c+b$	$e+4d+6c+4b+$a	$d+4c+6b+4$a	&c.		
$f+5e+10d+10c+5b+$a	$e+5d+10c+10b+5$a	&c.			
$f+6e+15d+10c+15b+6$a	&c.				
&c.					

Le tableau peut aisément se continuer indéfiniment de droite à gauche et de haut en bas par de simples additions; chaque colonne donnant les différences premières de celle qui est à sa gauche. Pour l'appliquer à l'interpolation, supposons, par exemple, qu'on ait une suite dont les différences 5.es soient constantes, et qu'on veuille intercaler 10 termes entre le 1.er et le 2.e de cette suite, on prendra de 10 en 10 les termes de la sixième colonne à gauche du tableau, à compter du 1.er jusqu'au 51.e; on calculera, par des soustractions successives, leurs différences 1.ere, 2.e, 3.e, 4.e et 5.e; cette dernière sera constante; et comparant les têtes des colonnes de ces différences avec les différences de même numéro du premier terme de la suite donnée, on aura les différences correspondantes qui conviennent aux termes à interpoler, et le calcul de ces termes se fera par de simples additions ou soustractions.

Regnauld avait plus de génie d'invention que de science en mathématiques, car il n'a pas su que les colonnes de son tableau étaient des progressions arithmétiques de différens ordres, dans lesquelles les coëfficiens des mêmes lettres donnaient les séries des diverses espèces de nombres figurés. Cette considération aurait pu rendre l'usage de sa méthode beaucoup plus commode, car on connaissait de son temps les termes généraux de ces sortes de séries, au moyen desquels on aurait pu calculer les

termes d'une colonne quelconque de son tableau, par intervalles aussi grands qu'on aurait voulu, sans être obligé d'augmenter le tableau. J'ai donné cette théorie avec beaucoup de détail dans plusieurs des numéros précédens; il en résulte que toutes les têtes des colonnes étant supposées dans une première ligne horizontale, et toutes les lignes horizontales, à compter de la première inclusivement, étant numérotées o, 1, 2, 3 . . . *n*, on aura, pour les termes généraux, des suites composant les diverses colonnes, en donnant à ces colonnes, comptées de droite à gauche, les n.os 1, 2, 3, &c.; savoir:

Colonnes.	*Termes généraux.*
N.° 1	a
2	$b + n\,a$
3	$c + n\,b + \frac{n.n-1}{1.2}\,a$
4	$d + n\,c + \frac{n.n-1}{1.2}\,b + \frac{n.n-1\,n.-2}{1.2.3}\,a$
&c.	&c.

Mouton et *Regnauld* étaient bien éloignés de soupçonner ces propriétés; le premier sur-tout ne connaissait pas les règles les plus élémentaires du calcul littéral, à en juger par les applications qu'il a faites de la méthode de *Regnauld*, dans lesquelles il est obligé d'arriver par une suite de raisonnemens à des résultats numériques qu'on obtient immédiatement et avec une extrême facilité, au moyen de simples équations du premier degré (1).

---

(1) *Mouton* a publié, à la suite de son ouvrage, cité dans le texte, un opuscule intitulé *Nova mensurarum geometricarum idea*, dans lequel il propose un système métrique décimal fondé sur la grandeur de la terre. La plus grande mesure de sa nomenclature, nommée *milliare*, est égale à une minute sexagésimale du méridien; les autres vont en diminuant dans la raison sous-décuple; et pour donner le moyen de retrouver à volonté deux des mesures comprises dans cette nomenclature, qu'il appelle *virga* et *virgula*, il détermine le nombre de vibrations faites pendant un temps donné par des pendules simples de même longueur. L'évaluation absolue de son *milliare* est fondée sur la mesure erronée du méridien, donnée par *Riccioli*. *Mouton* n'en connaissait pas d'autre; mais cette erreur de fait ne lui ôte rien de la gloire d'avoir le premier conçu l'idée d'un système de mesures semblable à celui que la France, sa patrie, a adopté environ cent vingt ans après.

Il ne paraît pas qu'on ait fait un grand usage de la méthode de *Regnauld;* peut-être parce que la manière dont il l'a présentée, n'offre pas la simplicité des formules algébriques, et que d'un autre part la solution analytique générale du problème n'était pas sans difficultés : voici les résultats auxquels cette solution m'a conduit; je donnerai ailleurs les détails de l'analyse du problème.

Soit une suite donnée de termes séparés par l'intervalle Δx, savoir,

$$z,\ z_{\prime},\ z_{\prime\prime},\ z_{\prime\prime\prime},\ \text{\&c.}$$

et tels qu'on ait

$$\Delta z = z_{\prime} - z;\ \Delta^2 z = z_{\prime\prime} - 2 z_{\prime} + z, \text{ \&c.}$$

et supposons qu'on veuille intercaler entre z' et z un nombre m de termes équidistans, correspondant à des divisions égales de x, désignées δx, ce qui donnera, par conséquent,

$$\Delta x = m \delta x.$$

Faisons, pour abréger la notation

$$X_{(n+\omega)} = x(x-m)(x-2m)\ldots[x-(n-1).m](x-nm)\\ [x-(n+1).m]\ldots\ldots[x-(n+\omega-1).m],$$

et on aura pour calculer la différence n.^e^ du premier terme z relativement aux termes à intercaler,

$$\delta^{(n)} z = \frac{\Delta^{(n)} X_{(n)}}{1.2.3\ldots\ldots\ldots n m^n} \Delta^n z + \frac{\Delta^{(n)} X_{(n+1)} \Delta^{(n+1)} z}{1.2.3\ldots(n+1) m^{n+1}} + \\ \frac{\Delta^{(n)} X_{(n+2)} \Delta^{(n+2)} z}{1.2.3\ldots(n+2) m^{n+2}} + \ldots + \frac{\Delta^{(n)} X_{(n+\omega)} \Delta^{(n+\omega)} z}{1.2.3\ldots(n+\omega) m^{n+\omega}} + \text{\&c.}$$

en observant, 1.° de faire $\Delta x = 1$ dans les différences $\Delta^{(n)} X_{(n)}$, $\Delta^{(n)} X_{(n+1)}$, &c.; 2.° de faire dans ces mêmes différences $x = 0$ après la différenciation.

Il est évident que la valeur de $\delta^{(n)} z$ ne peut pas contenir de différences moins élevées que $\Delta^{(n)} z$; car les coëfficiens $\Delta^{(n)} X_{(n-1)}$, $\Delta^{(n)} X_{(n-2)}$, &c. qu'auraient ces différences, sont zéros par eux-mêmes; de plus, les 1.er 2.e, 3.e, &c. termes de cette valeur, ne contiennent pas, respectivement, de puissances de m plus élevées que les puissances 0.e, 1.ere, 2.e, &c. en sorte

que la formule peut, en observant que $m\,\delta x = \Delta x$, se mettre sous la forme

$$\frac{\delta^{(n)} z}{(\delta x)^n} = \frac{1}{(\Delta x)^n}\Big\{A\Delta^{(n)} z + \Big(\frac{A'}{m} + B\Big)\Delta^{(n+1)} z + \Big(\frac{A''}{m^2} + \frac{B'}{m} + C'\Big)\Delta^{(n+2)} z + \Big(\frac{A'''}{m^3} + \frac{B''}{m^2} + \frac{C'}{m} + D\Big)\Delta^{(n+3)} z + \&c.\Big\}$$

où A, A', &c. B, B', ne contiennent que la lettre n.

Si on suppose $\frac{1}{m} = 0$, on aura $\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{dz}{dx}$ et l'équation précédente deviendra

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \frac{1}{(\Delta x)^n}\left(A\Delta^{(n)} z + B\Delta^{(n+1)} z + C\Delta^{(n+2)} z + \&c.\right)$$

et les valeurs des coèfficiens A, B, C, &c. seront:

$$A = 1,$$

$$B = -\tfrac{1}{2}n,$$

$$C = \frac{n(3n+5)}{2.3.4},$$

$$D = \frac{n(n+2)(n+3)}{2.2.3.4},$$

$$E = \frac{n(15n^3 + 150n^2 + 485n + 502)}{2.2.2.3.3.4.4.5},$$

$$F = \frac{n(3n^4 + 50n^3 + 305n^2 + 802n + 760)}{2.2.2.2.3.3.4.4.5},$$

&c. &c.

Lans et *Haros*, deux géomètres du cadastre, se sont occupés avec beaucoup de succès du problème de *Mouton*, par une analyse différente de la mienne, qu'il serait trop long de rapporter ici; *Lans* a joint à sa solution le calcul des coèfficiens de sept différences de z. Voici les quatre premières

$$\delta^{(n)} z = \frac{1}{m^n}\Big\{\Delta^{(n)} z + \frac{n(1-m)}{2.m}\Delta^{(n+1)} z + \frac{n(1-m)\,[3n+1-m(3n+5)]}{2.3.4.m^2}\Delta^{(n+2)} z + \frac{n(1-m)\,[n(n+1) - 2m(n^2+3n+1) + m^2(n+2)(n+3)]}{2.2.3.4\,m^3}\Delta^{(n+3)} z + \&c.\Big\}.$$

Il y aura bien peu de cas où l'on sera obligé d'employer des différences

supérieures à la quatrième; ainsi cette formule sera en général suffisante : je donnerai des tables des valeurs numériques des coëfficiens, lorsque je reviendrai sur cette matière.

De l'élimination des fonctions arbitraires, ou dont la forme est inconnue, par le moyen de la différenciation.

Après avoir parlé aux élèves des équations de condition qui caractérisent les différentielles exactes et d'une propriété particulière des fonctions homogènes, je leur ai fait observer que l'introduction des différences partielles pouvait servir à éliminer les fonctions arbitraires, ce qui se concevra très-aisément par quelques exemples.

Soit $z = \varphi\,(x^2 + y^2)$, équation générale des surfaces de révolution, on a $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 2x\varphi'\,(x^2 + y^2)$; $\left(\frac{dz}{dy}\right) = 2y\varphi'\,(x^2 + y^2)$, d'où on tire $y\left(\frac{dz}{dx}\right) = x\left(\frac{dz}{dy}\right)$, équation qui ne contient plus de fonction arbitraire.

Soit encore $z = ay + \varphi\,(x - by)$, équation des surfaces cylindriques à base quelconque, on a $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \varphi'\,(x - by)$; $\left(\frac{dz}{dy}\right) = a - b\varphi'\,(x - ay)$, d'où on tire $b\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right) = a$.

Soit enfin $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, équation de la douelle d'une arrière-voussure de Marseille, on a

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}\,x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}\,\psi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{x}{x^2}\,x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right);$$

Multipliant la seconde équation par $\frac{y}{x}$, et ajoutant le produit à la première équation, on aura

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

équation

équation qui ne contient plus qu'une fonction arbitraire, et qui, différenciée de nouveau, donne

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = -\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2}\left(\frac{dz}{dy}\right) - \frac{y}{x}\left(\frac{d^2 z}{dydx}\right)$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right) = \frac{x}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{x^2}\left(\frac{dz}{dy}\right) - \frac{y}{x}\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right).$$

Multipliant la seconde équation par $\frac{y}{x}$, et ajoutant le produit à la première, on a

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + \frac{2y}{x}\left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right) + \frac{y^2}{x^2}\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = 0,$$

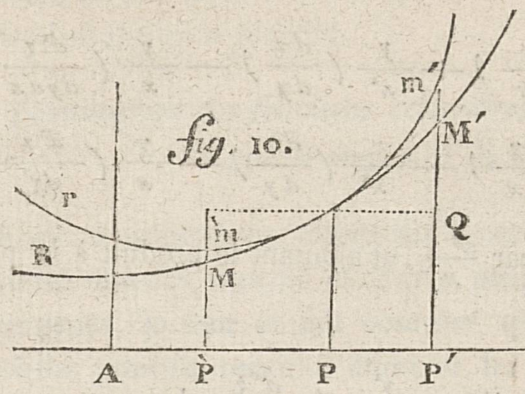
équation où les deux fonctions arbitraires sont éliminées. Ces exemples suffisent pour faire voir qu'il y a une relation nécessaire entre les fonctions arbitraires et les différences partielles, telle que, dans une même question, les unes supposent toujours l'existence des autres. On ne peut donc passer d'une équation en différences partielles à une équation finie entre des variables, sans introduire des fonctions arbitraires, et réciproquement; c'est principalement pour fixer l'attention des élèves sur cette dépendance réciproque, que je les ai entretenus des objets qui font la matière de cet article, et qui peuvent préparer leur esprit à l'étude d'une des branches les plus importantes de l'analyse.

Théorie générale des différens ordres d'osculation des lignes courbes.

La méthode des tangentes qui a donné naissance au calcul différentiel, et qui est une des premières applications qu'on en fait ordinairement à la géométrie, n'est qu'un cas très-particulier de la théorie des osculations que j'ai exposée aux élèves. *Lagrange* est, je crois, le premier qui l'ait donnée dans toute sa généralité (1), et *Arbogast* l'a ensuite présentée avec beaucoup de détail dans un mémoire sur le calcul différentiel. Je vais récapituler ici les points de théorie principaux que j'ai présentés aux élèves.

(1) *Voyez* les Mémoires de l'académie de Berlin, tom.

Soient, *fig. 10*, deux courbes rs, RS, dont les abscisses communes soient x correspondantes à des ordonnées z pour RS, et u pour rs, l'origine étant en A. Qu'on mène $Q'Q$ parallèle à AP, et les trois ordonnées équidistantes $\grave{P}\grave{M}$, PM, $P'M'$ séparées par l'intervalle Δx, et rencontrant les deux courbes en $\grave{M}$, $\grave{m}$, M, M', et m'.



Soient maintenant les équations des deux courbes RS et rs respectivement

$$z = \varphi(x) \ldots \text{pour } RS$$
$$u = f(x) \ldots \text{pour } rs,$$

on aura, en considérant M comme un point déterminé de la courbe RS, correspondant aux coordonnées x et y, signes dont nous sommes précédemment convenus pour exprimer que les variables ont des valeurs particulières, on aura, dis-je,

$$P'M' = z' = z + \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{d^2 z}{1.2.dx^2}(\Delta x)^2 + \frac{d^3 z}{1.2.3.dx^3}(\Delta x)^3 + \frac{d^4 z}{1.2.3.4.dz^4}(\Delta x)^4 + \text{\&c.}$$

$$P'm' = u' = u + \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{d^2 u}{1.2.dx^2}(\Delta x)^2 + \frac{d^3 u}{1.2.3dx^3}(\Delta x)^3 + \frac{d^4 u}{1.2.3.4.dx^4}(\Delta x)^4 + \text{\&c.}$$

Faisant ensuite Δx négative, observant que cet incrément n'est point contenu dans les quantités $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$, &c. $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$, &c. et que par conséquent les seuls termes qui contiennent les puissances impairs de Δx doivent changer de signe, on aura

$$\grave{P}\grave{M} = \grave{z} = z - \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{d^2 z}{1.2.dx^2}(\Delta x)^2 - \frac{d^3 z}{1.2.3dx^3}(\Delta x)^3 + \frac{d^4 z}{1.2.3.4.dx^4}(\Delta x)^4 - \text{\&c.}$$

$$`P`m = `u = u - \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{d^2u}{1.2.dx^2}(\Delta x)^2 - \frac{d^3u}{1.2.3dx^3}(\Delta x)^3$$
$$+ \frac{d^4u}{1.2.3.4.dx^4}(\Delta x)^4 - \&c.$$

Cela posé, le rapport entre les différens termes qui se correspondent dans les valeurs de z' et u', et dans celles de $`z$ et $`u$, sert à faire connaître jusqu'à quel point les courbes RS et rs diffèrent l'une de l'autre dans la partie de leur tracé qui répond à l'ordonnée PM, et qui s'étend à droite et à gauche de cette ordonnée d'une quantité Δx aussi petite qu'on voudra.

Pour fixer, à cet égard, les idées d'une manière précise, supposons successivement que différens termes correspondans sont égaux dans les suites qui se rapportent aux deux courbes, et voyons ce qui en résultera.

1.° Soit $u = z$, il résulte de cette égalité que les deux courbes passent par un même point M, pouvant d'ailleurs avoir une trace quelconque de part et d'autre de ce point; il y a, dans ce cas, une simple *intersection.*

2.° Soient $u = z$; $\frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx}$, la première égalité suppose, comme on vient de le voir, que les deux courbes ont un point de commun, et la seconde suppose, de plus, que la courbe rs est toute (ou du moins jusqu'à une certaine distance de part et d'autre de M) d'un même côté par rapport à la courbe RS, et dire que ces deux conditions ont lieu à-la-fois, c'est dire que les courbes sont tangentes l'une à l'autre au point commun M; c'est ce qu'on nomme une *osculation du premier ordre.*

De plus, la courbe rs dont le symbole d'équation est $u = f(x)$, jouissant des deux propriétés que je viens d'énoncer, toute autre courbe qui, avec la même origine des coordonnées, aurait le même symbole d'équation $u = f(x)$, ne différant que par les valeurs des constantes, et qui ne remplirait que la première des conditions $u = z$, ne pourra point, dans une certaine étendue de chaque côté du point M, avoir sa trace entre les courbes rs et RS, c'est-à-dire que, dans cette étendue, la courbe rs s'approchera plus de la courbe RS que toute autre courbe dont l'équation serait de la forme $u = f(x)$, et qui ne ferait que couper RS en M.

Je ne répéterai point la démonstration que j'ai donnée de ces propositions;

je rappellerai seulement qu'elle est en général fondée sur cette propriété des suites $z + \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{d^2 z}{dx^2}(\Delta x)^2 \pm$ &c. $u \pm \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{d^2 u}{dx^2}$ $(\Delta x) +$ &c.; qu'on peut toujours donner à Δx une valeur telle qu'un terme quelconque de ces suites soit plus grand que la somme de tous les termes suivans. *Lagrange* a démontré cette propriété d'une manière très-rigoureuse et très-générale.

3.° Soient $u = z$; $\frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx}$; $\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx}$, les deux premières conditions expriment que les deux courbes sont tangentes l'une à l'autre, et il résulte de la troisième que parmi toutes les courbes dont l'équation serait de la forme $u = f(x)$ et qui ne donneraient que $u = z$ et $\frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx}$, c'est-à-dire qui seraient simplement tangentes à RS, aucune ne peut avoir son cours eutre rs et RS, c'est-à-dire que rs est de toutes ces courbes celle qui s'approche le plus de RS, du moins jusqu'à une certaine distance de part et d'autre de M, et il y a, à ce point M, entre les deux courbes, une *osculation du second ordre*.

En général, il résulte de ces conditions $u = z$; $\frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx}$; $\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx^2}$, &c. que, parmi toutes les courbes rs qui ont un même symbole d'équation $u = f(x)$, celle qui offrira le plus de ces conditions, approchera plus de se confondre avec la courbe RS, que chacune de celles qui en offriraient moins, tellement que la trace d'aucune de ces dernières ne pourra exister entre la courbe RS, et celle qui a le plus grand nombre de termes consécutifs communs, depuis u inclusivement, du moins jusqu'à une certaine distance de part et d'autre du point M. La *contingence* ou *osculation* a lieu lorsqu'il y a plus d'un terme commun, et elle est d'un ordre égal au nombre des termes communs moins un.

On peut donc, étant donné le symbole d'équation $u = f(x)$, y introduire des constantes de valeurs telles que la courbe rs ait avec RS une osculation d'un ordre donné, pourvu néanmoins, 1.° que l'équation $u = f(x)$ ait un nombre de constantes moindre que le numéro de cet ordre plus un; 2.° que dans l'équation $z = \varphi(x)$ de la courbe RS, $\varphi(x)$ ne soit pas une fonction

rationnelle, sans diviseur variable, d'un degré moindre que l'ordre de l'osculation qu'on veut obtenir; ces conditions étant celles par lesquelles l'ordre de l'osculation est limité.

Lorsque les courbes seront susceptibles de l'ordre d'osculation qu'on voudra obtenir, on tirera des équations $u = z$; $\frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx}$, &c., en nombre égal au numéro de cet ordre; les valeurs d'un pareil nombre de constantes de l'équation $u = f(x)$ qui, introduites dans cette équation, la rendront telle qu'en construisant la courbe qu'elle exprime, et la courbe qui a pour équation $z = \varphi(x)$, d'où les rapports $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$, &c. sont déduits, ces deux courbes auront entre elles une *osculation* de l'ordre demandé.

Soit, par exemple, rs une ligne droite dont l'équation est

$$u = \text{a}\, x + b \;\ldots\; \text{d'où}\; \frac{du}{dx} = \text{a},$$

on voit que, puisqu'il y a deux constantes, il peut non-seulement y avoir *intersection*, mais encore *osculation du premier ordre*, en déterminant a et b en conséquence. Pour cela, on a $u = z$; $\frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx}$. Si on se borne à la condition de $u = z$, on aura, pour déterminer toutes les lignes droites qui coupent la courbe RS en M, l'équation $z = \text{a}\, x + b$, d'où, en tirant la valeur de l'une ou l'autre des constantes a et b, et les substituant dans $u = \text{a}\, x + b$, il en résultera les deux équations à la ligne droite

$$u = \frac{z - b}{x}\, x + b;\; u = \text{a}\,(x + x) + z,$$

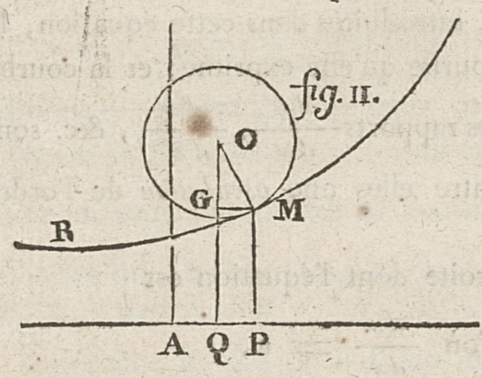
qui satisfont également à la condition proposée; mais si on veut de plus une osculation du premier ordre, on aura, en introduisant dans $u = \text{a}\, x + b$ et $\frac{du}{dx} = \text{a}$, les valeurs de u et $\frac{du}{dx}$ convenables au point déterminé M, on aura, dis-je, $b = z - \frac{dz}{dx}\, x$; $\text{a} = \frac{dz}{dx}$, et l'équation de la ligne droite tangente à la courbe RS, au point M, dont les coordonnées sont x et y, sera de la forme

$$u = z + (x - x) \frac{dz}{dx};$$

la sous-tangente est ce que devient $x - x$, lorsque $u = 0$, et on a par conséquent

$$\text{Sous-tangente} = z \frac{dx}{dz}.$$

Il est aisé de trouver à présent les valeurs des tangente, normale, sous-normale, et de toutes les lignes qui dépendent des différences premières.



Supposons que rs soit un cercle, *fig. 11*, nommons a et b les deux coordonnées AQ et QO du centre, et r le rayon OM, menant GM parallele à AP on a $(OG)^2 + (GM)^2 = (DM)^2$, c'est-à-dire,

$$(a - x)^2 + (b - u)^2 = r^2 \;..\text{d'ou}\; \frac{du}{dx} = \frac{x - a}{b - u}, \; \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1 + \frac{du^2}{dx^2}}{b - u};$$

Il y a ici trois constantes, ainsi on peut avoir, ou une intersection simple, ou une osculation du premier ordre, ou une osculation du deuxième; prenant donc les équations

$$u = z; \; \frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx}; \; \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx^2}.$$

Si on s'en tient à la première, on aura l'équation déterminée

$$(a - x)^2 + (b - z)^2 = r^2,$$

de laquelle tirant la valeur d'une des constantes a, b ou r pour la substituer dans $(a - x)^2 + (b - u)^2 = r^2$, on aura les différentes équations des cercles qui coupent la courbe RS au point M.

Pour avoir une osculation du premier ordre, on déduira des deux équations

$$(a - x)^2 + (b - z)^2 = r^2; \; \frac{dz}{dx} = \frac{x - a}{b - z};$$

les valeurs de deux des constantes qui, substituées dans $(a - x)^2 +$

$(b - u)^2 = r^2$, donneront les équations de tous les cercles tangens qui auront leur centre sur la normale au point M.

Enfin, si on veut une osculation du deuxième ordre, on tirera des équations

$$(a - x)^2 + (b - z)^2 = r^2; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x - a}{b - z}; \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1 + \frac{dz^2}{dx^2}}{b - z}$$

les valeurs

$$a = x - \frac{\left\{1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right\} \frac{dz}{dx}}{d^2 z : dx^2}; \quad b = z + \frac{1 + \frac{dz^2}{dx^2}}{d^2 z : dx^2}; \quad r = \frac{\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{d^2 z : dx^2}$$

à substituer dans $(a - x)^2 + (b - u)^2 = r$.

Le cercle construit d'après ces valeurs, est par conséquent, de tous ceux qui ont leur centre sur la normale au point M, celui qui, à une certaine distance de part et d'autre de ce point, s'écarte le moins de la courbe, et on ne pourrait faire passer aucun autre cercle entre la trace de la courbe et la sienne. C'est ce cercle qui mesure la courbure de la courbe au point M; on le nomme particulièrement *cercle osculateur*, et son rayon $r = \frac{(1 + dz^2 : dx^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2 z : dx^2}$ se nomme *rayon osculateur.*

La courbe qui est le lieu géométrique de tous les centres des cercles osculateurs se nomme *développée.* Pour trouver son équation, on supposera variables les coordonnées a et b du centre; les valeurs de ces coordonnées, données ci-dessus, étant fonctions de z et de x, ou plutôt de x seul (vu qu'on peut en éliminer z au moyen de l'équation $z = (x)$), on éliminera x entre les deux équations qui donnent ces valeurs, et on obtiendra une équation qui ne contiendra que les coordonnées a et b avec des constantes, et qui sera par conséquent l'équation de la développée.

On appliquera aisément la théorie générale aux osculations d'un ordre plus élevé; les exemples précédens offrent les applications les plus utiles.

Des caractères qui distinguent les maxima *et* minima *dans le cas d'un nombre quelconque de variables.*

On connaît depuis long-temps les caractères qui distinguent un *maximum*

d'un *minimum* pour une fonction d'une seule variable ; j'ai fait voir aux élèves que si on a $z = f(x)$, d'où on peut déduire

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{d^2 z}{1.2.dx^2}(\Delta x)^2 + \frac{d^3 z}{1.2.3.dx^3}(\Delta x)^3 + \frac{d^4 z}{1.2.3.4.dx^4}(\Delta x)^4 + \&c.$$

$f(x)$ devenait un *maximum* ou un *minimum*, lorsqu'on avait $\frac{dz}{dx} = 0$ (équation qui donne la valeur de x convenable au *maximum* ou au *minimum*), et que ce qui distinguait le *maximum* du *minimum*, était le signe de $\frac{d^2 z}{dx^2}$, négatif dans le premier cas, et positif dans le deuxième. Ils ont vu de plus que si on a, en même temps, $\frac{dz}{dx} = 0$ et $\frac{d^2 z}{dx^2} = 0$, sans que $\frac{d^3 z}{dx^3}$ soit nul, il n'y a ni *maximum* ni *minimum*, mais que si ce troisième terme est nul aussi, il y a *maximum* ou *minimum*, suivant que $\frac{d^4 z}{dx^4}$ est négatif ou positif ; en général, pour qu'il y ait *maximum* ou *minimum*, il faut que le plus grand exposant des termes qui ne s'évanouissent point soit pair, et il y a, en particulier, *maximum* ou *minimum*, respectivement, suivant que le terme auquel appartient cet exposant, est négatif ou positif.

Il n'est pas aussi aisé de distinguer le *maximum* du *minimum* dans le cas de deux ou un plus grand nombre de variables ; cependant le principe fondamental est toujours le même, car si on a $z = f(x, y, t, \&c.)$ on en déduit

$$\begin{aligned}\Delta z = & A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta t + \&c.\\ & + A_{,}(\Delta x)^2 + B_{,}\,\Delta x\,\Delta y + C_{,}\,\Delta x\,\Delta t + \&c.\\ & + A_{,,}(\Delta x)^3 + B_{,,}(\Delta x)^2\Delta y + C_{,,}(\Delta x)^2\Delta t + \&c.\\ & + \&c.\end{aligned}$$

On a vu précédemment les valeurs de A, B, &c. $A_{,}$, $B_{,}$, &c. $A_{,,}$, $B_{,,}$, &c. ; or j'ai démontré dans les leçons que, lorsque $f(x, y, t. \&c.)$ était *maximum* ou *minimum*, on avait

$$A\,dx + B\,dy + C\,dt + \&c. = 0.$$

condition

condition qui fournit autant d'équations particulières qu'il y a de variables indépendantes, au moyen desquelles on détermine les valeurs de chacune de ces variables convenables au cas du *maximum* ou du *minimum*.

De plus, il y a, en particulier, *minimum* ou *maximum*, selon que $A_{,}(\Delta x)^2 + B_{,}\Delta x \Delta y + C_{,}\Delta x \Delta t +$ &c. est positif ou négatif, ce qui est analogue à ce que j'ai dit pour les fonctions d'une variable; mais la difficulté consiste, ici, à assigner les conditions générales qui rendent cette quantité positive ou négative. *Lagrange*, qui avait traité cette question dans le premier volume des mémoires de l'académie de Turin, l'a depuis présentée sous une autre forme dans sa Mécanique analytique (*I.ère partie, III.e section, art. XVII et suivans*); et *Fourier*, professeur à l'École polytechnique, a donné des développemens instructifs sur ce passage de la Mécanique analytique. Je vais présenter la solution d'une manière qui, quoique abrégée, pourra néanmoins être saisie, avec un peu d'attention, par tous ceux qui ont lu ce qui précède.

Je fais $V = A_{,}(\Delta x)^2 + B_{,}\Delta x \Delta y + C_{,}\Delta x \Delta t +$ &c., qu'on pourra aisément mettre sous la forme

$$V = \quad V = K(\Delta x)^2 + L\Delta x + M = K\left\{\left(\Delta x + \frac{L}{2K}\right)^2 + \frac{M}{K} - \frac{L^2}{4K^2}\right\} = K\left\{\left(\Delta x + \frac{L}{2K}\right)^2 + V_{,}\right\}$$

$$V_{,} = \frac{M}{K} - \frac{L^2}{4K^2} = K_{,}(\Delta y)^2 + L_{,}\Delta y + M_{,} = K_{,}\left\{\left(\Delta y + \frac{L_{,}}{2K_{,}}\right)^2 + \frac{M_{,}}{K_{,}} - \frac{L_{,}^2}{4K_{,}^2}\right\} = K_{,}\left\{\left(\Delta y + \frac{L_{,}}{2K_{,}}\right)^2 + V_{,,}\right\}$$

$$V_{,,} = \frac{M_{,}}{K_{,}} - \frac{L_{,}^2}{4K_{,}^2} = K_{,,}(\Delta t)^2 + L_{,,}\Delta t + M_{,,} = K_{,,}\left\{\left(\Delta t + \frac{L_{,,}}{2K_{,,}}\right)^2 + \frac{M_{,,}}{K_{,,}} - \frac{L_{,,}^2}{4K_{,,}^2}\right\} = K_{,,}\left\{\left(\Delta t + \frac{L_{,,}}{2K_{,,}}\right)^2 + V_{,,,}\right\}$$

&c. &c. &c. &c.

La quantité K est la même que $A_{,}$ ou $\frac{1}{1.2}\cdot\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ dans la valeur de Δz donnée précédemment; toutes les autres quantités $K_{,}$, $K_{,,}$, &c. L, L', &c. M, M', &c. sont très-aisées à retrouver dans cette même valeur de Δz; on pourra observer 1.° que K, $K_{,}$, $K_{,,}$, &c. ne contiennent aucune des différences Δx, Δy, Δt, &c. 2.° que L, $L_{,}$, $L_{,,}$, &c. ne contiennent que les premières puissances de ces différences, lesquelles ne montent qu'à deux dimensions, au plus, dans M, $M_{,}$, $M_{,,}$, &c.; 3.° enfin que Δx ne se trouve pas dans L, M et $V_{,}$; qu'il en est de même de Δx et Δy dans $L_{,}$, $M_{,}$ et $V_{,,}$, de Δx, Δy et Δt dans $L_{,,}$, $M_{,,}$ et $V_{,,,}$,

en sorte que n étant le nombre des variables, $V_{(n-1)}$ ne renferme qu'une seule différence et termine la série des V de différens accens.

Maintenant posons le cas de $z = minimum$, il faut alors que V soit toujours positif; ce qui se réduit à dire que K et $\frac{M}{K} - \frac{L^2}{4K^2}$ sont, chacune en particulier, positives; car $(\Delta x + \frac{L}{2K})^2$ est un quarré essentiellement positif. On a donc $\frac{M}{K} - \frac{L^2}{4K^2} > 0$, et on peut observer que cette condition est précisément la même qui rend imaginaires les racines de l'équation

$$K(\Delta x)^2 + L\Delta x + M = 0.$$

Il faut à présent examiner quelles conditions rendront $\frac{M}{K} - \frac{L^2}{4K^2}$ ou son égal $V_{,}$ positif; ces conditions sont que $K_{,}$ et $\frac{M_{,}}{K_{,}} - \frac{L_{,}^2}{4_{,}K_{,}^2}$ soient positives, la dernière est celle qui rend imaginaires les racines de l'équation

$$K_{,}(\Delta y)^2 + L_{,}\Delta y + M_{,} + 0.$$

On trouvera encore que pour rendre $M_{,} - \frac{L_{,}^2}{4K_{,}^2}$ ou son égal V positif, il faut que $K_{,,}$ soit positif et que $\frac{M_{,,}}{K_{,,}} - \frac{L_{,,}}{4K_{,,}^2}$ soit aussi positive ou que les racines de l'équation

$$K_{,,}(\Delta t)^2 + L_{,,}(\Delta t) + M_{,,} = 0$$

soient imaginaires, et ainsi de suite.

Si z était un *maximum*, il faudrait que V fût toujours négatif, c'est-à-dire que K fût négatif et $\frac{M}{K} - \frac{L}{4K}$ ou $V_{,}$ positif; ainsi ce cas ne diffère du précédent que par le signe de K.

Si dans la dernière énonciation de la valeur de V qui contient $V_{,}$, on

substitue la valeur de $V_{,}$ qui contient $V_{,,}$, celle de $V_{,,}$ qui contient $V_{,,,}$, et ainsi de suite, on aura

$$V = K(\Delta x + \frac{L}{2K})^2 + KK_{,}(\Delta y + \frac{L_{,}}{2K_{,}})^2 + KK_{,}K_{,,}(\Delta t + \frac{L_{,,}}{2K_{,,}})^2 + \&c.$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$V = \mathrm{a}\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \&c.$$

Dans le cas du *minimum*, K, $K_{,}$, $K_{,,}$, &c. et par conséquent a, b, c, &c. sont positifs; dans le cas du *maximum*, K seul est négatif, et par conséquent a, b, c, &c. négatifs, et il faut observer que α^2, β^2, γ^2, &c. sont toujours essentiellement positives. Telles sont les conditions du *minimum* et du *maximum* de z, lorsque les termes du second ordre de la valeur de Δz ne sont pas nuls; si ces termes étaient seuls, il faudrait pour qu'il y eût *minimum* ou *maximum*, que ceux du troisième ordre fussent nuls aussi, et que la collection des termes du quatrième ordre fût toujours positive; en examinant les conditions relatives à ce dernier cas, on retombe dans celles qui rendent imaginaires les racines d'une équation du quatrième degré, et en général, quel que soit le nombre des termes évanouissans, dans celles qui rendent imaginaires les racines des équations de degré pair, pourvu néanmoins que l'ordre le plus élevé des termes restans ne soit pas impair.

J'ai donné aux élèves, dans mes leçons de mécanique, une application importante de la théorie contenue dans cet article; ils ont vu que lorsque les forces de direction et quantités quelconques, qui sollicitent un système de corps, sont fonctions des distances de ces corps à des points fixes pris sur les directions des forces qui les sollicitent respectivement, on assigne toujours une quantité qui est un *maximum* ou un *minimum* dans le cas de l'équilibre, et que, particulièrement, il y a ou il n'y a pas stabilité dans l'équilibre, suivant que cette quantité est un *minimum* ou un *maximum*. Les conditions de la stabilité ou de la non stabilité de l'équilibre sont donc les mêmes que celles qui font distinguer un *minimum* d'un *maximum*; j'engage les élèves à repasser, en même temps, et la théorie précédente et ses applications à la mécanique.

Application de la méthode des tangentes à la recherche des racines des équations numériques.

Simpson est, je crois, le premier qui ait parlé de l'usage du calcul différentiel, pour approcher de plus en plus de la valeur d'une racine d'une équation, du moins à l'époque où il a publié son procédé, il l'a donné comme nouveau (1). Plusieurs auteurs s'en sont occupés après lui, et entre autres *Cagnoli (Trigon. art. 364)*; mais je ne sache pas qu'on en ait exposé nulle part le véritable principe, qui se trouve dans la méthode des tangentes. Il est bon de le placer ici, vu que le procédé de calcul qui en déduit peut être d'autant plus utile, qu'il est indistinctement applicable aux fonctions algébriques et transcendantes.

Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique ou transcendante, et qu'il s'agisse de chercher une des valeurs de x, qui rende $f(x)$ nulle, je pose l'équation

$$y = f(x),$$

qui est celle d'une courbe plane, laquelle coupe l'axe des x en autant de points que $f(x) = 0$ a de racines réelles. Soient ϱ l'abcisse repondant à une des intersections, et $x_{,}, y_{,}$ les coordonnées d'un point de la courbe peu distant de cette même intersection, la tangente à ce point rencontrera l'axe des x entre l'ordonnée $y_{,}$ et ladite intersection, dont la soustangente $\frac{dx_{,}}{dy_{,}} y_{,}$, qu'on peut désigner par $s_{,}$, ajoutée à $x_{,}$, donnera une nouvelle abscisse $x_{,} + s_{,}$, qui différera moins de ϱ que $x_{,}$. Faisons $x_{,} + s_{,} = x_{,,}$ et nommons $y_{,,}$ l'ordonnée correspondante, on trouvera, par le même raisonnement, que $x_{,,} + s_{,,}$ approche plus de ϱ que $x_{,,}$, en nommant $s_{,,}$ la soustangente pour le point dont $y_{,,}$ et $x_{,,}$ sont les coordonnées, et ainsi de suite. On arrivera de cette manière très-rapidement à une valeur de x, telle que sans connaître précisément ϱ, on sera sûr que la valeur trouvéee en diffère d'une quantité moindre qu'une quantité donnée.

---

(1) *Voyez* son ouvrage, intitulé : *Essays on several curious aud useful subjects in speculative et mix'd mathematicks, London 1740*, pag. 81.

Voici le tableau du calcul.

ABCISSES consécutives.	ORDONNÉES ou résultats des substitutions des abcisses ci-à côté dans l'équation $f(x)=y$.	SOUS-TANGENTES aux points correspondant aux coordonnées ci-à côté.
1.ère donnée.. $x_{\prime}$	.... $y_{\prime}$	.... $s_{\prime}$
$x_{\prime} + s_{\prime} = x_{\prime\prime}$	.... $z_{\prime\prime}$	.... $s_{\prime\prime}$
$x_{\prime\prime} + s_{\prime\prime} = x_{\prime\prime\prime}$	.... $y_{\prime\prime\prime}$	.... $s_{\prime\prime\prime}$
$x_{\prime\prime\prime} + s_{\prime\prime\prime} = x_{IV}$	.... y_{IV}	.... s_{IV}
&c.	&c.	&c.

Observez que si la première valeur $s_{\prime}$ est négative, toutes les autres $s_{\prime\prime}$, $s_{\prime\prime\prime}$, &c. le sont aussi (en supposant à $x_{\prime}$ l'approximation suffisante); alors les abcisses sont $x_{\prime}$, $x_{\prime}-s_{\prime}$, $x_{\prime\prime}-s_{\prime\prime}$, &c.; en général, il faut avoir aux signes les attentions convenables.

Lorsque $x_{\prime}$ sera près d'une racine réelle ou de deux racines égales, les ordonnées $y_{\prime}$, $y_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime\prime}$, &c. et les tangentes trigonométriques $\frac{y_{\prime}}{s_{\prime}}$, $\frac{y_{\prime\prime}}{s_{\prime\prime}}$, $\frac{y_{\prime\prime\prime}}{s_{\prime\prime\prime}}$, &c. iront en diminuant; mais les valeurs successives de ces tangentes n'auront zéro pour limite, comme celle des ordonnées, que dans le cas des racines égales; ce dernier caractère fera reconnaître les racines imaginaires qui existent toujours dans une équation, lorsque, pour une série de valeurs $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, $x_{\prime\prime\prime}$, &c. les rapports correspondans $\frac{y_{\prime}}{x_{\prime}}$, $\frac{y_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}}$, $\frac{y_{\prime\prime\prime}}{x_{\prime\prime\prime}}$, &c. diminuent, passent par zéro au moment où y devient *maximum* ou *minimum*, et augmentent ensuite après avoir changé de signe.

FIN de la méthode directe et inverse des différences.

PHYSIQUE.

Observations sur la Neige et la Pluie ; leur influence sur la végétation, et leur combinaison avec l'oxigène :

Par le C.en J. H. HASSENFRATZ,

Instituteur de Physique de l'École polytechnique.

TOUS les peuples qui habitent les parties de la terre sur lesquelles il tombe de la neige, s'accordent à considérer ce météore comme un des moyens employés par la nature pour donner aux plantes plus de force et à leur développement plus d'activité. Plusieurs même se persuadent que les hivers qui ne produisent point de neige présagent une récolte faible et une végétation languissante. Ils attribuent son influence à des sels qu'ils disent exister dans cette eau congelée.

De la neige recueillie en grande masse, fondue, évaporée dans des vases de verre, n'ayant laissé aucun résidu, a fait regarder cette présomption comme chimérique ; et, par la suite d'un raisonnement poussé trop loin, on a été conduit à nier toute espèce d'influence de la neige sur la végétation.

Il faut, dans les phénomènes transmis par les générations successives, distinguer les résultats provenant de l'observation, d'avec l'explication qu'on a cherché à leur donner.

Il est des phénomènes dont l'ensemble et les détails se présentent à nos sens dans tout leur éclat, et qui ne peuvent former aucun doute à l'esprit de l'observateur le moins attentif ; il en est d'autres qui ne laissent apercevoir que quelques traces qu'on ne peut distinguer qu'avec des instrumens particuliers, que par un enchaînement de faits qui y conduisent directement, ou qu'après une suite d'observations souvent réitérées.

Lorsque ces traces ont été observées par un grand nombre d'individus, par plusieurs générations, quelqu'inexactement qu'elles aient été transmises, quelqu'obscure que soit la tradition, il faut que le physicien se garde de prononcer avec trop de précipitation ; plus le nombre d'observateurs est grand, plus il y a d'uniformité dans le sentiment qu'ils ont du phénomène, plus le savant doit mettre de soin à le discuter avant de le contredire.

L'influence de la neige sur les végétaux est soumise à l'examen d'un nombre d'observateurs trop considérable pour croire qu'il soit possible qu'il y ait une si grande uniformité d'opinions, s'il n'y avait réellement des effets conformes à ceux que l'on suppose. Je vais dans ce mémoire examiner ces effets ; j'essaierai d'en expliquer la cause, et je chercherai quel rapport existe entre l'explication donnée depuis long-temps par les cultivateurs, et une analyse plus approfondie de la neige.

Qu'après un hiver très-froid, très-rigoureux, la végétation soit d'autant plus active, plus forte, que les plantes ont été couvertes d'une plus grande épaisseur de neige, c'est une vérité de fait, c'est un résultat d'expériences que tous les cultivateurs ont constatées.

Il en est une cause simple et naturelle.

Toutes les plantes sont susceptibles de supporter un froid plus ou moins grand ; il en est qui ne peuvent être exposées à la température de la glace fondante sans périr, il en est d'autres sur lesquelles les froids les plus violens ne produisent aucune altération.

Chaque plante a donc une limite de résistance au froid, une certaine température au-delà de laquelle elle ne peut être exposée sans être gelée et sans périr.

Plusieurs plantes exposées à un froid voisin de la température qui doit les geler, ne périssent pas ; mais elles contractent par le froid cuisant qu'elles ont éprouvé une maladie de langueur dont elles se ressentent pendant toute la durée de leur existence.

Si l'on expose à l'action d'un grand froid, une série de plantes qui aient des facultés de supporter des froids différens, il périra dans cette série un nombre de plantes d'autant plus grand que le froid aura été plus considérable ; mais si par le moyen d'une couverture on peut

intercepter le froid et empêcher que les plantes ne soient exposées à une diminution de chaleur aussi grande que celle qui existe à l'extérieur, plusieurs des plantes qui auraient péri, seront conservées, plusieurs de celles qui auraient été malades, seront saines et bien portantes, et leur nombre sera d'autant plus grand que la couverture aura intercepté plus de froid.

Le globe terrestre a une chaleur accumulée dans son intérieur : cette chaleur s'aperçoit dans tous les souterrains assez profonds pour que le froid ou la chaleur extérieure ne puissent y pénétrer. Cette température est de 13 degrés à l'échelle décimale du thermomètre de mercure. La neige est très-peu conductrice de la chaleur ; le froid la pénètre difficilement ; sa température, lorsqu'elle se fond, est de zéro de degré au thermomètre de mercure.

Lorsque la surface de la terre est couverte d'une épaisseur de neige considérable, le froid de l'air qui la touche tend à refroidir sa masse ; la chaleur interne du globe tend à l'échauffer. Il se fait donc à travers la masse de neige, un combat de chaleur dont le résultat ordinaire est de fondre une portion de la neige et de porter à zéro la température du milieu dans lequel sont les plantes.

Ainsi la neige a la propriété de maintenir les plantes qu'elle couvre à la température de la glace fondante, de les préserver de l'influence d'un plus grand froid, de leur procurer une humidité continuelle, d'empêcher qu'un grand nombre ne périsse, qu'un plus grand nombre encore ne soit languissant, et de donner en conséquence plus de force et de vigueur aux végétaux, qu'ils n'en auraient eu s'ils n'eussent pas été couverts de neige.

L'on voit donc que l'on peut expliquer une partie de l'influence de la neige sur la végétation, sans avoir recours aux sels, au nitre que l'on prétend qu'elle contient, et que l'expérience, l'analyse a prouvé ne point exister.

L'explication de l'influence de la neige par l'humidité continuelle qu'elle procure aux plantes, est un résultat d'observations qui doit n'avoir point échappé aux cultivateurs attentifs de tous les temps; mais la connaissance de l'influence qu'elle a par sa non conductibilité de la chaleur

chaleur, est la suite des expériences toutes récentes faites sur le calorique; les anciens n'avaient ni séries de faits, ni instrumens adaptés à cette espèce de recherche, il fallait qu'ils se servissent des données, des résultats, des expériences et des autres instrumens qu'ils avaient.

Ils ont observé que l'air rouillait les métaux, de la même manière que les acides, d'où ils ont conclu qu'il y avait un acide dans l'air; ils ont remarqué qu'il se formait spontanément du nitre sur des masses calcaires, d'où ils ont conclu que l'acide de l'air était un nitre; et cette conclusion était bien peu éloignée de la vérité, puisque les expériences les plus récentes, les découvertes les plus signalées, celles qui ont fait faire les progrès les plus rapides à la physique, ont prouvé que l'air était formé des deux élémens qui entrent dans la composition de l'acide nitrique, l'oxigène et l'azoth.

Avouons donc qu'il fallait une grande finesse d'esprit, une grande sagacité chez les physiciens qui nous ont précédés, pour avoir trouvé depuis long-temps, par l'accumulation de plusieurs phénomènes indirects, ce que l'analyse la plus exacte nous démontre aujourd'hui.

Si la neige n'eût eu que la propriété de conserver les végétaux et de les empêcher de périr par la rigueur du froid, il est peu probable que les anciens philosophes l'eussent considérée comme déposant sur la terre des sels nitreux, pouvant sur-tout s'assurer, par une expérience très-simple, qu'elle ne contenait point de sel; car ils n'ont pas attribué cette propriété à l'eau de pluie; mais ils ont remarqué que la neige brûlait le cuir, à la manière des acides, ainsi que plusieurs corps que l'on y plongeait: étant conduits à conclure qu'il y avait du nitre dans l'air, il était naturel qu'ils attribuassent à ce nitre contenu dans l'air, les qualités brûlantes de la neige, et par suite son influence sur la végétation.

Le citoyen *Guyton* m'ayant engagé à rechercher la cause de la différence des effets de la neige et de l'eau de pluie sur plusieurs substances, j'ai trouvé qu'ils étaient occasionnés par l'oxigénation de la neige, et que c'était à une combinaison particulière d'oxigène dans cette eau congelée, qu'on devait attribuer ces effets.

J'ai mis mille grammes de neige dans un flacon, et mille grammes d'eau

distillée dans un autre; j'ai versé dans chacun de ces flacons une quantité égale d'une même dissolution de teinture de tournesol; j'ai placé les deux flacons dans un endroit échauffé; après la fusion, j'ai remarqué que la teinture était plus rouge dans l'eau de neige que dans l'eau distillée.

J'ai répété l'expérience une seconde fois avec le même succès.

J'ai mis dans un flacon mille grammes d'eau distillée, et mille grammes de neige dans un autre; j'ai mis dans chacun de ces flacons 6,5 grammes de sulfate de fer bien pur et bien net; il s'est précipité dans le premier 0,150 grammes d'oxide de fer et 0,010 grammes dans le second.

Comme l'oxide de fer est précipité de la dissolution de sulfate par l'oxigène, il s'ensuit que la neige contenait plus d'oxigène que l'eau distillée; et il suit de la première expérience, que cette quantité d'oxigène était assez considérable pour rougir la teinture de tournesol.

Il est bien démontré par ces deux expériences, que la neige est de l'eau oxigénée, et qu'elle doit en conséquence avoir sur la végétation une action différente de celle de la glace ordinaire.

Les expériences d'*Ingenhouse* sur la germination des graines nous ont appris qu'il fallait absolument la présence et le contact de l'oxigène, pour que la graine pût se développer.

Elles ont fait voir encore, que plus l'oxigène était abondant, et plus rapidement les graines se développaient.

La plupart des plantes qu'on laisse parvenir à leur maturité parfaite, répandent sur la terre une partie de leur semence. Ces graines abandonnées, exposées à l'action du froid, sont conservées par la neige qui les couvre, en même temps qu'elles trouvent dans l'eau qu'elle produit en fondant, une portion d'oxigène qui agit puissamment sur le principe de la germination, et détermine des graines qui auraient péri, à croître, se développer et augmenter le nombre des plantes qui couvrent la surface de la terre.

Un nombre assez considérable des plantes que nous avons eu l'art d'approprier à notre nourriture, à nos besoins, sont semées dans les mois de vendémiaire, brumaire et même frimaire; plusieurs de ces

graines germent avant que les froids portent leur action sur elles et qu'elles altèrent le principe de leur vie : la neige qui couvre les autres, agissant sur le germe par son oxigénation, l'oblige à se développer et à augmenter le nombre des plantes utiles que le cultivateur confiait à la terre, et conséquemment à multiplier leur produit.

Voilà donc trois effets bien distincts de la neige sur la végétation, trois effets qui contribuent chacun séparément à augmenter chaque année le nombre des plantes qui croissent, à leur donner plus de vigueur, et conséquemment à multiplier nos récoltes. Ces effets sont 1.° d'empêcher que les plantes ne soient attaquées par le froid, ne soient altérées ou ne périssent par la force de son action; 2.° de fournir aux végétaux une humidité continuelle qui contribue à leur procurer les substances nécessaires à leur nutrition, et à les entretenir dans un état de force et d'embonpoint inaltéré; 3.° de faire germer un bien plus grand nombre de semences, et conséquemment d'augmenter le nombre des plantes qui croissent sur le sol.

Je dois, avant de finir ce mémoire, y consigner quelques expériences importantes à la végétation, que j'ai faites sur l'eau de pluie.

L'eau de pluie n'agit point sur la teinture de tournesol ni sur le sulfate de fer comme la neige; d'où il paraîtrait qu'elle ne participerait pas à la propriété que lui donne son oxigénation; cependant l'eau de pluie contient aussi de l'oxigène, mais dans un état de dissolution et non de combinaison comme dans la neige; car de l'eau de pluie soumise à l'action du vide, a laissé dégager de l'air qui contenait des proportions d'oxigène beaucoup plus grandes que l'eau de rivière, de source et même l'air atmosphérique.

L'air atmosphérique, exposé à l'action du phosphore à froid, d'après la méthode indiquée par *Berthollet*, diminue de 0,20 de son volume, c'est-à-dire que le phosphore arrache à l'azoth vingt parties d'oxigène sur cent parties d'air atmosphérique.

L'air retiré de l'eau de Seine, éprouvé par le même eudiomètre, a donné la même diminution.

L'air retiré de l'eau de pluie, au contraire, a diminué par le phosphore à froid de 0,32 à 0,40; 0,35 étant la moyenne d'un grand nombre

d'expériences : d'où il suit que la proportion d'oxigène dans l'air obtenu de l'eau de pluie fraîchement tombée, est plus grande et plus considérable que celle qui est contenue dans l'air atmosphérique et dans l'air des autres eaux.

Puisque l'eau de pluie diffère ainsi de l'eau ordinaire par l'oxigène qu'elle tient en dissolution, et que l'oxigène a de l'influence sur la germination, et même sur la végétation, ainsi que les expériences d'*Ingenhouse* et de *Senebier* le prouvent, il est naturel de lui attribuer une partie de l'action particulière qu'elle a sur la végétation, différente de celle des eaux avec lesquelles on arrose.

ARCHITECTURE.

TEXTE DE L'ENSEIGNEMENT DE CET ART.

INTRODUCTION.

On reconnaît généralement l'utilité de l'architecture, et la nécessité où sont les artistes qui se consacrent à l'exercice de ce bel art, de ne négliger aucune de ses parties ; il serait donc superflu que je m'attachasse à prouver une vérité contre laquelle personne ne s'élève.

Mais ce qui n'est ni généralement senti, ni démontré à tout le monde, c'est la nécessité d'offrir à l'instruction des élèves un nouveau plan d'étude, à l'aide duquel ils puissent se diriger dans cet art important et difficile.

Ce n'est pas qu'il n'existe un grand nombre d'ouvrages sur l'architecture ; mais aucun ne présente un ensemble complet, une méthode d'instruction assez sûre pour faire connaître aux artistes les vrais principes de l'art, et les diriger dans l'application de ces principes.

C'est au défaut d'un ouvrage de ce genre qu'on doit attribuer, en grande partie, les vices qu'on remarque dans tant d'édifices et de bâtimens, qui, par les contre-sens et les inconvenances fréquentes qu'ils présentent, prouvent que leurs auteurs, livrés au caprice et à la routine, ont ignoré les vrais principes de l'architecture.

Nous attaquerons ces erreurs, en faisant connaître aux élèves les vrais principes de l'art dans lequel nous avons à les diriger. On jugera si nous avons atteint ce but dans nos leçons, par la comparaison que l'on fera de notre nouveau plan d'étude, avec les systèmes élémentaires reçus, et par l'examen des édifices qui ont été conçus et dirigés d'après ces systèmes.

Sans la connaissance des principes d'un art, on ne peut attendre de véritables progrès vers sa perfection ; mais avec eux, l'artiste, sûr de sa

marche, ne se laissera pas décourager par des opinions fausses et accréditées par le temps; il ne se soumettra pas avec le vulgaire des artistes, à des préjugés dont il apercevra la fausseté; il ne répétera pas avec eux, *que sous le climat nébuleux et variable de la France, on ne pourra point espérer que les arts atteignent jamais à cette hauteur où ils ont été portés dans les beaux siècles de la Grèce et de l'Italie.*

Nous serions plus disposés à accorder cette influence sur les arts, moins à la température des climats, qu'à la forme des gouvernemens, et nous penserions que les Grecs ont dû leur supériorité plutôt au génie républicain, et à des circonstances particulières, qu'au ciel sous lequel ils vivaient.

Quant à la *beauté* de leurs ouvrages, ayant par la suite à fixer nos idées sur l'acception qu'il convient de donner à ce mot *beauté*, dans son application à l'architecture, ainsi qu'à quelques autres expressions fort usitées, nous nous contenterons d'observer en ce moment, qu'un bel édifice est celui qui est disposé de manière à remplir le plus convenablement qu'il est possible l'usage auquel il est destiné; celui qui présente dans son ensemble, l'ordre, la variété, l'expression et la pureté d'exécution : toutes ces qualités étant ce dont l'harmonie se compose, nous ne craignons pas de dire que la perfection, ainsi définie, s'adapte à l'architecture de tous les pays et de tous les temps.

Quelques véritables artistes, guidés par cette intelligence supérieure qui est toujours le fruit d'une étude constante, ont réuni dans leurs ouvrages plusieurs de ces conditions; et les efforts qu'ils font seraient couronnés des plus heureux succès, si deux obstacles puissans ne s'opposaient encore fortement aux progrès de tout ce qui est le résultat des combinaisons de l'entendement, et en particulier aux progrès de l'architecture.

Des deux obstacles que nous allons citer, l'un semble, au premier aspect, avoir dans tous les temps exercé son empire, mais avec une influence plus ou moins active; l'autre tient à des causes passagères, dont nous offrirons un tableau abrégé; c'est à l'instruction à les détruire : mais, avant de présenter quelques vues sur cet objet, nous devons appeler l'attention des véritables amis des arts, et de ceux qui ont quelque influence

dans leur administration, sur la cause primitive des succès trop rares qu'obtiennent les artistes.

Je veux parler de cette manie de se connaître à tout : maladie qui croît et décroît dans le public, suivant la mutabilité de sa cause, et sur laquelle la célébrité des esprits qui en ont été atteints, a exercé une certaine influence. Cette branche de l'orgueil dont il est si dangereux d'enlever l'écorce; cette branche, que le temps détachera de son tronc, est étroitement liée à la partialité qui aveugle, dont les jugemens précipités repoussent chaque jour les efforts des artistes, et porte le découragement dans leur ame, ou tout au moins leur fait négliger la gloire, en les réduisant à dire, *On le veut ainsi;* enfin je dirai que cette maladie influe souvent sur les décisions les plus importantes. Tant qu'on ne voudra pas se renfermer dans le cercle de ses propres connaissances, et que dans les arts on voudra tout assujettir à des considérations journalières; tant qu'en architecture on négligera l'observation des lois relatives aux communications principales dans les villes; tant que par des raisons d'économie presque toujours mal entendue, on voudra conserver d'anciennes constructions pour en former des édifices nouveaux, et qu'après avoir consulté les artistes, on ne s'en rapportera pas à leur décision, ou qu'on se laissera guider par des vues étroites qui seules seraient capables de comprimer les élans du génie; enfin, tant qu'il existera des entraves si multipliées et si puissantes, il ne faut pas espérer de succès constans des tentatives qu'on pourra faire pour activer les progrès des arts : les plus belles conceptions resteront enfermées dans les porte-feuilles; les bâtimens publics ne présenteront que des vices dans leur disposition, et le peuple (qu'on doit aussi respecter dans les arts) n'aura jamais sous les yeux qu'une architecture mesquine, sans expression et fort au-dessous des constructions de l'Italie moderne, et du siècle dernier en France, dont nous aurons bientôt occasion de parler.

Voilà ce que peut produire ce vice des esprits, cette prévention confiante, contre laquelle je sens qu'il faut moi-même me prémunir avec attention.

Indépendamment de cette première cause, dont j'ai essayé d'indiquer l'influence funeste sur le génie de l'architecture, et de ceux qui voudraient atteindre à sa perfection, il en est une seconde qui est d'autant plus

dangereuse, qu'elle paraît tenir à une opinion vraie et bien fondée; c'est cette admiration qu'on se glorifie d'avoir pour les ouvrages des anciens, qui, portée jusqu'à la servilité, a eu de funestes conséquences : et j'en montrerai les effets, après avoir dit un mot de la marche de l'architecture, depuis la fondation de l'académie de France à Rome.

Lorsque l'organisation du corps social est vicieuse, on ne voit que de loin en loin quelques hommes supérieurs qui, quand ils sont assez heureux pour entrevoir ce qui serait à propos de faire pour le succès d'un établissement quelconque, si d'ailleurs ils ont du crédit, et si les circonstances les favorisent, réussissent à opérer le bien, et font fleurir, au moins pendant quelque temps, la branche d'industrie qu'ils ont vivifiée par d'utiles institutions.

Cependant, malgré leurs efforts, les obstacles croissant, les circonstances n'étant plus les mêmes, quelquefois l'établissement dégénère, il manque son but, et la société n'en recueille pas les fruits qu'elle devait en attendre.

C'est le tableau que nous offrent les arts, depuis le siècle brillant des *Richelieu* et des *Colbert*.

A cette époque, les lettres honorées et les arts favorisés par tous les moyens factices qui étaient au pouvoir de ces politiques habiles, on vit paraître une foule d'hommes qui, dans tous les genres, donnèrent des preuves de talent et de génie : des édifices immenses s'élevèrent de toutes parts : les uns embellirent les villes, d'autres furent destinés à l'utilité particulière, et quelques-uns au service public.

Ces ouvrages existent encore; ils sont vastes et d'une certaine magnificence : ils sont une preuve de ce qu'on doit attendre des efforts du génie, quand il est en honneur; cependant les architectes qui vécurent dans ce siècle extraordinaire, ne connaissaient que faiblement les ruines de la Grèce et de l'Italie.

Lebrun, à qui ces merveilles étaient plus connues, pressentit quels avantages les arts pourraient tirer d'un établissement qu'il proposa de faire à Rome; et l'académie de France fut créée en 1666.

Les jeunes artistes purent espérer d'y être envoyés pour prix de leurs efforts : ayant alors sous les yeux les plus beaux modèles, on dut attendre d'eux

d'eux qu'ils contribueraient à rappeler bientôt la peinture au bon goût et à la justesse de l'expression ; la sculpture, à la pureté des formes ; et l'architecture enfin, à la simplicité primitive dont elle s'était écartée.

Les élèves dans cet art ne profitèrent pas d'abord de ce nouveau moyen d'étude ; ils suivirent long-temps encore la méthode vicieuse qu'ils avaient reçue de leurs maîtres ; cependant le temps s'écoulait, et parmi les tentatives qui furent faites, on vit paraître l'ouvrage de *Blondel*, qui, ainsi que quelques autres, par ses principes faux ou mal appliqués, ne contribua que bien peu aux progrès de l'architecture.

La traduction de *Vitruve*, par *Perrault ;* les ouvrages de *Palladio*, de *Pirroligorio*, de *Serlio*, passèrent dans les écoles ; et les voyages que firent les artistes dans les lieux que ces maîtres avaient embellis, augmentaient la juste vénération que leurs ouvrages devaient inspirer.

Bramante et *Vignole* contribuèrent aussi à multiplier ces modèles d'un goût fin et éclairé, mais sans que tous ceux qui les observaient produisissent rien de semblable. Les grands architectes que nous avons cités, avaient été inspirés par les anciens ; les modernes les prirent aussi pour maîtres, malheureusement avec moins de succès.

Lorsque les ouvrages de *Peyre* l'aîné et de *Leroy* furent répandus dans les écoles, le premier échauffa le génie des jeunes architectes, et l'autre fit pressentir de quel intérêt deviendrait pour les arts un ouvrage complet sur les antiquités grecques.

Les études que les *Paris* et les *Renard* avaient apportées de Rome, furent copiées par leurs élèves, et bientôt par d'autres ; le goût de ces ouvrages précieux se répandit dans l'académie, où celui du dessin (étude en général si nécessaire à un architecte) commençait aussi à se développer. Ce changement devait concourir aux progrès de l'école : en effet l'architecture changea de face, l'on apporta plus de pureté dans l'exécution, et plus de variété dans la décoration des bâtimens.

C'est à cette époque que l'on a vu naître le talent de quelques hommes dont je blesserais sans doute la modestie, en plaçant ici leurs noms, et c'est à cette même époque que s'est développée dans toute sa force, cette admiration que les ouvrages des Grecs et des Romains méritent à si juste titre, mais dont l'effet a été de nous rendre plagiaires, et de nous éloigner

de la recherche des vrais principes de l'art; enfin qui nous a réduits (n'étant rien que par imitation) à construire du midi au nord de la France, des édifices dont la distribution est uniforme, et dans la décoration desquels on ne remarque d'autres ornemens que des patères, des autels, des têtes de victimes, &c. qui ont le très-grand inconvénient d'être sans analogie avec nos usages, de ne nous rappeler que des idées relatives aux mœurs des anciens et aux cérémonies de leur culte.

Il est très-peu d'artistes qui aient échappé à cet aveuglement, et qui aient fait cette réflexion : = Que la nature est une mine que l'architecture doit exploiter comme les autres arts; qu'elle peut y puiser une multitude d'idées ingénieuses et de combinaisons diverses, susceptibles de se lier dans la décoration des édifices, aux inventions de la poësie, et de remplacer avantageusement tous ces ornemens, précieux sans doute, mais dont la beauté ne peut pas balancer la nécessité de pouvoir reconnoître, à l'aspect d'un bâtiment, s'il est consacré à un usage public ou particulier, et si ce sont des Français ou des Grecs qui l'ont élevé.

Voilà ce que nous avions à dire de la seconde cause du peu de succès de ceux qui s'occupent à rappeler l'architecture au bon goût, dont la perte ne sauroit être garantie par l'*anticomanie*.

C'est à l'instruction qu'appartient l'avantage de détruire les préjugés trop communs dans les arts; mais pour détruire le dernier que nous venons de citer, il est un autre moyen indépendant de nous, que notre devoir nous commande d'indiquer :

C'est d'accorder aux jeunes artistes une confiance honorable : cette confiance sera la garantie des efforts qu'ils feront pour hâter la révolution dans les idées que l'on a sur l'architecture; c'est d'eux seuls enfin que l'on peut attendre ces essais heureux dont ils sont capables, et dont la vue enhardira à sortir des limites dans lesquelles le génie étoit renfermé. Les habitudes ont tant d'empire sur l'homme, qu'il est difficile d'espérer que les artistes déjà âgés renoncent à des erreurs que la coutume et les préjugés ont enracinées dans leurs esprits; ce n'est donc que des jeunes artistes que nous pouvons attendre cette utile réforme.

Essayons de résumer ce que nous venons de dire : nous avons observé que l'utilité de l'architecture, et le besoin de se livrer à son étude, étaient généralement reconnus, mais que la nécessité de tracer un nouveau plan d'instruction, n'était ni bien sentie, ni bien démontrée ; nous avons appelé l'attention sur la prévention trop généralement répandue contre nos moyens pour arriver à la hauteur des anciens dans les arts ; nous avons fait entrevoir qu'il étoit des perfections de tous les temps, comme de tous les pays, et que quelques artistes les auraient atteintes, si deux obstacles principaux ne s'opposaient à leurs efforts.

Nous avons reconnu que l'un de ces deux obstacles tenait à la nature des choses ; et c'est par cette raison que nous devons attendre de la paix qui succède naturellement aux orages révolutionnaires, tout ce qui peut tendre à favoriser les progrès de l'instruction, en laissant à chacun la liberté de prendre l'essor qui convient à son génie particulier, et à celui de l'art qu'il professe.

Nous avons ensuite tracé succinctement le tableau des causes secondaires qui s'opposent encore aux changemens qu'un bon plan d'instruction doit opérer dans les idées sur l'architecture : ces causes tiennent à l'abandon dans lequel on laissait les meilleurs établissemens, et dont l'académie d'architecture s'est fortement ressentie : ces causes tiennent au peu de principes que l'on donne aux jeunes artistes qui sont abandonnés sans guides au milieu d'un champ difficile à défricher, et qui, livrés au tourbillon de ce que les architectes appellent des *affaires*, sentent bientôt s'étouffer en eux le germe des talens qu'une méditation constante auroit pu développer. Nous avons vu, enfin, une fausse instruction donner naissance à ce respect irréfléchi et aveugle pour les ouvrages des anciens ; nous avons dit que c'était à l'instruction à détruire ces préjugés dans les arts, et nous avons indiqué un second moyen (qui n'est pas de notre ressort) de répandre plus généralement les idées nouvelles que doit faire naître un bon ouvrage sur l'enseignement de l'architecture.

Cependant, pour n'être pas injustes envers les anciens, et pour payer à la supériorité de leurs productions le juste hommage qui lui appartient, nous terminerons cette introduction en indiquant l'usage que nous

nous proposons de faire des fragmens d'édifices que le temps nous a conservés, tant en Grèce qu'en Italie.

Nous ferons sentir quels sont les nouveaux avantages que peut procurer l'étude des monumens antiques : elle entrera dans l'enseignement de l'architecture, et les ouvrages des Grecs étant plus près de la nature que ceux des Romains, nous serviront souvent, comme échelle de comparaison, pour appuyer les idées nouvelles qui doivent entrer dans l'instruction. Il résultera de ce travail une admiration plus éclairée et moins servile pour ces ruines échappées à la barbarie, et nous verrons naître enfin cette confiance qu'il convient d'avoir pour nous élever au-dessus des préjugés qui étouffent le génie en détruisant son audace.

Cette espérance flatteuse nous soutiendra dans le travail qui nous est confié ; nous aplanirons la route qu'il conviendra de suivre désormais; nous écarterons successivement les entraves qui s'opposent aux progrès de l'architecture ; les diverses branches de l'utilité seront reconnues et distinguées ; nous ferons connaître les rapports que la peinture et la sculpture ont avec l'architecture ; et comment ces deux premiers arts concourent à augmenter dans les édifices le caractère qui leur est propre ; nous les rendrons à leur dignité, et à la propriété (qui leur est commune avec la poësie) de contribuer, par les sensations qu'ils peuvent exciter, à augmenter les jouissances de l'homme, en faisant germer en lui les plus beaux sentimens.

Tels sont les avantages que nous espérons procurer à l'étude de l'architecture, par la forme que nous donnerons à notre enseignement.

Ces avantages, que nous osons promettre, ne peuvent être que successifs, attendu la difficulté de l'entreprise, et la lenteur de tout travail dans la conception d'un ouvrage élémentaire.

De la Théorie de l'Architecture.

Aperçu général.

La théorie de l'architecture doit enseigner les principes de la construction, de la distribution et de la décoration, ainsi que l'application de

ces principes à tout ce qui dépend de l'architecture, et ce qui se trouve compris dans les trois divisions générales, des bâtimens, des monumens et des fêtes.

De la Construction.

Elle se divise en quatre principales branches qui comprennent 1.° la *Maçonnerie* dont la coupe des pierres fait la partie principale; 2.° la *Charpenterie ;* 3.° la *Serrurerie ;* 4.° la *Menuiserie ,* auxquelles d'autres parties secondaires se rattachent, telles que la *Marbrerie* , le *Carrelage ,* la *Couverture ,* la *Vitrerie ,* la *Plomberie, &c., &c.*

Comme, dans les travaux civils, on en fait l'application à des constructions simples ou très-composées ; que dans ces constructions, on entre dans tous les détails que nécessitent le choix des matériaux et leur usage, nous ne les considérerons que sous les deux rapports, de l'économie et de l'influence, que leur apparence extérieure peut exercer sur le caractère des édifices ; enfin nous jetterons nos regards sur les limites que la construction a prescrites aux possibles en architecture.

De la Distribution.

La distribution consiste à disposer dans un terrain donné, un édifice ou bâtiment quelconque, en remplissant toutes les convenances générales ou particulières que réclameroit l'usage auquel il serait destiné.

Dans la distribution, toutes les parties doivent être en rapport de grandeur entre elles, autant que l'économie dans les bâtimens particuliers peut le permettre; et dans les établissemens publics, avec cette magnificence digne d'une nation éclairée.

De la Décoration.

La décoration sera la partie philosophique de l'architecture, par son influence directe sur nos sens et sur la morale publique : son principe est dans la nature ; c'est à l'architecte de génie à exploiter cette mine abondante : il doit en combiner les produits avec les usages et les mœurs des peuples chez lesquels il bâtit. C'est de l'harmonie de ces combinaisons que doivent naître ces images qui, dans les édifices nationaux, peuvent

faire passer dans l'ame l'amour de la justice, des hautes sciences, des arts utiles et de la liberté; et qui, dans les bâtimens particuliers, peuvent offrir des tableaux simples et vrais qui rappellent sans cesse l'amour de la nature et des vertus privées. Enfin c'est le sage emploi de ces images, qui peut préciser le caractère des édifices; parties bien essentielles de l'architecture, et qui se composent principalement de l'accord des trois principales branches de cet art, la construction, la distribution et la décoration.

Des Bâtimens en général.

Les bâtimens sont divisés en deux branches principales, qui ont chacune leur caractère et leurs attributs distinctifs: ce sont les bâtimens publics et les bâtimens particuliers.

Des Bâtimens publics.

Les bâtimens publics peuvent être considérés comme pouvant servir à l'éducation publique et au gouvernement: sous le premier rapport se trouvent compris, les *Écoles*, les *Bibliothèques*, les *Muséum*, *&c.* . . . . . et pour la *Gymnastique*, les *Bains*, les *Cirques*, les *Théâtres*, *&c.* . . . . . enfin, sous le rapport du gouvernement, sont compris les *Édifices* pour les *Assemblées du peuple*, la *Législation*, l'*Administration* et les *Tribunaux*.

Des Bâtimens particuliers.

Les bâtimens particuliers sont ceux des *villes* ou *ruraux*; dans les villes sont les maisons divisibles ou à *loyer*; ou celles d'*agrément*, qui n'offrent de logement que pour une famille. Dans cette sorte de bâtimens sont compris les *Manufactures*, les *Magasins*, les *Ateliers*, *&c.* . . . . les habitations rurales sont les *Fermes*, les *Granges*, les *Pressoirs*, les *Hôtelleries*, *&c.* . . . .

Dans les bâtimens publics et dans les bâtimens particuliers, une économie relative doit présider à leur composition et à leur exécution; l'ordre doit en être la base, et ses vues ne doivent pas être celles du moment. Une économie bien entendue porte au loin ses regards; c'est à elle que nous devons ces magnifiques restes échappés à la barbarie des

TABLEAU ANALYTIQUE,

POUR SERVIR À L'ÉTUDE DE L'ARCHITECTURE,

SOUS les rapports de ses trois parties qui sont : la CONSTRUCTION, la DISTRIBUTION, la DÉCORATION, et leur application aux Bâtimens, aux Monumens et aux Fêtes.

L'ARCHITECTURE se divise en trois branches principales....

- LA CONSTRUCTION consiste dans..
  - le choix des Matériaux........
    - L'Argile ou le Tuf.
    - La Terre cuite, comme
      - le Carreau.
      - la Tuile.
      - la Brique, &c.
    - Les Cimens.
    - La Pierre.
    - Le Marbre.
    - Les Bois.
    - Les Métaux, &c.
  - leur Usage dans la
    - Maçonnerie.
    - Charpenterie.
    - Menuiserie.
    - Serrurerie.
    - Plomberie.
    - Couverture.
    - Vitrerie, &c.
- LA DISTRIBUTION se considère sous les deux rapports de..
  - THÉORIE qui combine..........
    - les Données, qui sont..........
      - les Terrains......................
        - réguliers.
        - irréguliers.
      - les Besoins.....
        - généraux......
          - relatifs aux grandes communications de tous les points d'une Commune; à l'emplacement des Ponts; à la disposition des Places, des Jardins et de tous les Établissemens publics et particuliers.
        - particuliers.....
          - En assurant, par tous les moyens que l'art peut offrir, les avantages qui sont propres à chaque espèce d'Édifices, et en remplissant toutes les données des programmes.
      - les Convenances.
        - aux Mœurs......
          - qui prescrivent l'aisance et la simplicité dans les Bâtimens particuliers, l'ordre et le caractère dans les Édifices publics, et la magnificence dans les Monumens.
        - aux Climats....
          - chauds.
          - froids.
          - tempérés
          - qui nécessitent la suppression ou la modification de certaines parties, et qui déterminent l'inclinaison de la couverture des Bâtimens.
    - l'Économie, qui considère......
      - les Moyens.
      - la Durée.
  - PRATIQUE.....
    - Graphique.....
      - Plans.........
        - généraux......
          - qui indiquent les masses des Bâtimens et les vides qui les séparent, tels que les..........
            - Rues ou Avenues.
            - Places.
            - Jardins.
            - Cours, &c.
        - particuliers.....
          - de tout l'ensemble d'un Édifice.
          - de parties détachées telles que les..........
            - Galeries.
            - Salles.
            - Chambres & Escaliers.
      - Coupes qui déterminent principalement.....
        - le profil général des Terrains.
        - la hauteur des différens sols.
        - le profil de la totalité d'un Bâtiment, &c.
      - Détails.......
        - Portes, Croisées, Cheminées, &c.
        - Pieds-droits, Colonnes, &c.
        - Entablemens ou Corniches, &c.
    - l'Exécution.....
      - qui doit appeler l'attention sur la disposition des matériaux, s'ils sont apparens, ce qui constitue une décoration primitive.
- LA DÉCORATION est dans son usage.
  - CARACTÉRISTIQUE des..............
    - Bâtimens.......
    - Monumens.....
    - Fêtes..........
      - par le moyen des Images que produit..........
        - la Sculpture en..
          - Bois.
          - Terre cuite.
          - Pierre.
          - Marbre.
          - Métaux.
          - Figures et Ornemens. de bosse. Bas-reliefs et Rond
        - la Peinture......
          - en Détrempe.
          - à Fresque.
          - à l'Huile.
          - en Mosaïque.
          - Figures et Ornemens.
        - l'Incrustation de.
          - Bois.
          - Pierre.
          - Marbre.
          - Métaux.
          - Productions.....
            - naturelles.
            - artificielles.
        - la Gravure sur les divers Corps.
  - PHILOSOPHIQUE par son influence sur.
    - la Morale publiq. en retraçant.....
      - les Époques glorieuses............
      - les Traits d'héroïsme.............
      - les Découvertes utiles............
        - chez les Nations..
          - anciennes.
          - modernes.
    - les Vertus privées, en présentant dans des Tableaux variés..........
      - les Avantages que procure l'Étude..
        - de l'Homme.
        - de l'Agriculture.
        - des Sciences.
        - des Arts.......
          - en général.
          - en particulier.
      - les Dangers auxquels exposent..
        - l'Ignorance....
        - les Préjugés....
        - le Fanatisme....
          - en Morale et dans les Sciences.
    - les Jouissances de l'Homme, en le rappelant par des images simples et vraies..........................
      - au sein de la Nature.
      - à la culture des Beaux-arts.
      - aux charmes de l'Amitié.
      - aux Vertus philantropiques, &c.

APPLICATION aux..........

- BÂTIMENS..
  - Publics....
    - Éducation....
      - Écoles.
      - Bibliothèques.
      - Muséum
        - d'Arts.
        - d'Histoire naturelle.
      - Bains.
      - Cirques.
      - Théâtres.
      - Amphithéâtres, &c.
    - Gouvernement
      - Édifices pour...
        - Élections.
        - Législation.
        - Administration.
        - Tribunaux.
  - Particuliers.
    - des Villes....
      - Maisons.
      - Manufactures.
      - Magasins, &c.
    - Ruraux......
      - Fermes.
      - Granges.
      - Hôtelleries.
      - Pressoirs, &c.
- MONUMENS..................................
  - Fontaines.
  - Jardins.
  - Places.
  - Arcs de triomphe.
  - Obélisques, &c.
- FÊTES......................................
  - Chars.
  - Embellissemens.
  - Illuminations.
  - Feux d'artifice, &c.

dévastateurs du monde; restes que le temps n'altère que lentement, et à qui nous devons d'utiles leçons.

Des Monumens.

DANS les monumens, il faut établir une distinction importante; les uns, tels que les *Arcs de triomphe*, les *Colonnes*, les *Obélisques, &c.*... sont d'une utilité relative, et doivent leur naissance à des circonstances plus ou moins importantes; d'autres, à les considérer dans leur ensemble ainsi que dans leurs parties, sont d'une utilité généralement reconnue: ces monumens sont les *Jardins*, les *Places* et les *Fontaines*, dont l'usage doit être particulièrement dirigé vers la salubrité.

Des Fêtes.

LES fêtes sont de jour ou de nuit, et quelquefois réunissent ces deux époques d'une même journée.

Celles de jour comprennent les divers embellissemens, les amphithéâtres pour les spectateurs, les cirques pour les courses, les emplacemens pour les jeux, &c...... Les fêtes de nuit se composent plus particulièrement de feux d'artifice et d'illuminations.

Dans tous les cas la magnificence et l'ordre en sont les attributs principaux, et leur but est de faire naître dans tous les cœurs (à l'aide des grands tableaux qu'elles peuvent offrir) le sentiment de l'admiration; elles doivent élever l'ame du peuple qui en est le témoin, lui rappeler les époques glorieuses de son triomphe, et réchauffer en lui l'amour de la patrie, des vertus et de la liberté.

Nota. Le tableau analytique que nous joignons à ce cahier, servira de complément à l'aperçu qui le termine; il donnera une idée de la nature et de l'étendue du travail que nous avons entrepris. Mais quel que soit le désir que nous aurions eu de faire suivre à l'enseignement la marche indiquée par cet aperçu et le tableau, nous avons été obligés d'y renoncer cette année, et de suivre, dans ces études, l'ordre dont nous rendrons compte dans le prochain numéro.

BALTARD.

MÉMOIRE
SUR
LE DÉFILEMENT DES FORTIFICATIONS.

Un des principaux objets de tout ouvrage de fortification, est de garantir ceux qui le défendent, de l'effet des armes de ceux qui l'attaquent.

Si l'on considère les fortifications sous ce point de vue, le premier soin de l'ingénieur, le plus indispensable, doit être de garantir les défenseurs des ouvrages, de l'atteinte des balles et des boulets tirés de plein fouet. C'est aussi l'objet de cette partie de l'art de la fortification qu'on appelle le *défilement*.

La règle fondamentale du défilement est celle-ci : il faut disposer les ouvrages de manière que leur parapet garantisse tout ce qu'il serait dangereux d'exposer aux coups directs de l'ennemi (1). Je me propose de déduire de cette règle d'autres règles moins générales, mais d'une application plus immédiate et d'un usage plus commode. Plusieurs excellens mémoires ont déjà été faits sur le même sujet. J'essaierai, en m'aidant des idées qu'ils renferment, d'approcher davantage du but qu'on doit se proposer.

En parlant du défilement, on est obligé pour se faire entendre d'employer des figures, de réduire à des opérations graphiques les opérations qui sur le terrain doivent se faire sans règles, sans compas, mais seulement avec des alignemens et quelques perches. Ainsi l'apparence de complication que la construction des figures peut donner au défilement, disparaît lorsqu'on exécute ce qu'elles ne font qu'indiquer. Je suppose néanmoins, qu'outre les principes de la fortification, l'on connaisse ceux de la géométrie descriptive.

(1) Par coups directs, j'entends ici ceux qui suivent une ligne droite ou ne s'en écartent pas très-sensiblement, comme les coups de fusil et les coups de canon tirés de plein fouet, et non pas seulement ceux qui frappent perpendiculairement les faces des ouvrages.

PREMIÈRE

PREMIÈRE PARTIE.

Notions préliminaires.

On doit considérer dans le défilement principalement trois choses :

1.° L'espace d'où peuvent partir les coups de l'ennemi dirigés contre l'ouvrage qu'on veut défiler. L'ennemi pouvant s'exhausser plus ou moins, cet espace s'étend à une certaine hauteur au - dessus du terrain qui environne l'ouvrage. Il s'étend aussi à une certaine distance horizontale de l'ouvrage : nous en déterminerons bientôt les limites ;

2.° L'espace que l'on veut soustraire aux coups de l'ennemi, ou défiler ;

3.° La masse des parapets (1), qui, lorsqu'un ouvrage est bien défilé, doit intercepter tous les coups directs, toutes les lignes droites tirées de l'espace contre lequel on veut se couvrir, vers celui qu'on veut couvrir.

J'appellerai l'*espace extérieur* celui contre lequel on veut se couvrir, et l'*espace intérieur*, celui que l'on veut couvrir.

On doit voir déjà un grand rapport entre la nature des données des problèmes de défilement et celle des données des problèmes d'ombres. Les coups directs remplacent les rayons lumineux de ces derniers problèmes ; l'*espace extérieur* remplace le corps lumineux ; la masse des parapets remplace le corps opaque. L'ombre absolue de ce corps est l'étendue entière défilée par les parapets ; et l'*espace intérieur* doit être renfermé dans cette étendue.

L'*espace extérieur* et le parapet étant donnés, on peut se proposer de déterminer géométriquement les limites de l'étendue défilée. On y parviendra par le même procédé qu'on emploîrait pour déterminer l'ombre du parapet, si tous les points de l'*espace extérieur* étaient lumineux. Un plan qui se mouvrait en s'appuyant toujours sur le parapet et sur la surface qui termine l'espace extérieur, engendrerait par ses intersections successives une nouvelle surface qui termine l'étendue défilée. J'appellerai la surface ainsi engendrée, *surface de défilement.*

---

(1) Sous cette dénomination de *parapets*, je comprends les traverses, parados, &c. qui ne sont, à proprement parler, qu'une espèce de parapets.

La partie des parapets sur laquelle doit s'appuyer le plan générateur, n'est souvent qu'une seule ligne droite, la crête intérieure du parapet. On voit qu'alors *la surface de défilement* devient un plan passant par cette crête, et tangent à la surface qui termine l'*espace extérieur.*

Ce *plan de défilement* n'est pas seulement tangent à la surface qui termine l'espace extérieur, mais il laisse toute la surface au-dessous de lui ; c'est-à-dire que la touchant en un ou plusieurs points, il ne la coupe nulle part : cette circonstance est essentielle, et elle sera sous-entendue par tout où je parlerai du plan de défilement.

Je vais maintenant examiner plus en détail la nature de l'*espace extérieur*, de l'*espace intérieur* et des *parapets.*

L'ESPACE EXTÉRIEUR ne s'étend pas indéfiniment. A une certaine distance les coups de l'ennemi cessent d'être dangereux pour l'ouvrage défilé ; mais le danger de ces coups diminue par degrés insensibles. On ne peut pas réellement assigner le point où il cesse tout-à-fait : cependant nous supposerons que la limite au-delà de laquelle l'ennemi ne peut plus nuire, est à 1400 mètres mesurés horizontalement depuis les saillans des ouvrages qu'on défile. Une précision plus grande dans la manière de mesurer cette distance, seroit inutile. C'est donc la portion de cercle tracée sur la projection horizontale du terrain avec un rayon de 1400 mètres du saillant d'un ouvrage comme centre, que j'appellerai *limite horizontale de l'espace extérieur* (1).

L'ennemi ne peut pas s'élever au-dessus du terrain au-delà d'un certain point ; on peut donc concevoir que l'*espace extérieur* est terminé dans sa partie supérieure par une surface dont la hauteur au-dessus du terrain est dans tous ses points égale à celle que l'ennemi ne peut outre-passer. Il n'est pas nécessaire de se couvrir contre des points plus élevés : ils ne font pas partie de l'*espace extérieur.* Mais cette hauteur verticale des points de la limite supérieure dépend des travaux que

(1) Lorsqu'il s'agit de ne défiler ou couvrir que des revêtemens, on peut restreindre l'étendue horizontale que l'on donne ici à l'espace extérieur. En général, toutes les données doivent être déterminées dans chaque cas particulier, suivant les circonstances.

l'ennemi jugera convenable de faire. Il semble donc qu'on ne puisse la déterminer d'une manière précise ; et sans cela cependant il serait impossible de considérer géométriquement l'espace extérieur, ni de parvenir à des résultats rigoureux. Mais il ne peut y avoir aucun inconvénient à suivre, lorsque le terrain est inégal, une méthode analogue à celle que l'on emploie lorsque le terrain est horizontal et le relief de la fortification uniforme, et l'on fait disparaître par-là toute difficulté.

Dans ce dernier cas, la hauteur au-dessus de laquelle l'ennemi devrait s'élever pour plonger dans un ouvrage, est égale au commandement de l'ouvrage lui-même sur la campagne. On juge donc que l'ennemi ne voudra ou ne pourra effectivement pas s'élever au-dessus de cette hauteur. Ainsi l'on suppose, pour ce cas, que la surface qui termine l'*espace extérieur* est dans tous ses points élevée au-dessus du terrain, d'une quantité égale au commandement de l'ouvrage. Rien n'empêche d'étendre cette supposition au cas où le terrain, au lieu d'être plan, est irrégulier. Il en résultera même cet avantage, c'est que plus un ouvrage sera important, et plus il présentera de difficultés à l'ennemi ; car ordinairement le relief des ouvrages est proportionné à leur importance.

Ainsi, quel que soit l'ouvrage qu'on veut défiler, on supposera que les points les plus dominans d'où l'ennemi puisse tirer dans l'ouvrage, sont dans une surface élevée par tout au-dessus du terrain d'une hauteur égale au relief de l'ouvrage au-dessus du terrain. Mais comme le plus souvent ce relief n'est pas le même pour les différentes parties d'un ouvrage, on se réglera sur le relief qu'on donne ordinairement aux ouvrages de la même espèce établis sur un terrain horizontal.

Ainsi, sur le terre-plein du chemin couvert d'un front bien défilé, on doit être défilé d'une surface élevée de 25 décimètres au-dessus du terrain environnant ; sur le terre-plein du rempart de la demi-lune, d'une surface élevée de 45 décimètres; sur le terre-plein du rempart du corps de place, d'une surface élevée de 55 décimètres, si l'on suppose que ces hauteurs 25, 45, 55 décimètres sont les commandemens qu'il faut donner sur la campagne au chemin couvert, à la demi-lune et au corps de place d'un front établi en terrain horizontal. J'appellerai la

surface ainsi déterminée relativement à un ouvrage, *surface extérieure*, parce qu'elle limite dans un sens l'espace extérieur (1).

Je suis d'ailleurs loin de penser qu'il faille s'asservir strictement à cette règle, quelques décimètres de plus ou de moins dans la détermination de la hauteur de la surface extérieure au-dessus du terrain, importent peu, pourvu que cette hauteur ne soit pas au-dessous de 25 à 30 décimètres. Si l'on examine les anciennes méthodes de défilement, on verra que la même règle y est observée, quoique considérée sous un point de vue différent.

L'ESPACE INTÉRIEUR ou l'espace qu'il faut couvrir, est aussi terminé dans sa partie supérieure par une surface que j'appellerai *surface intérieure*. Tous les points de cette surface sont élevés au-dessus du terre-plein des ouvrages d'une même hauteur, réglée par celle des objets qui doivent être à couvert sur ce terre-plein ; cette hauteur est ordinairement de 25 décimètres. L'*espace intérieur* doit comprendre toujours les talus intérieurs des parapets jusqu'à la crête ; autrement les soldats placés sur la banquette seraient trop découverts. L'*espace intérieur* doit aussi contenir les revêtemens en maçonnerie, que l'ennemi pourrait, sans cela, détruire de loin.

Lorsque, par la nature d'un problème de défilement, la *surface de défilement* est donnée tandis que la *surface intérieure* ne l'est pas, il convient en général de prendre pour surface intérieure la partie de la surface de défilement qui répond à l'intérieur de l'ouvrage; on met alors chaque point du terre-plein au-dessous de cette surface, de 25 décimètres, ou de telle autre quantité. Ainsi, lorsque la surface de défilement est un plan, le terre-plein est un autre plan parallèle et inférieur de 25 décimètres. La raison de cela est qu'ordinairement la surface de défilement a une pente qui descend de la crête du parapet vers l'intérieur de l'ouvrage. Or il faut que la surface intérieure passe aussi par la crête du parapet, il faut qu'elle soit soumise à la surface de défilement, et

(1) J'ai dit que tous les points de la surface extérieure devaient être à la même distance verticale du terrain. On pourrait faire varier cette distance ; par exemple, la faire plus grande près de l'ouvrage que loin, dans le prolongement des faces, que dans les autres endroits. On sent quel pourrait être l'objet de ces différences.

en même temps il faut lui donner le moins de pente possible, la direction horizontale étant la plus favorable pour le terre-plein (1); l'on ne peut mieux remplir ces conditions qu'en faisant coïncider la surface intérieure avec la portion de surface de défilement qui est dans l'intérieur de l'ouvrage.

Le parapet d'un ouvrage, soit qu'il faille construire l'ouvrage, soit qu'il faille seulement en rectifier le défilement, est quelquefois entièrement donné, c'est-à-dire, son tracé et son relief sont déterminés; d'autres fois l'un des deux, ou tous les deux ensemble, sont indéterminés. Dans ces derniers cas on peut chercher quelle est à l'égard du défilement la meilleure situation qu'on puisse donner au parapet; mais plusieurs considérations indépendantes du défilement doivent influer aussi sur cette détermination. Telle est, par exemple, celle de l'objet de l'ouvrage aux différentes époques d'un siége; celle de ses rapports avec d'autres ouvrages; celle de l'égalité des déblais et des remblais; celle de la dépense, de la possibilité de la construction, &c. Il n'est pas possible, dans un traité de défilement, à moins d'en faire un cours complet de fortification, d'avoir égard à cette multitude de considérations étrangères, dont l'incertitude et les variations compliqueraient sans utilité les problèmes. Je les écarterai donc, en supposant que l'on connaît d'avance dans chaque cas l'influence qu'elles doivent avoir sur la construction des ouvrages. Je remarquerai à ce sujet que si l'on ne donnait attention qu'à ces seules considérations étrangères au défilement, il y aurait pour chaque tracé différent d'un ouvrage un relief le plus convenable, qu'il ne faut jamais perdre de vue en le défilant, afin de s'en écarter le moins possible.

L'ensemble d'une fortification, c'est-à-dire, les ouvrages et leur intervalle, forme une enceinte. J'appellerai *tracé général* la disposition de l'enceinte considérée indépendamment du tracé des ouvrages qui la composent, et *tracé particulier* la disposition des faces de ces mêmes ouvrages.

(1) Je fais ici abstraction de la petite pente qu'on doit donner aux terre-pleins, pour l'écoulement des eaux.

J'ai posé les principes du défilement, maintenant je vais en déduire les règles les plus utiles dans chaque cas. Le cas que je considérerai d'abord est celui où il s'agit de défiler un ouvrage dont le parapet est déterminé, et dont on ne peut changer que le terre-plein. Ce cas, qu'on néglige d'examiner dans les traités de défilement, peut cependant se rencontrer, et il me paraît nécessaire de le voir avant les autres. Je considérerai ensuite le cas où le tracé est donné, mais où le relief ne l'est pas entièrement. Je terminerai ce mémoire par les règles qu'on doit suivre dans le tracé des ouvrages de fortification, lorsqu'on veut avoir égard à leur défilement.

DEUXIÈME PARTIE.

Du Défilement d'un ouvrage dont le parapet est déterminé.

LES données, dans ce cas-ci, sont la crête du parapet de l'ouvrage, le terrain qui l'environne, et par conséquent la surface extérieure, dont tous les points seront élevés au-dessus du terrain d'une hauteur égale au relief de l'ouvrage (1), et qui s'étendra horizontalement jusqu'à 1400 mètres du saillant. Voici comment je représenterai ces données.

X Y est (*fig.* 2) l'intersection des deux plans de projection; *a b c* et *a' b' c'* sont les projections horizontales et verticales de la crête du parapet de l'ouvrage, composé seulement de deux (2) faces droites et indéfinies.

Tout ouvrage de fortification étant ordinairement composé de parties droites formant des angles, ce que je dirai ici d'un angle seul, pourra s'appliquer à des ouvrages plus compliqués, en faisant autant d'opérations qu'il y aura d'angles.

J'imagine que la surface extérieure est enveloppée par une surface

---

(1) On se souvient que j'entends en général par relief de l'ouvrage, le relief qu'on donne ordinairement aux ouvrages de la même espèce en terrain horizontal.

(2) Ce que je dis des faces d'un ouvrage, ici et dans le reste de ce mémoire, doit s'entendre en général de toutes les parties droites d'un parapet, que ce soit réellement une face, un flanc ou une courtine.

conique (1), dont le sommet est au saillant projeté en *a* et *a'*. Soit *f g h i* l'intersection de cette surface conique avec le plan vertical. Soient *B'* et *C'* les traces sur le plan vertical des deux faces prolongées, *B' C'* sera la trace du plan passant par ces mêmes faces. Si cette trace

---

(1) Comme je fais dans la suite un assez grand usage de cette surface conique qui enveloppe la surface extérieure, et de son intersection par le plan vertical, je crois devoir entrer dans quelques détails sur la manière de construire cette intersection. On sera en effet obligé de la construire, toutes les fois qu'on voudra appliquer à des cas réels les méthodes graphiques que j'indique. Cependant, on verra dans la suite du mémoire, qu'aux opérations graphiques qui ne se font que sur une représentation plus ou moins inexacte, plus ou moins insuffisante, des données réelles du problème, on peut substituer dans tous les cas des opérations très-simples, faites sur les données elles-mêmes. Lorsqu'on veut défiler un ouvrage, au lieu de rester dans son cabinet et de s'en fier à des plans, à des nivellemens, il vaut mieux aller dans l'ouvrage lui-même, et consulter le terrain. Sous ce rapport, ce qui suit est à-peu-près inutile; aussi me suis-je déterminé à le rejeter dans une note.

On doit avoir un plan exact du terrain qui environne l'ouvrage jusqu'à 1400 mètres du saillant. Ce terrain doit être nivelé de manière que l'on puisse en faire des profils dans toutes sortes de directions. On doit de plus avoir déterminé la hauteur de la surface extérieure au-dessus du terrain, hauteur que je nommerai *H*.

Cela posé, au lieu de concevoir d'abord la surface conique qui enveloppe la surface extérieure, j'en conçois une autre dont tous les points sont verticalement inférieurs à ceux de la première, de la quantité *H*, il est évident que cette seconde surface enveloppera le terrain, comme la première enveloppe la surface extérieure, et que son sommet sera dans un point inférieur au sommet de la première, de la quantité *H*.

Je suppose que la figure 1 représente le terrain rapporté au plan horizontal qui passe par le sommet de la seconde surface conique, *P Q R* est la limite horizontale de l'espace extérieur, *X Y* est l'intersection des deux plans de projection, *A* est la projection horizontale des deux sommets des surfaces coniques, *A'* est la projection verticale du sommet de la première et *A'* celle du sommet de la seconde. On construira une suite de profils du terrain passant tous par le point *A*.

Je suppose que *A K* soit la ligne suivant laquelle un de ces profils est coupé; il est recouché sur le plan horizontal, en tournant autour de *A K* comme charnière. *B S* est sur le plan vertical son intersection avec le plan du profil, et *B* s est sur le profil la même intersection, b^3 d^2 c^1 e^2 k^3 est l'intersection du terrain.

Par le point *A* on menera à cette courbe une tangente *A* c' k'. Cette tangente est évidemment sur la seconde surface conique; elle coupe la verticale *B* s en un point b', ainsi une ligne qui serait verticalement au-dessus de celle-ci d'une quantité *H*, et qui par conséquent se trouverait sur la première surface conique, couperait cette même verticale *B* s en un point plus élevé que b' d'une quantité *H*. Si donc on porte sur la verticale *B* s du plan vertical de projection une hauteur *B b'* égale à *B* b' + *H*, l'extrémité de cette verticale sera l'un des points de l'intersection de la surface conique qui enveloppe la

laissait entièrement au-dessous d'elle la courbe *f g h i*, le plan qui passe par les deux crêtes laisserait également au-dessous de lui la surface conique, et par conséquent la surface extérieure qu'elle enveloppe; on pourroit donc le regarder comme un plan de défilement, et si tous les points du terre-plein de l'ouvrage étaient verticalement au-dessous de ce plan d'une quantité suffisante comme de 25 décimètres, l'ouvrage serait défilé.

---

surface extérieure. On voit que si *x a b y* est une ligne élevée au-dessus de *X A B Y* de la quantité *H*, il suffira de porter *B* b' de *b* en *b'* pour trouver le point d'intersection *b'*.

On opérera de même sur les autres profils passant par le point *A*, et l'on obtiendra une suite de points comme le point *b'*, par lesquels on fera passer une courbe *f g h i*, qui représentera, aussi exactement que le nivellement et le nombre des profils pourront le permettre, l'intersection d'une surface conique qui enveloppe la surface extérieure et qui a son sommet projeté en *A* et *a*.

Je vais indiquer rapidement une ou deux autres opérations qui ont un rapport immédiat avec la précédente, et qui pourront être utiles dans la solution graphique de quelques problèmes de défilement.

Soit *l m* une ligne tangente en *b'* à la courbe *f g h i*. Elle peut être regardée comme la trace d'un plan tangent à la surface conique, et tangent par conséquent à la surface extérieure qu'elle enveloppe. Si l'on demande à déterminer sur le plan du terrain le point où se fait la tangence, on trouvera, au moyen du profil qui passe par *b'* et qui est celui que représente la figure, que le point de tangence doit être sur le profil, supérieur au point c d'une quantité *H*, et qu'il est projeté en *C* sur le plan horizontal.

Soit *n o* la trace d'un plan qui, passant par le sommet de la surface conique qui enveloppe la surface extérieure, coupe cette dernière surface. Si l'on demande de déterminer sur le plan la projection de cette intersection, on recourra encore aux profils. Pour le profil *A K*, par exemple, on portera bb^2 de *B* en b^2, on tirera par *A* et b^2 Ab^2k^2. Cette ligne est sur le profil, l'intersection d'un plan inférieur de la quantité *h* au plan dont la trace est *n o*. Elle coupe l'intersection du terrain en d^2 et e^2, et ceux où le plan dont la trace est *n o* couperait la surface extérieure, seraient verticalement au-dessus de ceux-ci de la quantité *H*; ces points mis en projection horizontale donnent *D* et *E*. On cherchera de même d'autres points par lesquels on fera passer une courbe *S T U V*; cette courbe sera la projection horizontale de l'intersection du terrain par un plan inférieur de la quantité *H* au plan dont la trace est *n o*, et en même temps celle de l'intersection de la surface extérieure par ce dernier plan.

Si l'on ne pouvait défiler un ouvrage d'une hauteur dangereuse, on pourrait, par le moyen que je viens d'indiquer, trouver sur le plan la portion de la hauteur qu'il faudrait raser ou occuper par des ouvrages de fortification. Il n'est pas toujours possible d'employer le premier parti, ni toujours sûr d'employer le second, car par des ouvrages on ne fait que retarder l'ennemi. On sait aussi qu'en multipliant trop les ouvrages, on diminue quelquefois la force réelle d'une place.

Mais

Mais il peut arriver que la trace $B' C'$ laisse au-dessus d'elle une portion de la courbe $f g h i$. Cette circonstance indiquera qu'une partie de la surface extérieure surmonte le plan passant par les deux crêtes. Or cette portion de la surface extérieure, que je nommerai *hauteur dominante*, peut se trouver, relativement au prolongement de chacune des faces, ou en avant d'elles, ou en arrière, ou dans leur prolongement.

Il résulte de-là différentes subdivisions du cas qui fait l'objet de cet article. Je vais en examiner quelques-unes d'où l'on déduira facilement la manière d'opérer dans les autres.

Je suppose d'abord que la partie de l'intersection $f g h i$ qui surmonte la trace $B' C'$, est située entre les points B' et C', c'est-à-dire que la hauteur dominante se trouve, relativement aux deux faces, en avant de leur prolongement. C'est le cas représenté dans la figure deuxième.

Le plan mobile, qui en se mouvant sur la crête $a b c$ et la surface extérieure engendre la surface de défilement, passera toujours par le point a. Ainsi, il touchera toujours la surface conique qui enveloppe la surface extérieure. La trace de ce plan mobile sur le plan vertical touchera donc aussi toujours l'intersection $f g h i$.

Si le plan mobile passe d'abord par la face $a b$, sa trace passera au point B' et sera $B' h$ tangente en h à la partie de la courbe $f g h i$ qui surmonte la ligne $B' c'$. S'il se meut ensuite en pivotant autour du point a, jusqu'à ce qu'il passe par l'autre face $a c$, le point de tangence h se mouvra de h en g, et la trace du plan mobile prendra la position $g C'$. On voit donc qu'une partie de la surface de défilement sera dans ce cas-ci formée par la portion du cône tangent dont l'intersection est comprise entre g et h, et par les deux plans qui touchent ce cône suivant les arêtes qui passent à ces deux mêmes points.

L'intersection de cette surface de défilement avec le plan vertical est donc la ligne mixte $C' g h B'$, et son intersection avec un autre plan vertical parallèle au plan de projection et qui coupe les deux faces de l'ouvrage suivant $q r$, sera projetée en $b' h' g' c'$. Ainsi nous connaissons la partie de cette surface qui est dans l'intérieur de l'ouvrage, la seule qu'il nous importe de considérer. Il ne s'agit plus maintenant, pour que l'espace intérieur soit défilé, que de le soumettre à cette surface. Ainsi,

l'on prendra cette surface même pour surface intérieure, et l'on disposera le terre-plein de manière qu'il lui soit soumis dans tous ses points, de 25 décimètres.

Comme il serait incommode de donner une forme courbe au terre-plein, on peut prolonger les deux portions planes jusqu'à leur intersection ; ce qui abaisse le terre-plein dans cet endroit un peu plus qu'il n'est nécessaire, et rend le défilement d'autant plus certain. C'est ce que j'ai indiqué dans la projection verticale $b' \; d' \; c'$ du profil coupé suivant $q\,r$.

On remarquera qu'ici la surface de défilement laisse entièrement au-dessous d'elle les talus intérieurs des parapets, ce qui est une condition essentielle pour que l'ouvrage puisse être défilé par son moyen.

Je passe à une autre subdivision du cas principal que j'examine maintenant ; je supposerai que le plan des crêtes se trouve dominé par trois hauteurs, l'une opposée aux deux faces et les autres en arrière du prolongement de chacune d'elles.

Dans ce cas, représenté par la figure 3, il faut imaginer par chacune des faces, 1.° un plan tangent aux hauteurs dominantes qui sont en avant ; 2.° un plan tangent aux hauteurs dominantes en arrière. $B'\,h$ et $C'\,g$ sont les traces des deux premiers plans, elles sont tangentes à l'intersection de la surface conique en h et g. $B'\,l$, $C'\,k$ sont les traces des deux autres qui sont aussi tangentes à cette intersection en l et k.

Il est évident que pour que les talus intérieurs des parapets soient cachés aux hauteurs dominantes placées en arrière du prolongement des faces, il faut qu'il y ait entre les parapets et ces hauteurs une masse de terre qui s'élève au moins jusqu'au plan qui passe par la crête du parapet et qui touche les hauteurs. Cette masse de terre est une traverse qu'on place dans l'intérieur de l'ouvrage.

Dans le cas présent, une seule masse de terre servira de traverse pour les deux faces, et la meilleure direction qu'on puisse lui donner, est celle de l'intersection des deux plans tangens aux hauteurs en arrière. Car alors elle aura le plus petit relief possible, ce qui est important pour qu'elle embarrasse moins l'ouvrage. Ainsi, dans la figure, après avoir projeté horizontalement en M le point M' d'intersection des traces $k\,C'$ et $l\,B'$, on a tiré $M\,a\,m$ et $M'\,a'\,m'$ qui sont les projections horizontales

et verticales de l'intersection des deux plans, et par conséquent de la crête de la traverse.

Quant au terre-plein, il doit être défilé de part et d'autre de la traverse, de la même manière que s'il n'avait à craindre que les hauteurs qui sont en avant des faces correspondantes. Ainsi, la tangente $B' h$ sera la trace du plan de défilement de la face $a b$, et la tangente $C' g$ sera la trace de celui de la face $a c$. Sur le profil de l'ouvrage coupé suivant $q r$, les traces de ces quatre plans seront respectivement parallèles aux traces des mêmes plans sur le premier plan vertical. Les lignes du profil du terre-plein seront également parallèles aux traces $b' h' c' g'$, et inférieures de 25 décimètres.

Je ne m'arrête pas aux autres détails de la construction de la figure, qui sont assez évidens.

Les exemples qui précèdent suffisent pour montrer comment on doit opérer dans des cas différens, mais où la crête du parapet est aussi donnée. Ainsi, dans celui où il n'y aurait qu'une seule hauteur dominante placée de manière à prendre à revers une des faces, il suffirait d'imaginer un plan passant par la crête du parapet de cette face et tangent à la hauteur dominante. Il faudrait ensuite placer dans ce plan la crête d'une traverse qui garantirait la face des revers. Cette traverse aurait d'autant moins de relief qu'on la rapprocherait davantage de la crête du parapet. Si on lui donnait une direction parallèle à celle du parapet, elle deviendrait un *parados*.

Lorsqu'on emploie une traverse, il faut toujours songer à deux choses, 1.° que si elle ne passe pas précisément au saillant de l'ouvrage, une petite portion du parapet de la face prise de revers, près de ce saillant, ne sera pas défilée (1); 2.° que la traverse doit être assez prolongée en arrière pour que tout l'ouvrage soit défilé.

Lorsque la hauteur dominante se trouve dans le prolongement de l'une des faces, ou, en d'autres termes, lorsque cette face va ficher dans l'espace extérieur, il n'y a plus moyen de défiler l'ouvrage, à moins

(1) Ceci montre que lorsqu'on détourne une traverse près du saillant, afin de ne pas perdre les feux dirigés sur la capitale, on tombe dans l'inconvénient de ne pas défiler ce saillant.

de placer une masse de terre sur le parapet même, ce qui changerait le relief et sortirait des conditions du problème.

J'ai dit que l'on peut rencontrer dans la pratique, des circonstances où le relief est déterminé, et où par conséquent les méthodes précédentes trouvent leur application. C'est ce qui arrive lorsqu'on a donné à un ouvrage autant de relief qu'il est possible sans être parvenu à le défiler.

Quelquefois des ouvrages de fortification peuvent tenir lieu de traverses pour défiler d'autres ouvrages, du moins jusqu'à un certain point. Ainsi, un cavalier peut servir de traverse dans un bastion, un bastion dans une contre-garde ou dans son chemin couvert, &c.

Les opérations que j'ai indiquées se réduisent à celle-ci : faire passer par une ligne donnée un plan tangent à la surface extérieure. Pour exécuter cette opération sur le terrain, dans un ouvrage dont les parapets sont déjà construits, on fera placer sur la hauteur dominante, au point où l'on jugera que la tangence doit avoir lieu, un jalon bien apparent, élevé de la même hauteur que les points de la surface extérieure. Ensuite on cherchera dans l'ouvrage un point tel qu'en y plaçant l'œil, l'extrémité supérieure du jalon se confonde avec la crête du parapet par laquelle le plan cherché doit passer. Ce point sera dans ce plan même (1).

Lorsque l'on a déterminé d'une manière quelconque le plan de défilement dans lequel doit être la crête du parapet d'un ou de plusieurs ouvrages, on peut avoir besoin d'un moyen simple pour trouver rapidement sur le dessin le relief des différens points des ouvrages. Ce moyen consiste dans ce que les ingénieurs militaires appellent l'*échelle de défilement*. Cette échelle est, sur le plan de projection horizontale, la projection d'une ligne qu'on suppose tracée dans le plan de défilement entre deux points d'une hauteur connue. On connait par conséquent l'inclinaison de cette ligne et la hauteur de tous ses points, hauteur qu'on

(1) Cette méthode pratique n'est pas *absolument*, mais elle est *suffisamment* exacte. On verra dans la suite une autre méthode pour mener un plan tangent à la surface extérieure, par une ligne donnée, qui est rigoureuse et qui n'exige point qu'un jalon soit placé au point de tangence, mais elle suppose qu'on peut faire passer un plan tangent au terrain par une ligne inférieure à la ligne donnée, facilité que l'on n'a pas, lorsque cette ligne donnée est la crête d'un parapet déjà construit.

indique le long de la ligne par des cotes et des divisions semblables à celles de l'échelle d'un dessin. Le plan de défilement étant donné, on connaît aussi la direction des lignes horizontales tracées sur ce plan. La hauteur de chacune de ces lignes horizontales se trouvera indiquée par la cote du point correspondant de l'échelle de défilement.

Cela posé, pour connaître la cote d'un point quelconque de la crête d'un parapet qui doit être dans le plan de défilement, il suffira de tirer par ce point une ligne dans la direction des horizontales, la cote de l'échelle correspondant à cette ligne, sera celle de toute la ligne et par conséquent du point de la fortification qu'elle contient. Je ne m'arrête pas davantage sur cette méthode très-bien expliquée dans un excellent traité de fortification.

En résumant cette seconde partie, on voit qu'un ouvrage peut être défilé de trois manières : la première a lieu lorsque le plan passant par la crête du parapet de l'ouvrage, surmonte entièrement l'espace extérieur, ou qu'il n'y a point de hauteurs dominantes. Alors le terre-plein peut être un seul plan parallèle à celui qui passe par la crête.

La seconde manière a lieu lorsque les hauteurs dominantes sont toutes opposées aux faces de l'ouvrage. Alors le terre-plein doit être creusé comme dans le cas de la figure 2.^{e}

La troisième manière a lieu lorsque les hauteurs dominantes voient à revers quelqu'une des faces. Il faut dans ce cas des traverses qui interceptent les feux de revers, comme dans la figure 3.e Ces traverses doivent passer par le saillant de l'ouvrage, et en général s'écartent peu de la capitale. Je les appellerai par cette raison et pour les distinguer, *traverses en capitale.*

TROISIÈME PARTIE.

Du défilement d'un ouvrage dont le tracé est donné, mais dont le relief ne l'est pas entièrement.

QUOIQUE le tracé d'un ouvrage fût donné, rien ne serait plus aisé que de le défiler, si l'on était absolument maître de son relief; il suffirait

de prendre un plan quelconque qui laissât au-dessous de lui toute la surface extérieure, et de placer dans ce plan la crête du parapet de l'ouvrage ; on donnerait alors pour terre-plein à l'ouvrage un autre plan parallèle au premier, et inférieur de 25 décimètres.

Mais le relief de la fortification a des règles indépendantes du défilement, qui ne permettent pas de le sortir de certaines limites, et qui souvent le déterminent tout-à-fait dans de certains points : on ne peut plus prendre alors un plan de défilement quelconque, il faut donc chercher entre tous les plans qui surmontent la surface de défilement, celui qui donne le relief le plus convenable.

Il peut même arriver qu'aucun plan de défilement ne donne un relief convenable, c'est-à-dire qui soit par tout entre les limites indiquées par les règles indépendantes du défilement ; il faudra se résoudre, dans ce cas, à mettre la crête du parapet de l'ouvrage dans un plan surmonté par des hauteurs dominantes ; et alors, suivant que ces hauteurs prendront ou ne prendront pas les faces de l'ouvrage à revers, on le défilera par une traverse en capitale, ou en creusant son terre-plein.

Je vais entrer dans quelques détails sur la manière d'employer la première méthode de défilement, c'est-à-dire, sur la manière de trouver, dans le cas où cela est possible, un plan de défilement qui surmonte entièrement la surface extérieure. Cette méthode est évidemment la meilleure, et il ne faut recourir aux autres que lorsqu'elle n'est pas praticable.

Le tracé de l'ouvrage à défiler, les limites supérieures et inférieures de son relief, la surface extérieure étant données, on voit que le problème se réduit à ceci : trouver un plan qui soit tangent à une surface extérieure donnée, et qui passe entre deux limites ou systèmes de points donnés. On peut toujours représenter sur le papier la surface extérieure, si l'on connaît le terrain ; mais dans la réalité, cette surface extérieure n'est pas visible, et lorsqu'on veut régler sur le terrain le défilement d'un ouvrage, il peut être embarrassant de lui mener un plan tangent. Voici comment on peut éviter cette difficulté : Soit H la hauteur verticale des points de la surface extérieure au-dessus de ceux du terrain. Si, lorsqu'il s'agit de mener un plan tangent à la surface extérieure, on abaisse verticalement de cette hauteur H toutes les données du problème, la surface extérieure se

confondra avec celle du terrain, et le problème se réduira à mener entre deux systèmes de points un plan tangent au terrain ; ce plan trouvé, on le mettra à sa véritable place, en le remontant verticalement de la quantité H.

Voici donc la marche qu'on peut suivre :

On plantera sur les points principaux du tracé de l'ouvrage à défiler, des jalons dont chacun portera deux marques apparentes, deux voyans : l'un de ces voyans sera inférieur de la quantité H à la plus grande hauteur qu'on puisse donner au parapet de l'ouvrage en ce point, l'autre sera inférieur de la même quantité à la plus petite hauteur qu'on puisse donner au parapet à ce même point. Cela fait, on placera l'œil en arrière de l'ouvrage, et l'on cherchera une position telle qu'en imaginant une ligne tangente au contour apparent du terrain, cette ligne laisse au-dessus d'elle tous les points représentatifs du *maximum* de relief, et au-dessous d'elle tous les points représentatifs du *minimum*. On pourra se servir d'une longue règle placée à quelque distance de l'œil, pour déterminer la position de cette ligne tangente au contour apparent du terrain ; la position de l'œil et de la règle étant trouvée, ils seront l'un et l'autre dans un plan qui étant relevé parallèlement à lui-même de la quantité H, sera tangent à la surface extérieure, et passera entre les points du *maximum* et ceux du *minimum* de relief.

Une infinité de positions de l'œil et de la règle, c'est-à-dire une infinité de plans peuvent dans certains cas remplir les conditions du problème. L'ingénieur doit se décider entr'eux par des considérations étrangères au défilement ; il peut prendre, par exemple, le plan qui approche le plus de la situation horizontale, ou celui qui approche le plus du site de l'ouvrage, ou celui qui tient le plus exactement le milieu entre les limites du relief, &c.

Dans la méthode que je viens d'indiquer, on cherche d'abord un plan tangent au terrain, pour parvenir ensuite au plan de défilement ; mais on n'est conduit à cela que par une considération purement géométrique, indépendante du défilement, et qui n'est pas d'obligation. C'est peut-être ce que n'ont pas assez fait sentir ceux qui dans des traités de défilement ont fait dépendre le défilement de la recherche d'un plan tangent au terrain qu'ils appellent *plan de site*.

Ce même problème : *trouver un plan tangent à une surface extérieure donnée, et qui passe entre deux systèmes de points donnés*, est trop indéterminé pour qu'on puisse en représenter graphiquement toutes les solutions ; il faut donc, si l'on veut parvenir à une solution graphique, limiter de quelque manière la généralité du problème.

On peut, par exemple, assujettir le plan de défilement à passer par un point donné. Ce cas aura lieu lorsque le relief de l'ouvrage se trouvera déterminé dans un point par les considérations étrangères au défilement.

Le moyen le plus simple de résoudre graphiquement ce dernier problème, me paraît être de construire sur un plan vertical, comme dans les figures 2 et 3, l'intersection d'une surface conique qui envelopperait la surface extérieure, et qui aurait son sommet au point par où doit passer le plan de défilement ; on imaginerait ensuite des lignes passant par le même point et par tous les points du *maximum* et du *minimum* de relief, et l'on chercherait, sur le plan vertical, les traces de ces lignes. Cela fait, toutes les lignes tangentes à l'intersection de la surface conique qui laisseront au-dessous d'elle les traces des lignes qui passent par les points du *minimum*, et au-dessus d'elle les traces des lignes qui passent par les points du *maximum* ; toute ligne, dis-je, qui remplira ces conditions, sera la trace d'un plan de défilement qui résoudra le problème. Il faut observer cependant que cette ligne doit laisser *au-dessous* d'elle les traces des lignes passant par les points du *maximum* de relief, lorsque le sommet de la surface conique est situé entre ces points et le plan vertical, et le contraire pour les points du *minimum* qui sont dans le même cas.

Ce qui précède subsistant, si le plan de défilement était assujetti à passer par un second point, il faudrait chercher la trace sur le plan vertical de la ligne qui passerait par les deux points donnés. La tangente menée à la courbe par cette trace, donnera la solution unique du problème, si elle passe entre les traces qui représentent sur le plan vertical les points du *maximum* et du *minimum* de relief ; car, sans cette condition, ce problème n'aurait pas de solution, et il faudrait défiler l'ouvrage autrement que par un seul plan.

Le problème serait également sans solution, si la ligne qui passe par les deux points donnés, et qui doit nécessairement se trouver sur le plan de

défilement

défilement, fichait dans la surface extérieure, ou si l'on ne pouvait mener par sa trace sur le plan vertical aucune tangente à l'intersection de la surface conique qui ne laissât au-dessous d'elle quelque partie de cette intersection. Je parlerai bientôt de ce cas, où il n'est pas possible de défiler un ouvrage par un seul plan.

Une autre manière de restreindre la généralité du problème que j'examine, consiste à assujettir le plan de défilement à être parallèle à une ligne donnée. Cette manière de considérer le problème, peut être employée lorsqu'on défile un front ou telle autre partie d'enceinte qui a peu d'étendue en largeur, mais une étendue plus grande en longueur. Il importe alors que le plan de défilement s'écarte très-peu d'une direction parallèle au terrain dans le sens de la longueur de la fortification, tandis que le même plan peut, sans trop d'inconvénient, faire un angle avec le terrain dans le sens de la largeur. Cette manière de considérer le défilement d'une enceinte fortifiée, peut, je crois, être d'un assez grand usage, et j'ai donné dans la figure 4 la solution graphique du problème qui y est relatif.

Je suppose que $a\,b\,c\,d\,e\,f$ soit le tracé de la crête intérieure d'un front de fortification qu'il s'agit de défiler au moyen d'un plan parallèle à la ligne qui joint les deux points du terrain correspondant aux saillans a et b; $l\,m$ est la projection verticale de cette ligne, $a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'$ est celle du relief du front porté au *maximum*; $a^2\,b^2\,c^2\,d^2\,e^2\,f^2$ est celle du même relief porté au *minimum*.

On imaginera, par chacun des points du *maximum* et du *minimum* de relief, des lignes parallèles à la ligne donnée, dont les projections sont $a\,b$ et $l\,m$; et on cherchera la rencontre de ces lignes avec le plan vertical. Ces rencontres sont $A'B'C'D'E'F'$ pour les points du *maximum*, $A^2B^2C^2D^2E^2F^2$ pour les points du *minimum* (1). On imaginera enfin une suite de tangentes à la surface extérieure, parallèles aussi à la ligne dont les projections sont $l\,m$ et $a\,b$, et formant une surface cylindrique tangente à la surface extérieure. On cherchera l'intersection de cette surface cylindrique avec le plan vertical.

(1) Pour trouver ces rencontres, on tirera les lignes $a\,b\,T$, $c\,d\,U$, $e\,f\,V$; par les points $T\,U\,V$ où elles coupent l'intersection des deux plans de projection, on élèvera les verticales $T\,P$, $U\,Q$, $V\,R$. Par les points $a'\,b'$, &c.; $a^2\,b^2$, &c. on tirera des parallèles à $l\,m$, dont les intersections avec les verticales correspondantes seront les points $A'\,B'$, &c. et $A^2\,B^2$, &c. C'est par une marche contraire, qu'ayant déterminé les points A^3, C^3, &c. on trouvera les points correspondans $a^3\,b^3$, &c.

Je suppose que ce soit la courbe $G\ H\ I\ K$. Ces constructions faites, toute tangente menée à la courbe $G\ H\ I\ K$ qui passera entre les points $A'\ B'$ &c. et les points $A^2\ B^2$ &c. sera la trace sur le plan vertical d'un plan qui remplira les conditions exigées par le problème, c'est-à-dire, qui touchera la surface extérieure, passera entre le *maximum* et le *minimum* de relief de l'ouvrage à défiler, et sera parallèle à la ligne projetée, suivant $a\ b$ et $l\ m$.

Si l'on peut choisir entre plusieurs plans de défilement qui remplissent les conditions, il faudra se décider d'après les considérations indépendantes du défilement. Dans la figure, j'ai préféré la trace $r\ s$, parce que c'est celle qui passe le plus loin du point B', et qu'ainsi tous les autres plans de défilement donneraient un plus grand relief au saillant b, tandis que c'est ce point dont le relief approchera le plus du *maximum*, et qu'il faut par-conséquent chercher à rabaisser le plus.

Lorsque le relief d'un ouvrage est à la disposition de l'ingénieur, il peut diviser cet ouvrage en différentes parties et considérer séparément le défilement de chacune. Ainsi, au lieu de défiler par une seule opération un ouvrage à couronne, il peut défiler séparément chaque bastion : cette méthode de défilement par parties est très-avantageuse dans les cas où il n'est pas possible de trouver un plan tangent à la surface extérieure qui laisse au-dessus de lui tous les points du *maximum* de relief, et au-dessous tous ceux du *minimum*, tandis que l'on trouve un plan qui remplit cette condition, relativement aux points du *maximum* et du *minimum* de relief d'une partie de l'ouvrage ; on se sert alors de ce plan de défilement pour cette partie, et l'on défile le reste de l'ouvrage, au moyen d'un ou de plusieurs autres plans.

Mais cette même méthode du défilement par parties a un inconvénient qui provient de ce que les parties d'ouvrage qu'on défile séparément ne sont pas chacune entièrement couvertes par le parapet de l'ouvrage. Le parapet ne forme pas à leur égard une enceinte complète ; il faut alors suppléer par une traverse à la portion de parapet qui manque, et cette traverse (que je nommerai *traverse de séparation*, parce qu'elle sépare deux parties de l'ouvrage, considérées indépendamment l'une de l'autre) embarrasse le terre-plein et gêne les manœuvres.

Les méthodes graphiques que j'ai indiquées, peuvent représenter également les différentes manières de résoudre le problème du défilement par

parties. Dans la figure 4, par exemple, si la ligne $r\,s$ laissait au-dessous d'elle quelques-uns des points A^2 B^2 &c., ces points montreraient quelle est la partie de l'ouvrage non défilable par le plan passant par $r\,s$. Il faudrait défiler cette partie par un autre plan plus élevé qui pourrait être parallèle au premier; et si cette partie n'était pas entièrement couverte par le parapet de l'ouvrage, il faudrait compléter l'enceinte par une traverse sur le terre-plein, au point de séparation des deux parties d'ouvrage.

En général, lorsqu'on défile ainsi par parties un ouvrage peu étendu, il n'y a pas d'inconvénient à employer pour toutes les parties des plans parallèles entr'eux, pourvu que le plan le plus bas touche une surface extérieure suffisamment élevée : car les autres plans toucheront alors réellement des surfaces extérieures plus élevées, et les parties d'ouvrage correspondantes seront d'autant mieux défilées. Comme de la détermination d'un seul plan tangent à une surface extérieure, résultera celle de tous les autres plans de défilement, on éprouvera plus de facilité que s'il fallait une opération particulière pour chaque partie d'ouvrage.

Par la même raison, dans le cas où l'on aurait à défiler une enceinte composée d'ouvrages de différentes espèces, placés les uns près des autres, comme les bastions, la demi-lune et le chemin couvert d'un même front, il suffira le plus souvent de déterminer le plan de défilement des ouvrages d'une espèce, ou le plan tangent au terrain qui lui est relatif, et de donner aux autres ouvrages des plans de défilement parallèles à celui-ci, mais plus ou moins élevés, suivant le relief de chaque espèce d'ouvrage. On voit qu'alors les surfaces extérieures seront d'autant plus élevées que l'ouvrage correspondant aura plus de relief, ce qui est conforme à la règle posée à cet égard dans la première partie.

On peut presque toujours diviser un ouvrage en parties telles que chacune soit défilée par un seul plan, c'est-à-dire, de manière que la crête des parapets et des traverses qui forment l'enceinte de chaque partie, soit dans un plan tangent à la surface extérieure; mais il arriverait quelquefois que pour parvenir à ce but, on serait obligé de morceler l'ouvrage en parties si petites, et de le surcharger de tant de traverses de séparation, que l'ouvrage en deviendrait très-mauvais. Il conviendra mieux, dans ce cas, de ne diviser l'ouvrage qu'en peu de grandes parties, ou de le laisser entier; mais alors,

si l'on ne veut pas faire sortir des limites le relief du parapet de l'ouvrage, le plan passant par la crête du parapet de chaque partie de l'ouvrage, ou de l'ouvrage entier, sera surmonté par des hauteurs dominantes, et il faudra employer les méthodes des figures 2 ou 3, suivant que les hauteurs prendront ou non des faces de l'ouvrage à revers.

Lorsqu'on défile par parties un chemin couvert, il faut employer ses traverses comme traverses de séparation. Lorqu'on défile par parties une contre-garde, il faut employer comme traverses de séparation les parapets des coupures faites pour la défense de l'ouvrage (1). Il faut en général, lorsqu'on est contraint d'employer des traverses, faire servir à cet usage des constructions qui ont une autre utilité, ou les rendre plus utiles, en y pratiquant des souterrains, &c.

Jusqu'à présent j'ai supposé que le terre-plein des ouvrages à défiler était à la disposition du constructeur, et en conséquence j'ai cherché quelle devait être la forme, la situation de la surface intérieure, pour que l'ouvrage fût défilé; mais il arrive souvent, sur-tout dans la fortification de campagne, qu'on est obligé de donner pour terre-plein aux ouvrages le terrain naturel. La surface intérieure dont tous les points sont élevés au-dessus du terre-plein d'une hauteur constante, comme de 25 décimètres, se trouve alors donnée. De-là naît un autre ordre de problèmes de défilement, dont je vais donner une idée.

Si l'on imagine qu'un plan se meuve en touchant toujours la surface intérieure et la surface extérieure, ce plan engendrera par ses intersections successives une surface de défilement dans laquelle il faudra placer la crête du parapet, pour que ce parapet puisse couvrir l'espace intérieur. Supposons, par exemple, que le tracé de la crête intérieure d'un ouvrage soit donné, on élevera sur chaque point du tracé une verticale. Le point où cette ligne pénétrera la surface de défilement déterminée comme je viens de le dire, sera un de ceux par où devra passer la crête du parapet.

On voit qu'on obtiendrait en général, par ce moyen, des crêtes de parapet courbes, ce qui n'est pas admissible, sur-tout dans la fortification de campagne. Pour éviter cet inconvénient, on pourra substituer à la

(1) Comme *Cormontaigne* l'a pratiqué à Metz, aux contre-gardes 121 et 179, près de la porte Mazelle, et comme on l'a fait dans beaucoup d'autres endroits.

surface courbe de défilement un plan tangent aux deux surfaces intérieures et extérieures : on choisira le plus convenable d'après les considérations indépendantes du défilement.

On peut encore parvenir au même but plus simplement, en considérant, au lieu de la surface intérieure, une seule ligne droite placée à une hauteur convenable au-dessus du terrain, à la gorge des ouvrages, ou en arrière des lignes de fortification de campagne. On fera passer par cette ligne un plan de défilement tangent à la surface extérieure.

On a vu comment, sur le terrain, on peut réduire cette opération à trouver un plan tangent au terrain, passant par une ligne inférieure à la première de la quantité H dont le terrain est inférieur à la surface extérieure. Le plan de défilement sera parallèle à ce premier plan et plus élevé de la même quantité H.

Après avoir traité du défilement dans le cas où le tracé est donné, et où le relief ne l'est pas, il serait peut-être à propos de parler du cas inverse, c'est-à-dire, de celui où le relief est donné, et où le tracé ne l'est pas. Ce cas est celui des tranchées : leur profil est ordinairement déterminé, et il s'agit de trouver leur direction de manière qu'elles approchent le plus possible de la place assiégée sans être prises d'écharpe par ses feux ; mais ce problème, quoique fort simple, grossirait ce mémoire déjà très-long : je l'examinerai dans un mémoire particulier.

QUATRIÈME PARTIE.

Du tracé considéré relativement au défilement.

J'AI donné dans les deux parties précédentes des méthodes pour défiler des ouvrages dont le tracé est déterminé ; je vais maintenant donner quelques règles pour le tracé des fortifications, déduites uniquement des considérations relatives à leur défilement.

Dans la première partie, j'ai distingué deux espèces de tracé : *le tracé particulier*, qui est relatif à la direction et à la disposition des faces d'un ouvrage, et *le tracé général*, qui est relatif à la direction et à la disposition des enceintes d'ouvrages dont on se sert pour renfermer un espace qu'on veut défendre. Je vais parler d'abord du tracé particulier.

Il est aisé de tirer des méthodes indiquées dans la deuxième partie cette conséquence : qu'on se défile avec la même facilité d'une grande hauteur placée loin de l'ouvrage, et d'une petite hauteur placée plus près. En effet, la même surface conique qui enveloppe une petite hauteur en envelopperait une plus grande, mais plus éloignée du sommet : ainsi les opérations des figures 2 et 3, dans lesquelles la surface conique est substituée à la surface extérieure, seraient les mêmes dans les deux cas.

Il est donc évident que de deux hauteurs égales, la plus éloignée sera celle dont il sera le plus facile de se garantir, ou qui dominera le moins. Je déduirai de-là cette règle : qu'il faut disposer le tracé des ouvrages de manière que les parties exposées à des hauteurs dominantes, s'en éloignent le plus possible.

On a vu dans la deuxième partie, qu'un ouvrage dont le relief est déterminé, est entièrement défilé lorsqu'il n'y a pas de hauteurs dominantes; qu'il est facile à défiler en creusant le terre-plein, lorsque les hauteurs dominantes ne voient aucune face à revers ; qu'il est encore possible de le défiler, mais plus difficilement et en embarrassant l'ouvrage par des traverses, lorsque des hauteurs dominantes voient à revers quelqu'une des faces. On peut tirer de-là cette conclusion : qu'il faut diriger les faces (1) de telle manière qu'en leur donnant le relief qui serait le plus convenable, abstraction faite du défilement, ou en s'écartant peu de ce relief le plus convenable, le plan qui passerait par la crête des parapets surmonte entièrement la surface extérieure. Si l'on ne peut remplir cette première condition, et si le plan qui passe par la crête du parapet est surmonté par quelques parties de la surface extérieure, il faut tâcher qu'aucune face ne soit prise à revers par ces hauteurs dominantes. Si l'on ne peut encore remplir cette deuxième condition, il faudra faire en sorte qu'aucune face ne fiche dans la surface extérieure. On voit que dans chacun de ces essais, il faut balancer les inconvéniens auxquels on s'expose en s'écartant du relief le plus convenable, avec les avantages d'un défilement plus facile.

Une remarque importante à faire, lorsqu'on règle le tracé d'un

(1) Je rappelle que par *face* j'entends tout côté du poligone qui forme le pourtour d'un ouvrage.

ouvrage, c'est qu'on ne doit pas toujours se contenter de le défiler purement et simplement ; il faut, lorsqu'on le peut, diriger les faces de manière que leur prolongement s'élève le plus qu'il est possible au-dessus de la surface extérieure (ou, ce qui est la même chose, au-dessus du terrain) parce que l'on rend par-là le ricochet plus difficile.

Ainsi, je suppose qu'on ait déterminé le plan dans lequel doit se trouver la crête du parapet d'un ouvrage dont le tracé n'est pas encore réglé, et que ce plan surmonte entièrement la surface extérieure, ce qui ne laisse aucun doute que l'ouvrage ne soit bien défilé, on doit, autant que le permettront les autres conditions, diriger les faces de manière que leur prolongement s'élève le plus qu'il est possible au-dessus du terrain. Au surplus, l'utilité de cette précaution n'est très-grande que lorsqu'on parvient par-là à soustraire entièrement les faces au ricochet, ce qui arrive lorsqu'on les dirige sur des endroits où l'ennemi ne peut établir de batteries, où par conséquent la surface extérieure est réellement interrompue, ou elle n'existe pas. Ce cas a lieu lorsqu'une partie du terrain est noyée par quelque inondation, ou qu'elle est occupée par des fortifications telles qu'on n'ait pas à craindre pour l'ouvrage qu'on défile les établissemens que l'ennemi pourrait y faire après les avoir prises.

Je vais maintenant parler du tracé général d'une enceinte. Cet objet est non moins important que l'autre : car, de même que l'on est libre jusqu'à un certain point de diriger les faces d'un ouvrage, de telle sorte que le défilement en soit facile, on peut aussi quelquefois, lorsqu'on fortifie une place, disposer l'enceinte d'une manière plus ou moins favorable au défilement.

On a pu remarquer que les détails dans lesquels je suis entré dans les trois premières parties de ce mémoire, sur le défilement des ouvrages de fortification, m'ont conduit naturellement aux règles relatives au tracé particulier de ces ouvrages. Je n'aurai pas le même secours en parlant du tracé général : je serai obligé de poser de nouveaux fondemens pour cette nouvelle matière.

Il s'agit en général de trouver la disposition d'une enceinte sur un terrain donné, pour laquelle le défilement de chaque partie éprouve le moins de difficultés.

Je vais d'abord réduire ce problème à son plus grand degré de simplicité, en supposant 1.° que l'enceinte dont il s'agit est simple, c'est-à-dire formée par une suite d'ouvrages de la même espèce, dont le *maximum* et le *minimum* de relief sont par-tout à une égale hauteur ; 2.° que le terrain sur lequel elle doit être établie est plan ; 3.° que l'on ne considère sur la surface extérieure qu'un seul point, ou qu'une seule ligne ; 4.° que l'on cherche quelles sont les dispositions de l'enceinte qui permettront de mettre la crête de tous ses parapets dans un même plan de défilement, et entre ces dispositions celle qui est la plus avantageuse.

On pourra, de la solution du problème ainsi simplifié, tirer des conséquences propres à diriger dans les cas plus compliqués.

En effet, s'agit-il d'une enceinte courbe et établie sur un terrain inégal ? on peut considérer chacun des points de cette enceinte comme faisant partie d'une enceinte droite indéfinie, tangente à l'enceinte courbe et établie sur le plan qui touche le terrain à ce même point. Si, sur le terrain que l'ennemi peut occuper, et dont il faut défiler l'enceinte par un seul plan, il se trouve une hauteur très-saillante, et telle par conséquent que le plan de défilement, dans les différentes positions qu'on pourrait lui donner, fût obligé de passer à-peu-près par un même point de la surface extérieure, ce point se trouvera représenté par le point dominant du problème ; ou si la crête d'une chaîne de hauteurs se prolonge à-peu-près en ligne droite, la ligne correspondante sur la surface extérieure pourra également être regardée comme une ligne dominante.

Je viens à l'examen géométrique du cas où il s'agit de défiler l'enceinte contre un seul point dominant. Ce cas est représenté dans la figure 5. Le terrain, que je suppose d'abord horizontal, est le plan même de projection ; le point dominant est en e' sur le plan vertical de projection, et il est projeté horizontalement en E sur la commune intersection XY. $a'\ b'$ est la trace d'un plan parallèle à celui du terrain, élevé à la hauteur du *maximum* du relief qu'on peut donner à l'enceinte. $C'\ d'$ est la trace d'un autre plan élevé à la hauteur du *minimum* du relief.

Soit maintenant $e'\ f'\ h'$ la trace sur le plan vertical d'un plan de défilement quelconque passant par le point e', et $F\,g$ et $H\,i$ les intersections de ce plan de défilement avec les deux plans du *maximum* et du

du *minimum* de relief. Il est clair qu'on ne pourra, en employant ce plan de défilement, établir l'enceinte qu'entre les deux parallèles *F g* et *H i;* car hors de cet espace le plan de défilement s'élève au-dessus du *maximum* ou s'abaisse au-dessous du *minimum* de relief.

Il est clair encore que plus cet intervalle, que j'appellerai *bandeau de défilement*, sera large, et plus on aura de facilité pour y établir la fortification ; car, en le supposant précisément assez large pour contenir l'enceinte, le relief de cette enceinte s'élèvera d'un côté jusqu'au *maximum*, et s'abaissera de l'autre jusqu'au *minimum*, deux extrêmes dont il faut s'éloigner autant qu'on peut. Mais si le bandeau est très-large, on pourra placer l'enceinte de manière que son relief soit moyen par-tout, et l'on aura la facilité de lui faire faire des inflexions sans qu'elle sorte du bandeau et sans qu'elle cesse d'être défilée, avantage très-grand.

Or si l'on cherche dans quelle position le bandeau de défilement est le plus large, on trouvera qu'il l'est d'autant plus qu'il passe plus loin du point *E*. La même chose a lieu si le plan du terrain et les plans du *maximum* et du *minimum* restant toujours parallèles, sont inclinés au lieu d'être horizontaux.

On peut donc conclure de-là que si une enceinte est placée à portée d'un point dominant par lequel on juge que le plan de défilement doit passer, cette enceinte sera d'autant plus facile à défiler que sa direction prolongée passera plus loin de la projection horizontale du point dominant.

D'où il suit encore que si l'enceinte doit passer par un point donné sur le terrain, la direction la plus favorable sera celle qui en projection horizontale coupera à angle droit la ligne qui va de ce dernier point au point dominant (1).

Substituons maintenant au point dominant une ligne dominante donnée et indéfinie. Je suppose (toujours figure 5) que cette ligne soit *e' f' h'* qui est contenue dans le plan vertical. Cette ligne coupe les plans du *maximum*

---

(1) Lorsque le terrain est horizontal, le plan de défilement est d'autant moins incliné à l'horizon que le bandeau est plus large, ce qui est un autre avantage. Lorsque le terrain est incliné, ces deux avantages, du plan de défilement le moins incliné, et du bandeau le plus large, ne se rencontrent pas; il faut choisir entre eux, ou prendre un terme moyen.

et du *minimum* de relief aux points f', h' en projection verticale, F, H en projection horizontale. Donc tous les bandeaux résultant de plans de défilement passant par la ligne dominante se dirigeront vers ces deux points F et H; car toutes les intersections des plans de défilement par les plans du *maximum* et du *minimum* de relief passeront par ces deux points.

On voit en outre que plus la direction du bandeau approchera d'être perpendiculaire en projection horizontale à la ligne dominante, et plus le bandeau sera large.

Ces deux circonstances ont lieu, que le plan du terrain soit horizontal ou incliné.

Nous pouvons conclure de-là que lorsqu'il s'agit d'établir une enceinte à la portée d'une ligne dominante par laquelle on juge que le plan de défilement doit passer, cette enceinte, pour être défilée par un seul plan, doit se diriger vers les points où la ligne dominante coupe les plans du *maximum* et du *minimum* de relief, ou, en d'autres termes, que cette enceinte doit se diriger vers le point où le plan du terrain sur lequel elle est établie, est rencontré par la ligne qui sur le terrain correspond à la ligne dominante; car cette ligne du terrain est parallèle à la ligne dominante considérée sur la surface extérieure, et lui est inférieure d'une quantité moyenne entre le *maximum* et le *minimum* de relief. Soit donc Pq cette ligne, elle viendra rencontrer le terrain en un point P, qui est entre H et F, et c'est vers ce point P que se dirigent tous les bandeaux (1).

De plus, l'enceinte sera d'autant mieux située, que sa direction, remplissant la condition précédente, approchera plus d'être perpendiculaire à la ligne dominante.

Je pourrais donner beaucoup d'applications de ces différentes règles; mais les détails dans lesquels il faudrait entrer excéderaient les bornes d'un mémoire; je me contenterai d'en indiquer rapidement quelques-unes.

---

(1) Ces règles ne peuvent être regardées comme de rigueur, que lorsque par l'emplacement dont on peut disposer pour l'enceinte ou pour d'autres causes, le bandeau de défilement est trop étroit pour qu'on puisse y faire faire des sinuosités à l'enceinte. On voit que si elle y peut faire des sinuosités, sa direction peut s'écarter sans inconvénient de la direction du bandeau, du moins jusqu'à un certain point.

Les ouvrages dont les saillans sont obtus, sont en général plus favorables au défilement que ceux dont les saillans sont aigus : c'est une conséquence des règles du tracé particulier ; car les faces des premiers ouvrages laisseront moins de terrain en arrière de leur prolongement, et seront par conséquent moins exposées aux revers des hauteurs dominantes, s'il y en a.

Lorsqu'une enceinte traverse un vallon, il faut mettre dans le fond des ouvrages obtus, et les reculer le plus qu'on peut par rapport aux ouvrages qui occupent les hauteurs de part et d'autre du vallon.

Il faut diriger chaque portion d'une enceinte, de manière qu'elle ait directement en face les plus grandes hauteurs à la portée desquelles elle est.

Lorsqu'une enceinte est devant une chaîne de hauteurs dont la crête forme à-peu-près une ligne droite, il faut que l'enceinte converge avec cette crête du côté où celle-ci se rapproche du plan du terrain sur lequel l'enceinte est établie ; et si la crête est parallèle au plan du terrain, il faut que l'enceinte soit parallèle à cette crête.

Si l'on établit une enceinte sur une pente qui borde une plaine horizontale, et qu'on puisse séparer par une ligne droite l'espace que l'ennemi peut occuper dans cette plaine, de celui qui lui est interdit, soit par des fortifications ou des inondations, &c., il conviendra le plus souvent de faire passer le plan de défilement par cette ligne de séparation ; on la regardera alors comme une ligne dominante à l'égard de la pente sur laquelle la fortification doit être établie, et l'on trouvera par les règles données précédemment la meilleure direction de l'enceinte.

Ces indications suffisent pour montrer la manière dont on doit faire usage des règles du tracé relatives au défilement. On doit voir d'ailleurs que ce que j'ai dit d'une enceinte simple, s'applique de même à une enceinte composée d'ouvrages de différens reliefs, parce qu'une enceinte composée, par exemple, d'un corps de place et de demi-lunes, renferme réellement deux enceintes simples, celle du corps de place, et celle des demi-lunes. Ainsi, les règles relatives à chacune de ces enceintes simples s'appliquent également à l'enceinte qui en est composée.

J'ai essayé dans ce mémoire de concilier l'exactitude mathématique

avec l'indétermination et la variété infinie des cas où l'on doit employer l'art du défilement. J'ai cherché à déduire de l'examen géométrique des principaux cas un petit nombre de règles faciles à appliquer. En donnant des méthodes pour défiler les ouvrages dont on ne peut changer le parapet, et ceux dont on peut élever ou abaisser le parapet, et quelques principes sur le tracé des ouvrages, j'ai cru embrasser tout ce qu'on pouvait dire de plus utile sur le défilement. On pourra sans doute approfondir davantage cette matière; mais j'aurai rempli mon but, si je suis parvenu à donner à ceux qui se destinent au génie militaire, une idée claire et juste d'une chose importante, qui paraît d'abord obscure et difficile, et qui, je crois, n'avait été traitée nulle part avec autant de généralité.

H. SAY.

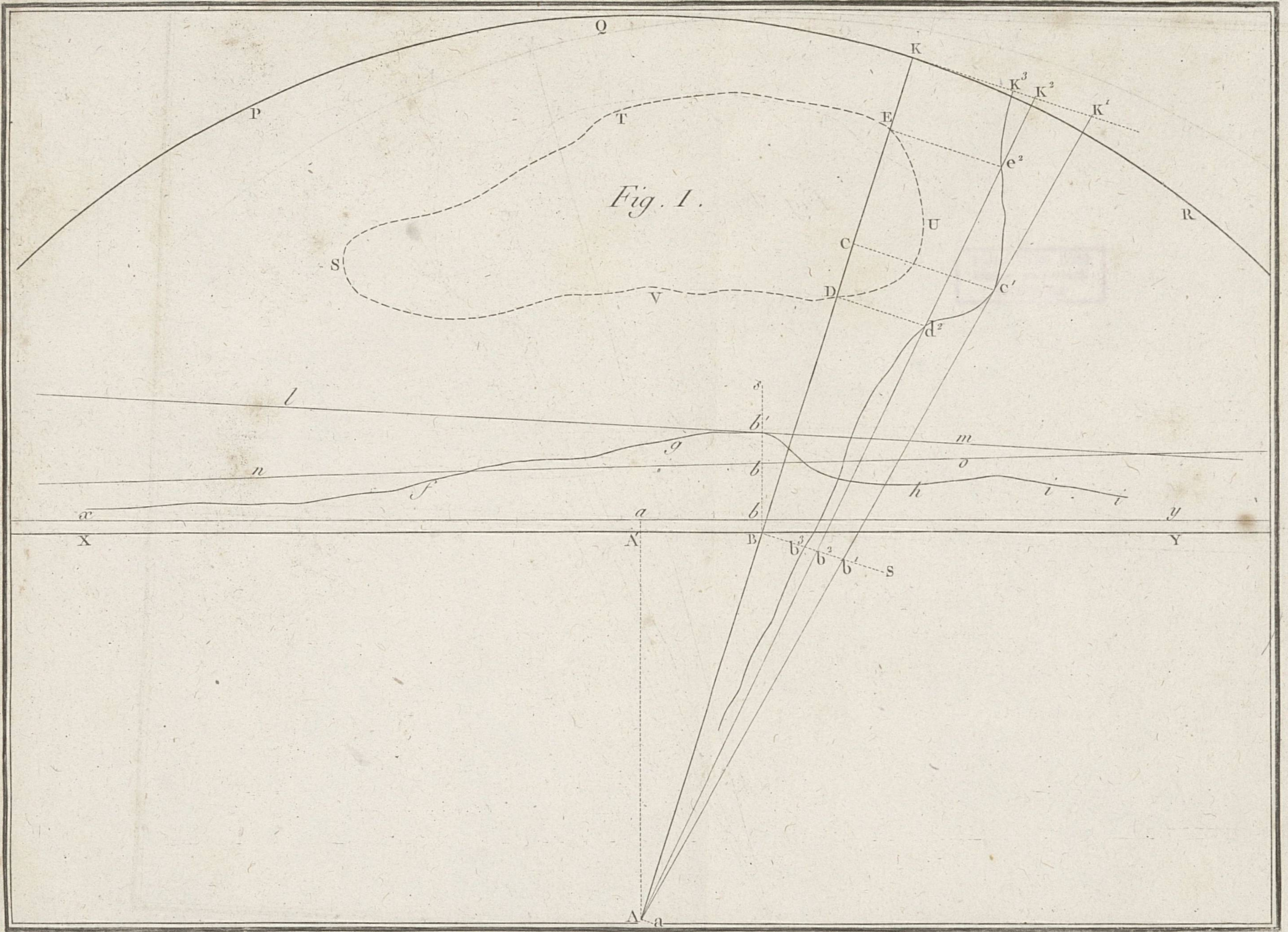
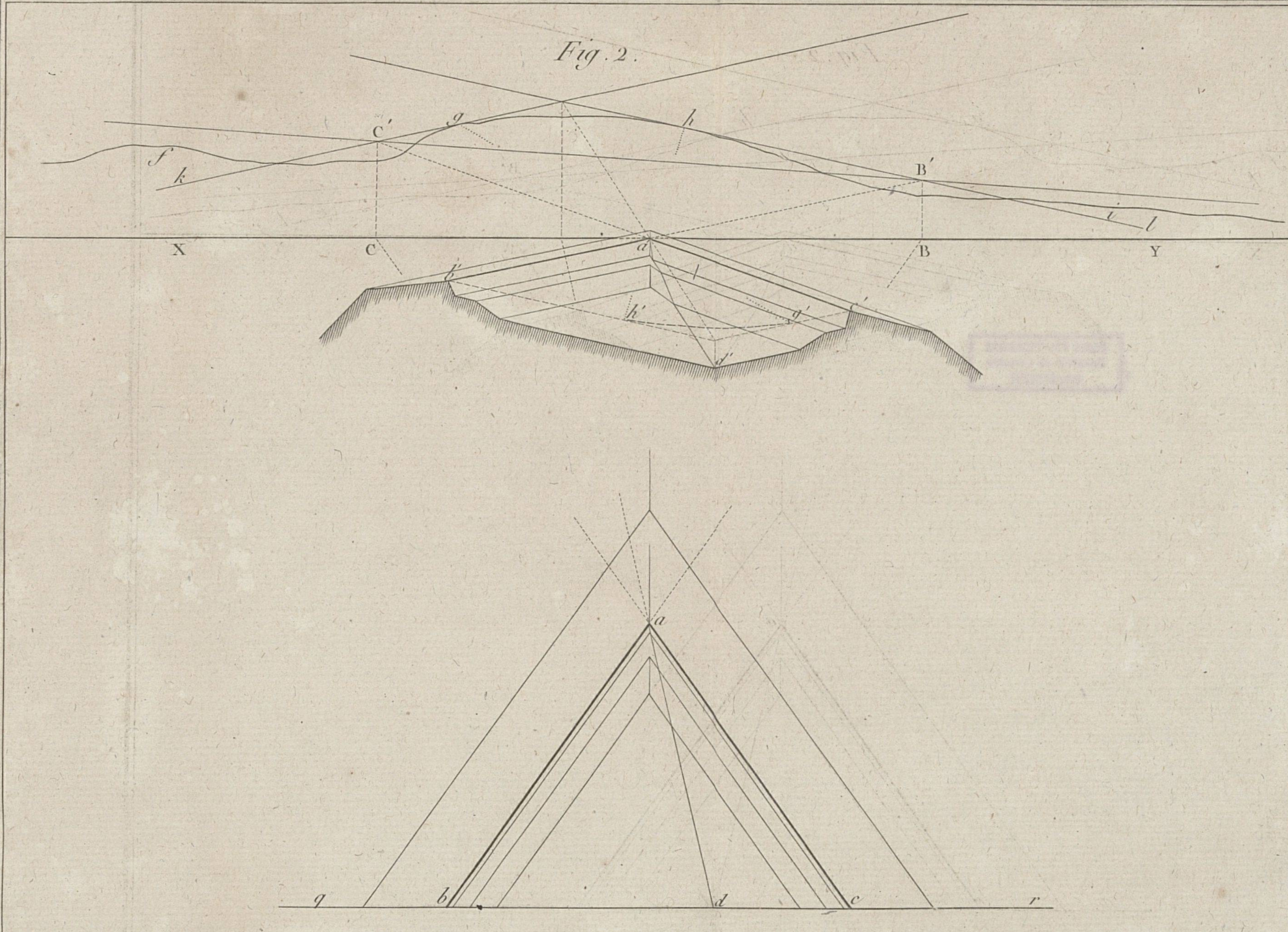

Q
P
K
K3
K2
K1
T
E
e2
R
U
C
S
c'
D
V
d2
l
b'
m
g
n
b
o
f
h
i
i
x
a
b
y
X
A
B
b3
b2
b1
s
Y
A
a

Fig. 1.

Fig. 2.



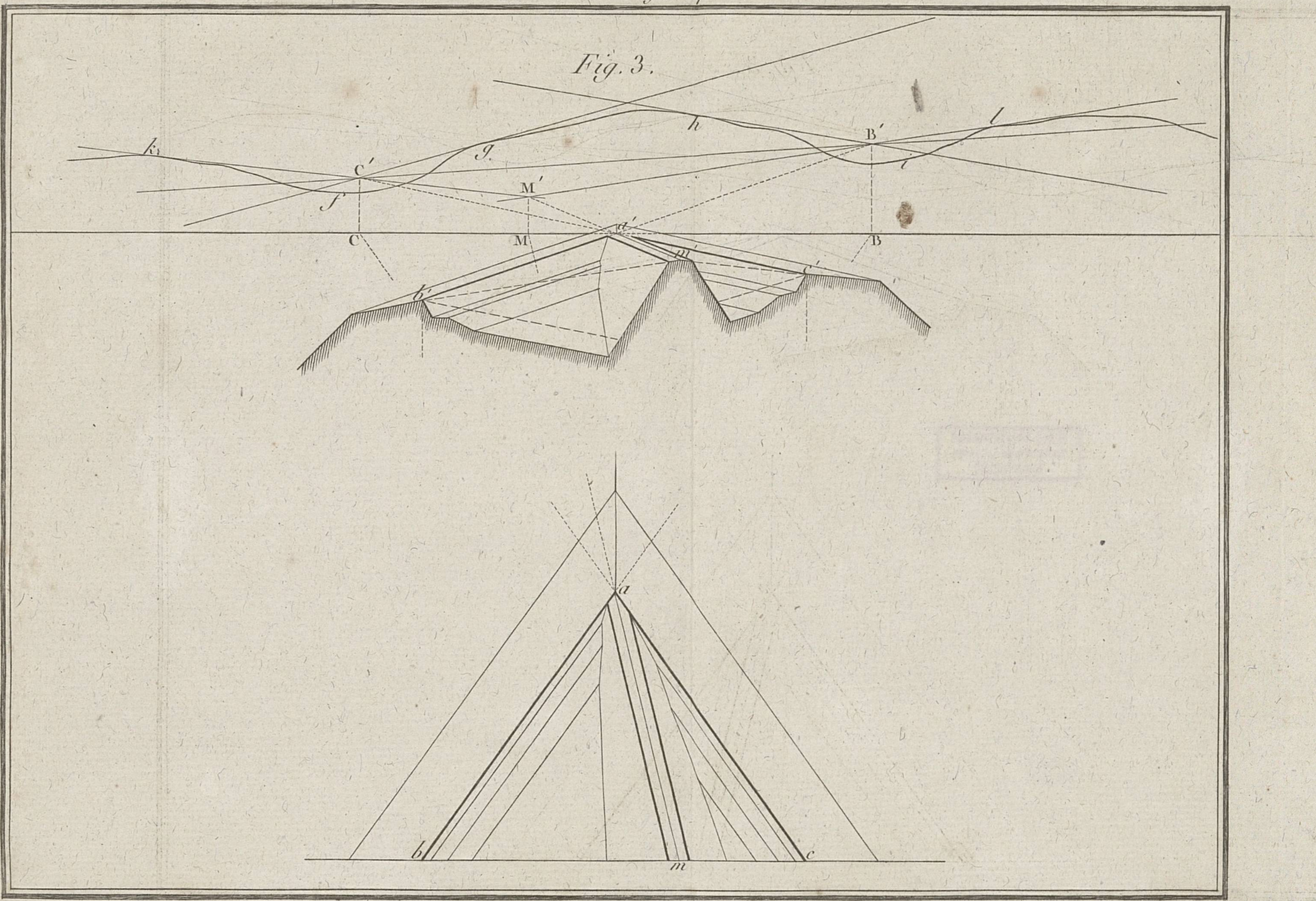
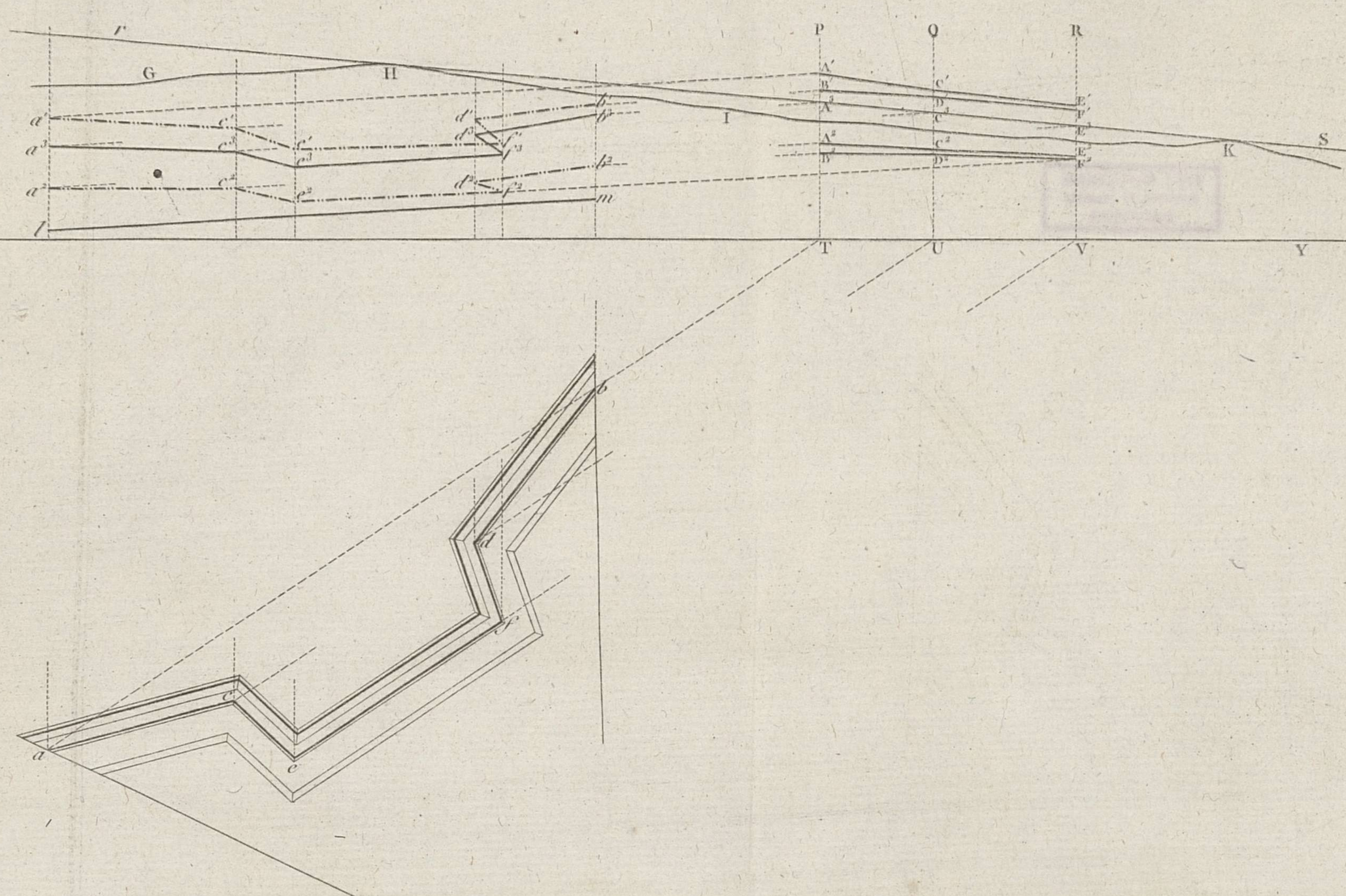
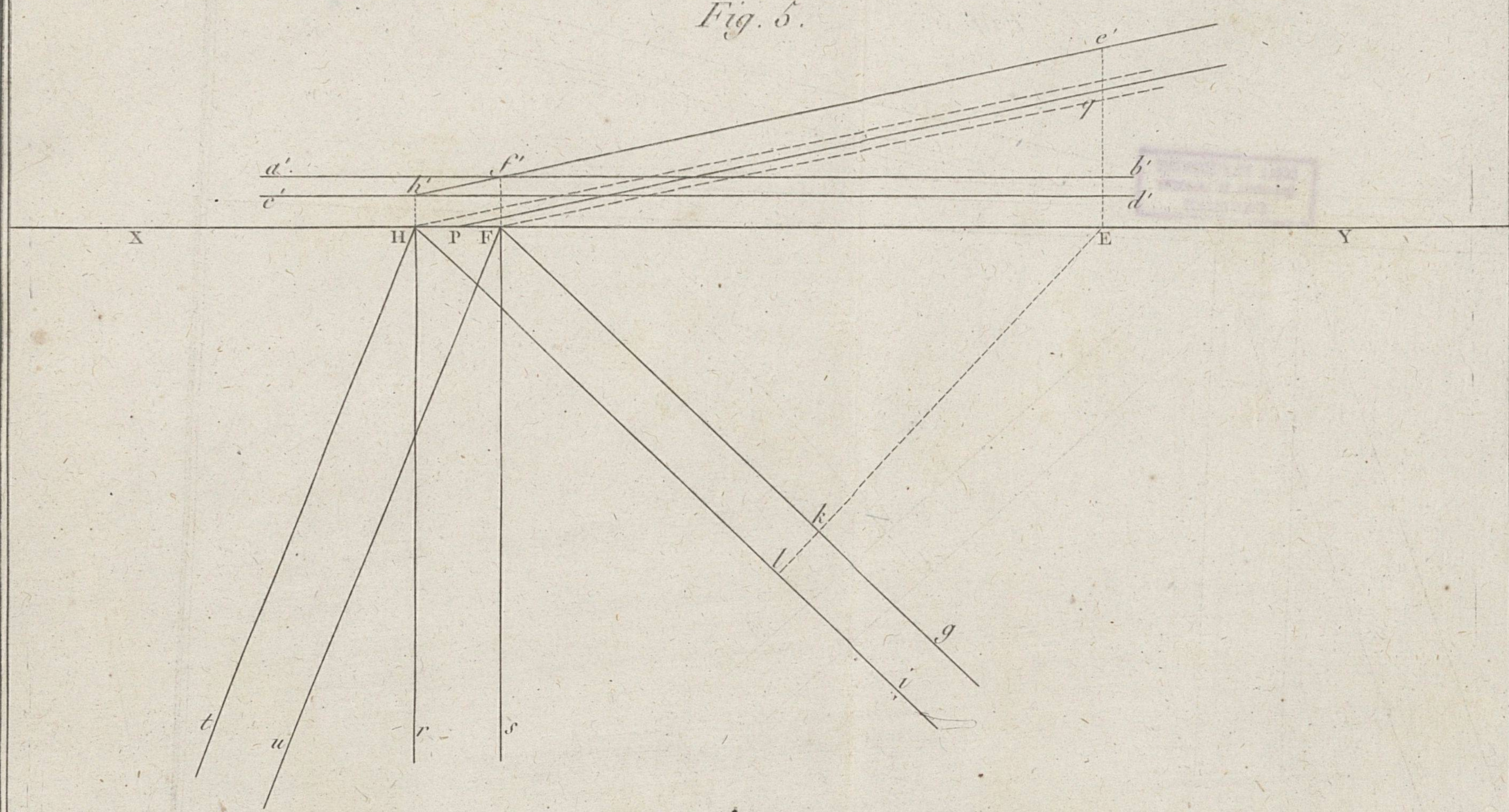


Fig. 3.

Fig. 4.



Baltard Sc.


Fig. 5.
e'
q
a'
f'
b'
h'
c'
d'
X
H
P
F
E
Y
k
l
g
i
t
u
r
s

FORTIFICATION.

PENDANT le mois de vendémiaire de l'an 3, les élèves ont reçu des leçons sur les siéges, et ont dessiné les travaux relatifs à l'attaque et à la défense d'un front de fortification.

A cette époque, les élèves avaient acquis toutes les connaissances préliminaires nécessaires pour porter un jugement sur la valeur d'une enceinte fortifiée, et en sentir toutes les propriétés ; ils connaissaient parfaitement les constructions fondamentales, dont toutes les autres sont des modifications; ils avaient vu quelles étaient les ressources de l'attaque, et quels moyens de défense on pouvait leur opposer. Il fallait alors réduire sous la forme de règles ces résultats de l'expérience. Aussi le mois suivant a-t-il été destiné à l'exposé des principes de l'art de la fortification, et à l'examen des principaux systèmes qui ont paru jusqu'à ce jour. On s'est attaché à leur montrer que les systèmes de fortification sont absolument inutiles pour qui connaît bien les règles, et qu'il n'y a point de système universel. On s'est par conséquent peu arrêté sur cet objet.

Le dernier mois a été employé par des leçons sur la fortification de campagne et sur le défilement (1), et par l'examen qui a fait connaître les progrès et les dispositions des élèves.

On voit que le défaut de temps a fait resserrer quelques parties de l'instruction. Cependant rien d'essentiel n'a été omis, les élèves ont en général retiré de ce cours tout le profit qu'on devait espérer; mais on a fait une remarque importante qui montre la bonté des principes sur lesquels l'école est établie, c'est que les élèves qui ont fait le plus de progrès dans la fortification, sont ceux qui étaient les plus avancés en géométrie descriptive et en analyse.

Celui qui ne possède pas jusqu'à un certain point ces connaissances, ne peut espérer d'approfondir beaucoup la science de l'ingénieur militaire,

(1) Le mémoire qui précède, est un résumé des leçons données aux élèves sur le défilement.

non-seulement à cause des constructions qui exigent au moins la connaissance de la géométrie descriptive, mais encore parce que les mathématiques enseignent seules à mettre dans les idées cette exactitude, cet ordre, cette clarté, sans lesquels il est impossible de réussir dans les sciences.

Il est donc vraisemblable que les élèves de cette année et des suivantes, plus instruits en mathématiques que ceux de l'année dernière, retireront aussi plus de fruit des leçons qui leur seront données sur la fortification.

H. SAY.

STÉRÉOTOMIE.

Les objets d'instruction, pendant les quatre derniers mois de la première année du cours, se réduisent à la *charpente*, aux *ombres* et à la *perspective*. Le tableau général d'enseignement de l'école polytechnique, assigne à la stéréotomie deux articles d'une grande importance pour les travaux publics; ce sont les *machines* et la *topographie ;* mais le cours préliminaire ayant prélevé un quart du temps destiné au cours annuel, on a été contraint de remettre ces deux objets à l'année suivante.

Charpente.

Il est bon de remarquer que la charpente n'est considérée ici que sous son point de vue géométrique. Des recherches sur la constitution matérielle et organique des bois ; ainsi que celles que l'on peut faire sur ses propriétés mécaniques, sont étrangères à la stéréotomie; mais comme la forme est plus ou moins dépendante du physique des matériaux, on a emprunté des sciences y relatives les principes indispensablement nécessaires à une application raisonnée des procédés généraux de la géométrie descriptive à la charpente.

Les exemples de trait que l'on a choisis, sont tirés de nos constructions usuelles en charpente, et sont des *combles*, des *parties de comble* et des *escaliers.*

La forme ordinaire du bois que nous employons, est celle d'un prisme dont la coupe perpendiculaire est un rectangle. On peut, en exécutant un trait, ou conserver cette forme, ou y changer la position de quelques faces. Dans le premier cas, la pièce est dite *deversée;* dans le second, *delardée.* La plupart des épures présentent l'une et l'autre de ces méthodes.

Au tracé d'un nombre suffisant d'épures, on fit succéder quelques jours d'instruction pratique. Les élèves furent conduits dans un atelier, où l'instituteur, conjointement avec des hommes du métier, expliqua les détails des opérations que l'on appelle la *mise sur ligne*, le *piquer*, le *jaugeage et contre-jaugeage.*

Les élèves ont eu, pendant cet exercice, occasion de s'habituer à la langue du charpentier, ce qui entre dans l'éducation des ingénieurs, qui, dans la conduite des travaux, doivent se servir des termes que les ouvriers entendent le mieux.

TABLEAU des épures de charpente.

1. Croupe droite.
2. Croupe biaise.
3. Empanon deversé.
4. Noues.
5. Pannes et tasseaux.
6. Nolet droit.
7. Nolet biais.
8. Nolet conique.
9. Nolet courbe sur dôme en tour ronde.
10. Linçoir droit.
11. Linçoir biais.
12. Lunette droite et biaise dans un berceau cylindrique.
13. Lunette en comble conique.
14. Escalier.
15. Pavillon portant cintre.

Ombres.

L'APPLICATION de la géométrie descriptive au tracé rigoureux du contour des ombres, a été l'objet des études pendant le mois brumaire.

Les élèves se sont attachés spécialement à cette partie de leur travail, et ont remarqué tous les avantages que l'on en peut tirer pour l'art du dessin.

Ce que l'on était habitué de faire sur les ombres, est ou excessivement simple, ou tatonnement et routine. On n'avait point porté dans les arts figurans cette précision qui, dans beaucoup de circonstances, est indispensable pour conserver l'accord et produire le bon effet.

On a donc choisi une série de formes les plus généralement répandues dans les arts, et après avoir exposé les détails du problème général, on a fait voir de quelle manière, dans une forme donnée, on peut simplifier plus ou moins les opérations, et rendre la solution plus élégante.

Pour

Pour rendre les élèves attentifs à l'histoire de nos connaissances, on a remarqué que, si la construction des ombres n'est pas d'une grande difficulté dans l'état actuel de la géométrie, c'est aux recherches que leurs accidens curieux ont provoquées, que nous devons une grande partie des progrès de la science, et particulièrement la théorie des surfaces développables. C'est au moyen de ces surfaces, que l'on résoudra toutes les questions sciagraphiques, tant qu'il ne s'agit que de la lumière droite, et nullement détournée dans son trajet.

Non seulement le contour des ombres est un objet de géométrie, mais l'intensité de la lumière qui répond à chaque point d'une forme donnée, est susceptible d'une même précision. En exposant les premiers principes sur la mesure de la clarté, on fut naturellement conduit au *lavis*, ou l'art de représenter les formes par la dégradation des teintes.

Pour aider les élèves dans la pratique du lavis, on leur présenta un modèle pour chacune des ombres dont ils avaient précédemment dessiné le trait, et on leur donna les indications nécessaires pour mettre à la fois de la vérité et de l'effet dans leur ouvrage.

TABLEAU des épures d'ombres.

1. Charpente sur chantier.
2. Escalier.
3. Niche.
4. Arche de pont.
5. Sphère.
6. Sphéroïde.
7. Surface de révolution.
8. Chapiteau dorique.
9. Base attique.
10. Vase éclairé par un flambeau.

Perspective.

DANS le dernier mois de l'année on exposa les principes de la *perspective;* les élèves comprirent facilement que toute la perspective se réduit à un seul problème, qui consiste à déterminer l'intersection d'un plan avec une surface conique qui passe par la ligne du contour apparent de l'objet, et

dont le sommet est à l'œil ; mais comme dans les arts il n'est question que de formes heureuses et d'un bel effet, on a établi certaines règles à suivre dans le choix de la position de l'œil et du tableau ; au moyen de ces règles, les élèves apprirent à mettre un objet en perspective, sans risque de tomber dans des anamosphores.

On proposa aux élèves différentes formes usuelles en architecture et en décoration, et pour les guider dans cette pratique, on leur présenta des modèles exécutés avec soin et intelligence.

Par le C.en EISENMAN.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

Nous avons dit précédemment que les quatre premiers mois du cours ordinaire de physique ont été employés à voir tout ce qui regarde une grande partie des propriétés des corps, telles que leur étendue, leur impénétrabilité, leur mobilité, leur inertie que nous avons considérée dans les corps solides et fluides, leur gravité qui nous a donné occasion de traiter du mouvement des corps célestes, leur porosité, leur élasticité, enfin les propriétés mécaniques de l'air relatives à l'équilibre, et qui sont l'objet de la pneumatologie.

Nous avons ensuite passé à la théorie des *affinités*, c'est-à-dire, de cette force qui donne le mouvement et la vie à la matière, qui l'organise de mille manières différentes, détruit et renouvelle sans cesse les espèces, établit, en un mot, une circulation perpétuelle de principes d'un règne dans un autre : de cette propriété, au moyen de laquelle on explique les effets de la réfraction de la lumière, toutes les combinaisons et précipitations chimiques; la forme sphérique que prend une goutte de fluide abandonnée à elle-même; l'ascension et l'abaissement de certaines liqueurs dans les tubes capillaires, selon qu'elles ont ou non la faculté de les mouiller; le phénomène de la flamme que présentent les corps en ignition, ainsi que le mécanisme de la respiration et l'entretien de la chaleur animale, opérés par la décomposition de l'air vital, qui abandonne la matière du feu dans laquelle sa base était dissoute. C'est cette force enfin qui met le sceau à cette grande vérité entrevue par *Lucrèce, que rien ne meurt dans la nature*. La nature, occupée sans cesse à enfanter de nouveaux prodiges, ne présente l'image de la destruction, que pour offrir bientôt le spectacle d'une création nouvelle.

Jusqu'à présent on avait banni cette théorie de la plupart des cours de physique, parce qu'on la regardait comme appartenant exclusivement à la chimie. C'est ainsi qu'en s'efforçant de tracer une ligne de démarcation

entre toutes les sciences, on s'est mis long-temps dans l'impossibilité d'en reculer les bornes. Mais, nous ne saurions trop le répéter, il n'y a qu'une science, celle de la nature : toutes celles qu'il nous a plu de considérer isolément, se prêtent un secours mutuel, et il n'y en a aucune qui ne puisse être mise à contribution par toutes les autres. C'est dans ce sens que l'analyse mathématique pourrait être appelée la science universelle, parce qu'il n'est aucun genre de connaissances qui ne soit susceptible d'être soumis à la rigueur du calcul ; ou du moins c'est là que doivent tendre tous les travaux des géomètres ; ce doit être, en un mot, le dernier effort de la raison perfectionnée. Aussi nous est-il souvent arrivé, en parlant d'un phénomène, de faire des excursions dans des terres regardées autrefois comme étrangères au domaine de la physique, d'y porter, non la faulx qui détruit, mais la faulx qui moissonne, et de rapprocher des observations faites quelquefois dans des vues très-différentes.

Il n'a pas dû, à la vérité, entrer dans notre plan de traiter des affinités dans tous les rapports qu'elles ont avec les parties constituantes des corps, parce que c'est là l'objet de la chimie : mais, comme elles sont la base de la météorologie, de l'hygrométrie, de la théorie des tubes capillaires, de celle du calorique, des gaz, &c., nous avons dû les considérer dans les phénomènes généraux qu'elles présentent ; et, sous ce point de vue, peut-être pourroit-on dire que la physique particulière n'est autre chose que la chimie générale.

Quoi qu'il en soit, il ne faut pas confondre cette force qui résulte de la tendance qu'ont les molécules des corps les unes vers les autres, avec la gravitation, qui n'appartient qu'à leurs masses. Tous les corps ne suivent pas la même loi dans leur affinité pour la même substance, tandis que la gravitation, toujours constante, les affecte tous de la même manière, et diminue comme le quarré de la distance augmente. Tout nous porte donc à croire que ce sont deux propriétés très-distinctes dans la matière, puisqu'elles agissent si différemment. Mais existe-t-il pour chaque corps une loi particulière d'affinité, ou bien y a-t-il pour tous une seule et même loi, dans laquelle entre une constante, variable pour chacun d'eux ? C'est sur quoi l'état actuel de nos connaissances ne nous permet pas de

prononcer : tout ce que nous savons, c'est qu'en général cette force cesse d'exercer son action, dès que la distance devient perceptible à nos sens.

Après nous être arrêtés sur des considérations générales, relativement à cette propriété des corps, et après l'avoir envisagée sous les divers points de vue dont elle est susceptible, nous avons réduit à un certain nombre de lois tous les phénomènes qui en dérivent.

Première Loi. Une masse fluide quelconque, abandonnée à elle-même et jouissant de toutes les propriétés de la matière, excepté de la pesanteur, prend toujours la forme sphérique.

En effet, si on ne considère d'abord que les molécules intérieures de cette masse, il est clair que, l'affinité ne s'exerçant qu'au contact, chacune d'elles est également attirée dans tous les sens, et qu'elles sont par conséquent toutes en équilibre, et dans le même cas que si elles n'exerçaient aucune action les unes sur les autres. Si l'on considère ensuite celles qui forment l'enveloppe extérieure, on voit que chacune d'elles est plus pressée dans un sens que dans un autre, puisqu'extérieurement elles n'éprouvent l'action d'aucune force : mais comme elles s'attirent également entre elles, et qu'elles sont attirées par les molécules intérieures, elles tendent à former une surface courbe, dont chaque partie est dans le même cas que si les molécules qui la composent, n'ayant aucune affinité l'une pour l'autre, et étant enchaînées entr'elles par des liens souples, formaient autant de tissus flexibles, aux extrémités desquels on suspendît des poids capables de produire la même courbure. Cela posé, on voit encore que chacun de ces tissus, en pressant les molécules intérieures, tend à leur faire occuper extérieurement le plus petit espace possible. Or on sait que de tous les corps qui renferment la même quantité de matière, la sphère est celui qui présente la moindre surface : donc il est nécessaire que la masse fluide que nous considérons, prenne une forme sphérique.

De-là vient qu'en supposant que les planètes aient été originairement fluides, elles se seraient nécessairement arrondies, quand même elles n'auraient pas été soumises à l'action de la pesanteur. Mais comme cette dernière puissance se combine avec la force centrifuge qu'ont leurs différentes parties, en vertu du mouvement de rotation qui les anime, on

démontre qu'il résulte de cette nouvelle considération, qu'elles ont dû prendre la forme d'un ellipsoïde, dont le petit diamètre est leur axe même de rotation.

Cette loi de sphéricité ne s'observe jamais rigoureusement dans la nature, quelque petite que soit une masse fluide ; parce que ses molécules obéissant à l'effort de la pesanteur, il en résulte qu'elle se termine par une surface courbe, qui est de l'espèce de celle que l'on nomme *linéaire ;* de manière que lorsqu'elle est retenue par un obstacle avec lequel elle n'a aucune adhérence, son diamètre vertical, toujours plus petit que son diamètre horizontal, a une limite d'accroissement qui est déterminée par la hauteur d'une colonne fluide, capable de vaincre la cohésion de ses molécules, et d'agrandir le cercle sur lequel elles reposent.

De-là suivent un grand nombre de phénomènes, qui ont trouvé leur explication dans cette loi.

Seconde Loi. Pour que deux corps puissent entrer en combinaison, il faut 1.° que l'un des deux, au moins, ait quitté l'état solide ; 2.° que la tendance de l'un pour l'autre soit plus grande que la somme des cohésions des molécules de chacun d'eux.

Après avoir développé cette loi, nous en avons fait l'application aux principaux phénomènes de dissolution, de précipitation et de saturation. Nous avons vu ensuite que la seule condition nécessaire pour qu'un liquide mouille un solide, ou adhère à sa surface, c'est qu'il suffit que la tendance de l'un pour l'autre soit plus grande que la cohésion des molécules du liquide. De cette adhérence résultent une foule d'autres phénomènes intéressans, que nous avons tous passés de même en revue.

Troisième Loi. Les premières molécules qui entrent dans une combinaison, y tiennent plus fortement que celles qui y entrent les dernières ; et, réciproquement, celles qui en sortent plutôt, y tiennent moins que celles qui en sortent plus tard.

Du développement de cette loi est résulté l'examen d'une question importante. Lorsque deux corps mixtes quelconques s'unissent entre eux, n'éprouvent-ils aucun changement dans la combinaison de leurs parties constituantes ; ou bien le nouveau composé forme-t-il un nouveau système de principes résultant de la réunion de tous, et indépendant de

leur premier état ? Cet examen nous a conduits à assigner les conditions nécessaires à la miscibilité de deux fluides en toute proportion, ou les limites qui établissent leur saturation.

Quatrième Loi. Les affinités électives d'un corps pour diverses substances, observent constamment le même ordre de puissance, tant que les causes qui concourent à leur combinaison ne changent pas.

Il résulte de cette loi qu'il ne peut exister d'affinités réciproques, comme l'ont cru long-temps les chimistes ; parce qu'il serait absurde de supposer que la même cause pût produire des effets opposés. S'il se rencontre quelques anomalies apparentes dans cet ordre constant de phénomènes, c'est qu'alors il arrive quelque variation dans les circonstances, ou quelque force nouvelle qui change les conditions d'équilibre, et trouble l'ordre des affinités.

Nous avons fait voir à quoi se réduit la détermination du rapport de ces diverses affinités, problème important, dans lequel nous n'avons pas même fait encore le premier pas, et dont la solution doit conduire aux plus grandes découvertes. Cependant nous verrons tout-à-l'heure comment les tubes capillaires peuvent nous fournir le moyen de déterminer une limite de ces rapports.

Cinquième Loi. Une combinaison peut subir différens degrés de décomposition, qui sont toujours déterminés par le point d'équilibre qui s'établit entre la tendance de la substance décomposante pour l'un des principes de la combinaison, et l'affinité de ces mêmes principes entre eux.

De cette loi dérive l'explication d'un grand nombre d'anomalies que présentent les affinités électives, telles que la décomposition de l'acide sulfurique bouillant, par le fer, et de l'oxide de fer par le soufre, celle de l'eau par le même métal, et de l'oxide de fer par le gaz hydrogène, &c. ; décompositions dont le point d'équilibre est toujours déterminé par la formation simultanée de substances semblables.

Sixième Loi. Pour qu'un corps mixte puisse être décomposé par le concours de plusieurs affinités, il faut que la somme des affinités divellentes soit plus grande que la somme des affinités quiescentes.

Comme les substances décomposantes peuvent influencer diversement les principes de la combinaison, qu'elles tendent à rompre, cette loi

présente plusieurs cas particuliers que nous avons examinés successivement, et dans chacun desquels nous avons déterminé le point de rupture d'équilibre.

Nous avons ensuite fait l'application de la théorie des affinités à la capillarogie, c'est-à-dire, à cette partie de la physique qui traite des tubes capillaires. On a long-temps tourné autour des phénomènes qu'ils présentent, avant d'en découvrir la véritable cause, et ils ne sont devenus une branche intéressante de la science, que parce qu'ils servent à en expliquer une infinité d'autres. Une autre circonstance a contribué à leur donner encore de l'importance : vers le commencement de ce siècle, on crut avoir trouvé dans ces mêmes phénomènes de nouveaux témoins qui venaient déposer en faveur de la gravitation universelle; mais ils ne prouvaient rien, sinon qu'il existe dans la matière une propriété qui n'appartient qu'aux molécules des corps, qui est variable dans chacun d'eux, et qui n'a rien de commun avec cette loi constante de la nature, en vertu de laquelle ils s'attirent en raison composée de la directe des masses et de l'inverse des quarrés des distances. *Newton* aurait gémi, sans doute, s'il avait pu prévoir qu'un jour les vérités sublimes qu'il nous a révélées, auraient besoin de semblables témoignages. Mais ces vérités, lors même qu'elles avaient déjà frappé d'admiration et subjugué, pour ainsi dire, l'Europe entière, avaient encore de puissans adversaires au sein même de la ci-devant académie des sciences; de sorte que l'on ramassait de toutes parts les preuves que l'on croyait propres à les établir. Telle est l'origine de l'intérêt que les savans ont mis à expliquer ces sortes de phénomènes.

Au reste, nous avons eu plus d'une fois occasion d'observer l'espèce de fatalité attachée à la propagation des grandes découvertes. Il semble que la plupart des hommes, toujours dociles à se soumettre au joug des préjugés, se soient plus, dans tous les temps, à élever une barrière insurmontable entr'eux et la raison.

Quoi qu'il en soit, les tubes capillaires présentent deux phénomènes très-remarquables, qui paraissent contredire une des principales lois de l'équilibre des fluides: c'est que, lorsqu'on les plonge dans un liquide, tantôt ils l'élèvent au-dessus de son niveau, et tantôt ils l'abaissent au-dessous.

Nous

Nous nous sommes d'abord occupés du premier de ces phénomènes, et comme il n'a lieu qu'avec les fluides qui mouillent les tubes, nous avons dû naturellement, pour découvrir la cause de cette ascension, chercher quelle est la manière dont se comportent en général tous les fluides avec les corps qu'ils ont la faculté de mouiller. Nous avons fait voir que si l'on plonge, par exemple, une lame de verre dans une masse d'eau; il arrive, en vertu de ce que l'affinité du verre pour l'eau est plus grande que celle de l'eau pour elle-même, 1.° que ce fluide doit s'élever de chaque côté de la lame, et former deux surfaces concaves du genre de celles que l'on nomme *lintéaires;* 2.° que de la masse d'eau soulevée, il doit se détacher sans cesse des molécules de fluide, qui s'élèvent à des hauteurs différentes et dépendantes de certaines circonstances : ce qui explique parfaitement pourquoi les cristallisations d'un grand nombre de sels ont la propriété de grimper le long des parois des vases qui les contiennent, et de se répandre même au-dehors; 3°. que le poids de la masse soulevée est la mesure exacte de l'adhérence de cette masse avec la ligne de molécules supérieures, déterminée par la longueur de la lame; 4.° que, quelle que soit la nature du fluide, la surface courbe est toujours la même, et qu'elle se termine seulement plus tôt ou plus tard, suivant que la cohésion des molécules du fluide est moins ou plus grande; 5.° que ni l'adhérence du fluide avec la portion plongée de la lame, ni la prépondérance des colonnes extérieures n'entrent pour rien dans la suspension de la portion d'eau soulevée, mais qu'elle est due uniquement à l'adhérence des molécules d'eau qui terminent la surface courbe, avec les élémens du verre qui sont en contact avec ces mêmes molécules, et qui sont immédiatement au-dessus; 6.° enfin, que si l'on plonge une seconde lame parallèlement à la première, tout se passera encore de même, si elles sont à une certaine distance l'une de l'autre; mais que si on les rapproche de manière que les courbes intérieures se croisent, l'eau doit s'élever plus haut qu'auparavant, et la masse du fluide soulevée augmentera à mesure que la distance diminuera.

D'après cela, il nous a été facile de faire voir que si l'on emploie des tubes de verre qui soient capillaires, l'élévation de l'eau doit être exactement en raison inverse des diamètres de ces tubes. De-là on peut déduire un moyen très-simple de déterminer les rapports d'affinité qu'ont, pour leurs

propres molécules, les fluides susceptibles de s'élever ainsi dans les tubes capillaires, puisque le poids de chaque colonne fluide soulevée est la mesure de leur adhérence avec une colonne de molécules qui a même diamètre que le tube. Il suffit, pour cela, de déterminer les hauteurs auxquelles se tiennent ces différens fluides dans un même tube, et de les multiplier respectivement par la pesanteur spécifique de chacun d'eux, en observant de faire toutes ces expériences à la même température. C'est ainsi qu'en représentant l'affinité de l'eau distillée pour elle-même par l'unité, nous avons trouvé constamment les nombres suivans pour les affinités de trois autres fluides, relatives à la température de 20 degrés (échelle de 100 parties).

Acide sulfurique	0,7.
Alkool	0,3.
Éther sulfurique	0,2.

Il est vraisemblable que ces rapports subissent quelques changemens par d'autres températures, parce que l'action du calorique sur tous les corps n'est pas la même pour chacun d'eux. Il suit de-là que, puisqu'il faut que la tendance de deux substances soit plus grande que la somme des cohésions de leurs molécules, pour qu'elles puissent se combiner entr'elles, on peut affirmer que l'affinité de l'eau pour l'acide sulfurique est plus grande que 1,7, et que celle de l'eau pour l'alkool est plus grande que 1,3.

Passant de-là au phénomène d'abaissement des liqueurs au-dessous de leur niveau, nous avons d'abord remarqué qu'il n'a lieu que dans les tubes qu'elles ne mouillent pas, et conséquemment nous avons dû encore, pour en découvrir la cause, chercher à observer comment les fluides, en général, se comportent à l'égard des corps qu'ils n'ont pas la propriété de mouiller. Nous avons fait voir que si l'on plonge, par exemple, une lame de verre dans un bain de mercure, il arrive, en vertu de ce que l'affinité de ce fluide pour lui-même est plus grande que celle du verre pour le mercure, 1.° que le mercure doit se déprimer de chaque côté de la lame, et former deux surfaces convexes de même nature que celles que donne le phénomène d'ascension; 2.° que le poids de la masse fluide déprimée

mesure exactement la force avec laquelle adhèrent entr'elles deux lignes de molécules fluides de même longueur que la lame ; 3.° que la dépression doit être d'autant plus considérable, que la cohésion des molécules du fluide est plus grande ; 4.° que la lame est soulevée avec une force égale au poids du fluide déprimé ; 5.° enfin, que si l'on plonge une seconde lame parallèlement à la première, les choses se passent de la même manière, si elles sont à une certaine distance l'une de l'autre ; mais que si elles sont assez rapprochées pour que les courbes intérieures se croisent, alors la dépression doit être plus considérable qu'auparavant, et qu'elle devient d'autant plus grande, que la distance des lames est moindre.

Il ne nous a pas été difficile, d'après cela, de démontrer qu'en employant des tubes capillaires, l'abaissement du mercure doit être exactement en raison inverse des diamètres de ces tubes ; et cette observation nous a fourni un nouveau moyen de déterminer en nombre l'affinité du mercure pour lui-même, comparée à celle de l'eau distillée, prise pour unité : ce qui se fait en multipliant la hauteur de la dépression par la pesanteur spécifique du mercure, et en divisant le produit par la hauteur à laquelle l'eau s'élève dans le même tube. Nous avons trouvé constamment, après diverses expériences faites sur différens tubes, que la force d'agrégation des molécules du mercure est représentée par 3,6..., c'est-à-dire, qu'elle est presque quadruple de celle avec laquelle les molécules d'eau adhèrent entr'elles.

Nous avons ensuite tiré de tous ces phénomènes d'abaissement et d'ascension les principes nécessaires pour expliquer les attractions et répulsions apparentes que présentent certains corps qui flottent à la surface d'un fluide. Enfin nous en avons fait l'application à une foule d'autres phénomènes qui ne peuvent s'expliquer qu'à l'aide de la capillarité.

De-là nous avons passé à la théorie du calorique, ce principe inexplicable de destruction et de vie, dont l'action s'exerce indistinctement sur tous les corps, et semble ne les dévorer que pour les rendre à de nouvelles combinaisons, ou à leurs premiers élémens ; qui creuse les montagnes en cratères effrayans, et de leurs flancs entr'ouverts fait sortir des fleuves de lave brûlante ; qui va jusque dans le sein des mers tourmenter les rochers, et quelquefois en élance de nouveaux continens ; qui, s'agitant

dans les gouffres de la terre les plus profonds, rompt bientôt ses énormes barrières, de-là vient, par intervalles, bouillonner à sa surface, et trop souvent y laisse des traces ineffaçables du plus affreux bouleversement : cet être si nécessaire à la conservation et à la reproduction des autres êtres, que l'homme a su arracher de la veine siliceuse qui le recèle; qu'il a ensuite eu l'art de maîtriser, d'asservir à ses besoins, d'associer même à ses fêtes; qu'il a contraint, là, de fondre les métaux les plus rebelles, et de les disposer à ouvrir des routes faciles à la lumière; ici, tour-à-tour de faire prendre au caillou la souplesse de l'argile, à l'argile la dureté du caillou; plus loin, de s'élever en jets étincelans, ou de tomber en étoiles menaçantes, de réveiller par-tout l'idée de la foudre, ou de réaliser, pour ainsi dire, la fiction des enfers : cet agent universel de la nature, en un mot, qui permet à la matière de prendre toutes sortes de formes, et ne voit dans tous les corps que des êtres soumis à sa puissance; qui prête aux uns des aîles, et fait couler les autres à flots précipités; qui tantôt donne au plomb meurtrier la rapidité de l'éclair, et tantôt devient lui-même docile à recevoir des chaînes; qui mérita enfin de l'antique superstition qu'elle lui dressât des autels, et l'offrît au culte des générations.

Ce fluide est le seul corps de la nature dont on n'ait pu parvenir encore à démontrer la pesanteur; et le célèbre chancelier *Bacon* est le premier qui ait élevé des doutes sur son existence, et qui ait pensé qu'il n'est dans les corps que l'effet de l'agitation de leurs molécules. Quoi qu'il en soit de cette opinion, après des considérations générales sur le calorique, nous avons, de même que pour les affinités, réduit à un certain nombre de lois tous les phénomènes qu'il présente.

Première Loi. Le calorique dilate tous les corps, suivant toutes leurs dimensions; et cet effet, qui est d'autant plus grand que la dilatation est déjà elle-même plus grande, n'a de terme que lorsque leurs molécules sont parvenues à une distance telle que le calorique, en les écartant, cesse d'exercer son action sur elles, tandis que ces mêmes molécules continuent d'agir les unes sur les autres.

Dans la série nombreuse de phénomènes qui dépendent de cette loi, et que nous avons tous passés en revue, nous nous sommes arrêtés

particulièrement aux effets du calorique sur le pendule, dont il concourt lui-même à corriger les variations qu'il produit ; aux divers moyens d'empêcher les appartemens de fumer, et à la théorie du thermomètre, instrument qui ne donne qu'une mesure approchée de la température, parce qu'en général les différentes dilatations qu'éprouve un corps par des accroissemens égaux de calorique, ne sont pas uniformes. Cependant on est dans l'usage de regarder ces dilatations comme proportionnelles aux divers changemens de température, et elles le sont en effet sensiblement, lorsque l'échelle de comparaison dont on se sert, n'est qu'une très-petite partie de la marche que suit dans ses différentes températures le fluide que l'on emploie, ou que les termes où commence et finit cette échelle, sont loin des termes extrêmes de condensation et de dilatation auxquels il peut arriver. D'où il résulte que les thermomètres à mercure sont préférables à ceux qui sont faits avec l'alkool.

Le seul phénomène qui paraisse se soustraire à la loi précédente, c'est celui de la congélation de l'eau, dont le volume est, comme on sait, plus petit que lorsque cette substance est à l'état de glace. Mais il faut observer qu'ici la retraite du calorique n'est qu'une partie de la cause qui produit le changement de volume, et que lorsque l'eau vient à se congeler, elle abandonne l'air qu'elle tenait en dissolution, et qui, reprenant son état élastique, à mesure que les différentes couches de fluide passent à l'état solide, tend à les écarter, et à augmenter le volume total de la masse où il est alors emprisonné. Il reste à savoir à présent, s'il n'y a rien dans la nature de l'eau qui contribue au phénomène ; car de ce qu'elle était auparavant à l'état liquide, elle occupait le moindre volume possible. Or, par l'effet de la cristallisation, ses parties ont pris un autre arrangement, et par conséquent, dans cet état, elles occupent un plus grand volume qu'auparavant. Mais, d'un autre côté, la retraite du calorique en rapproche les molécules ; il faudrait donc pouvoir observer lequel de ces deux effets l'emporte sur l'autre, pour décider s'il y a autre chose que le dégagement de l'air qui produise cette augmentation de volume.

Seconde loi. 1.° Le calorique se propage toujours de manière à se mettre en équilibre dans un système de différens corps. 2.° Cet équilibre résulte

de l'action de quatre forces, dont deux tendent sans cesse à le faire entrer dans les corps, et les deux autres à l'en faire sortir.

De cette loi, susceptible d'un grand nombre d'applications, nous avons déduit, d'après les belles expériences de *Laplace* et de *Lavoisier*, la manière de déterminer la *capacité* des corps relativement au calorique, c'est-à-dire, la quantité de ce fluide dont ils ont besoin, sous une masse et une température données, pour s'élever à une autre température déterminée. Nous avons fait voir, en même temps, l'abus qui s'est introduit dans la science, en admettant la distinction de calorique *libre*, et de calorique *latent :* il ne peut y avoir aucune portion de ce fluide en liberté dans les corps, puisqu'il a la faculté de les dilater tous, et qu'il y est toujours dans un état actuel de compression. En général, le calorique exerce deux fonctions; la première, celle de vaincre la cohésion des molécules d'un corps, et de satisfaire leur tendance pour ce fluide; et cette fonction ne se manifeste que par le changement de forme du corps. La seconde, c'est de faire équilibre à la température extérieure, et cette fonction se manifeste par une action sur le thermomètre : de sorte qu'il n'y a aucune molécule de ce fluide qui n'exerce l'une et l'autre de ces fonctions à-la-fois. Mais, lorsqu'une certaine quantité de calorique s'introduit dans un corps, on peut la regarder comme partagée en deux parties, dont l'une remplit la première fonction, et l'autre la seconde. Ce n'est que dans ce sens que la distinction précédente est admissible, et non pas comme on l'a entendu jusqu'à présent; alors, les expressions de calorique *libre*, et de calorique *latent*, ne sont que des manières abrégées de s'énoncer.

De cette même loi, suit par rapport au calorique la distinction plus exacte des corps, 1.° en *conducteurs*, c'est-à-dire, qui s'échauffent et se refroidissent lentement; 2.° en *non-conducteurs*, c'est-à-dire, sur lesquels ce fluide ne peut exercer d'action qu'à leur surface, et qui ne lui permettent ni d'entrer dans leur intérieur, ni d'en sortir; tels sont ceux qu'on obtient à la température par laquelle ils changent d'état : 3.° en *mauvais conducteurs*, c'est-à-dire, ceux que le calorique pénètre ou abandonne lentement. De-là enfin résulte, comme nous l'avons fait voir, l'explication d'une multitude de phénomènes.

Nous avons passé de-là à l'examen des forces qui maintiennent le calorique

en équilibre dans les corps. Ces forces sont 1.° leur tendance pour ce fluide et le ressort du calorique extérieur, qui tendent sans cesse à le faire entrer, 2.° les pressions extérieures et la cohésion des molécules des corps, qui tendent, au contraire, à le faire sortir.

Il suit de-là, en général, que les corps dégagent ou absorbent du calorique, lorsque l'une quelconque de ces forces vient à varier, ce qui élève ou abaisse la température des corps circonvoisins, selon le sens dans lequel se fait cette variation. Le dégagement et l'absorption continuent jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli entre ces forces, et que par conséquent l'augmentation ou la diminution de ressort du calorique extérieur soit égale à la variation de la force qui a éprouvé quelque changement.

Comme nous n'avons aucun moyen de faire varier la tendance des corps pour le calorique, ni la cohésion de leurs molécules, nous nous sommes contentés de rechercher ce qui doit arriver, lorsque les deux autres forces viennent à subir quelque changement. D'abord, nous avons vu que le premier phénomène que présente une augmentation ou une diminution de température extérieure, c'est de faire passer un grand nombre de corps de l'état solide à l'état liquide, ou réciproquement; ce qui ne peut se faire sans abaissement ou sans élévation de température dans les corps environnans. Nous avons essayé, d'après cela, de poser les principes de la *cristallographie* en général, et particulièrement de la cristallisation des sels.

Nous avons ensuite examiné ce qui doit arriver, lorsque les pressions extérieures viennent à varier. Nous avons fait voir que c'est à l'augmentation de ces forces qu'est dû le dégagement considérable de calorique qu'on observe dans toutes les opérations où l'on emploie le frottement, la percussion, le balancier, le laminoir, &c.; mais la pression la plus ordinaire à laquelle un corps soit soumis, est celle de l'atmosphère, qui ne s'exerce librement sur le calorique contenu entre ses molécules, que lorsque le corps est devenu liquide: de sorte que, dans cet état, la cohésion de ses molécules étant presque entièrement vaincue, cette pression est la seule force qui s'oppose à l'intromission du calorique. Si l'on imagine donc qu'elle soit subitement anéantie, ce fluide passera en abondance des corps circonvoisins dans l'intérieur du liquide, et parviendra bientôt à surmonter ce que ses molécules conservent d'adhérence, ainsi que

leur pesanteur. C'est alors qu'il sera maître de s'en emparer, de les dissoudre, et de leur communiquer toutes ses propriétés mécaniques, telles que l'élasticité, l'expansibilité, &c.; et le corps, de liquide qu'il était, deviendra gazeux.

Nous avons fait observer que c'est en effet ce qui arrive à tous les liquides, lorsqu'ils sont soumis au vide de la machine pneumatique. De-là résulte une vérité importante, et qui n'est connue que de nos jours; c'est qu'il n'y a de liquides constans à la surface de la terre, que parce que nous avons une atmosphère. Il existait bien quelques expériences anciennes, desquelles il était peut-être facile de le conclure; mais le véritable philosophe n'est pas celui qui observe quelques faits isolés, c'est celui qui les compare, les rapproche, et en tire des conséquences d'où naissent des vérités générales. *Monge* est le premier qui ait ainsi annoncé aux savans, que si l'atmosphère venait tout-à-coup à disparaître, tous les liquides s'élanceraient subitement dans l'espace, s'y convertiraient en vapeurs, et formeraient une nouvelle atmosphère.

Nous avons, de plus, observé que, sans supprimer le poids de l'atmosphère, on peut encore produire le même phénomène, en augmentant suffisamment le ressort du calorique extérieur, pour le rendre capable de vaincre la pression atmosphérique, de maîtriser les molécules du liquide sur lequel il exerce son action, de les tenir dans un véritable état de dissolution, et de les convertir en gaz; et c'est alors que le liquide est dit en ébullition. Nous avons pris de-là occasion d'exposer les principes de la gazologie, ainsi que la théorie des pompes à feu; ce qui nous a amenés à cette conclusion: qu'il paraît que c'est à la conversion d'une grande quantité d'eau en vapeurs dans le sein de la terre, que sont dues ces grandes crises de la nature, contre lesquelles le génie de l'homme est impuissant, qui semblent de temps à autre l'avertir de sa faiblesse, et que l'on connaît sous le nom des *tremblemens de terre.* Enfin, nous avons fait remarquer que, dans ce nouveau changement d'état, il y a la même analogie que dans le passage de l'état solide à l'état liquide, et réciproquement, et que de-là résulte cette conséquence: que lorsqu'un corps change d'état par la combinaison, ou autrement, il dégage ou absorbe du calorique, qu'il reprend ou abandonne de nouveau, en

repassant

repassant à son premier état; ce qui nous a fourni l'explication d'un grand nombre de phénomènes.

Troisième loi. Pour que deux corps puissent se combiner, il y a une latitude de température en-deçà et au-delà de laquelle leur action est nulle, et qui détermine pour chacun d'eux un état favorable à la combinaison.

Nous avons conclu du développement de cette loi, que le calorique peut être considéré sous deux points de vue différens, ou comme *dissolvant*, ou comme *instrument* propre à isoler les molécules des corps, et à vaincre la force qui les enchaîne. Dans le premier cas, ces molécules, tenues en dissolution par le calorique, partagent toutes ses propriétés mécaniques, et sont douées d'une sorte de répulsion qui s'oppose à leur combinaison avec d'autres substances moins susceptibles de passer à l'état de vapeurs. Dans le second, au contraire, ces mêmes molécules jouissent, pour ainsi dire, de toute la tendance qu'elles peuvent avoir à la combinaison. Ainsi, par la première disposition, les corps s'éloignent de plus en plus de l'état favorable à la combinaison, tandis que par la seconde, ils s'en rapprochent. De-là vient, entr'autres applications nombreuses dont cette loi est susceptible, la faculté qu'ont certaines substances de se décomposer, ou de s'unir à d'autres par une même élévation de température, suivant que l'une de ces deux dispositions est dominante.

Quatrième loi. Deux corps ont d'autant plus de tendance à l'union, que, par une suite de la manière dont le calorique les affecte, ils sont plus près de l'état que doit prendre leur combinaison, ou qu'il y a moins de distance entre l'état de l'un et celui de l'autre.

De cette loi dérive l'explication d'un grand nombre de phénomènes; tel est, par exemple, celui que présentent certaines substances qui ne peuvent s'unir à un principe libre, et qui l'enlèvent à une combinaison, quoique ce principe soit soumis à l'action d'une force qui l'enchaîne.

Cinquième loi. L'action du calorique sur les corps tend sans cesse à troubler l'ordre de leurs affinités électives.

Après avoir essayé de démontrer cette loi d'une manière générale, nous avons vu comment elle sert à expliquer une foule d'anomalies apparentes qui semblent contrarier une des principales lois que suivent les corps dans l'action qu'ils exercent les uns sur les autres.

Sixième loi. Lorsque deux corps qui ont différens états, se combinent ensemble, l'un est déterminé à prendre la forme de l'autre, selon le rapport qui existe entre l'adhérence des principes de la combinaison et la tendance de cette même combinaison pour le calorique.

Cette loi une fois démontrée, il nous a été facile d'en tirer l'explication de beaucoup de phénomènes qui ont paru long-temps inexplicables; tels sont ceux que présentent la chaux, les alcalis et les sels neutres, qui ne passent à l'état liquide qu'après s'être saturés de leur dissolvant; les liquides eux-mêmes, qui, lorsqu'ils sont exposés à l'action du calorique, commencent par se saturer de ce fluide avant de passer à l'état gazeux; le gaz oxigène, qui tantôt se solidifie avec les métaux, et tantôt fait partager son élasticité à d'autres corps; certaines substances, qui, exposées séparément au feu le plus violent que nous puissions exciter, ne peuvent entrer en fusion, et dont le mélange acquiert de la fusibilité; d'autres enfin, qui sont chacune très-fusibles, et dont la combinaison entre difficilement en fusion.

Septième loi. Pour qu'il y ait combustion, il faut trois conditions : 1.° la présence du gaz oxigène, 2.° celle d'un corps capable de se combiner en totalité ou en partie avec la base de ce gaz, 3.° une certaine élévation de température qui favorise et entretienne cette opération.

A l'aide de cette loi, nous avons facilement rendu raison du spectacle de la flamme que présente un grand nombre de corps combustibles; de la forme pyramidale qu'affecte toujours la flamme d'une bougie; de la faculté qu'ont certains corps, les uns de s'éteindre, et les autres de s'enflammer dans les mêmes circonstances; du rôle que joue dans la respiration le gaz oxigène, qui va jusqu'aux dernières extrémités porter la chaleur et la vie; des diverses circonstances dans lesquelles on peut exciter l'action du calorique, ou la faire naître, &c.

Nous avons vu ensuite qu'on peut considérer la combustion sous le rapport de la fixation de l'oxigène, ou sous celui du dégagement du calorique. Dans le premier cas, nous l'appelons *oxigénation*, qui prend le nom d'*acidification* ou d'*oxidation*, suivant que l'oxigène entre ou non en quantité suffisante dans une combinaison, pour qu'elle devienne un des principes prochains des sels neutres. Dans le second cas, nous l'appelons *ignition*, qui prend le nom de *phosphorescence*, lorsqu'elle se fait avec clarté sans chaleur; de *calorification*, avec chaleur sans clarté; d'*inflammation*, avec clarté, chaleur et flamme; d'*incandescence*, avec clarté, chaleur et non flamme; de *détonation*, avec bruit; et de *fulmination*, avec une très-grande violence. Enfin, nous avons terminé cette théorie par l'application des divers phénomènes qui ont rapport à ces différens points de vue, sous lesquels nous avons considéré la combustion.

Après avoir traité du calorique, nous avons dû naturellement passer à la théorie de la lumière, cet autre fluide, qui se plaît à parer la nature des couleurs les plus vives, sans lequel nous serions étrangers au spectacle de toutes ses merveilles, dont ces admirables flambeaux qui brillent dans l'immensité de l'espace, sont tout-à-la-fois et la source inépuisable et l'éternel foyer : ce principe d'une extrême subtilité, qui agit avec tant d'énergie sur tous les corps organisés; qui tantôt exalte leur saveur, et tantôt les rend prodigues de parfums délicieux; qui donne aux uns des fibres robustes, et revêt les autres d'une robe éclatante; dont l'absence les condamne tous à la plus humiliante dégradation, à la perte de leurs plus belles formes, et jusqu'à l'impuissance de propager leur espèce; dont l'action fécondante, en un mot, anime sans cesse le tableau de la nature, et verse des torrens de vie sur tous les êtres soumis à sa puissance.

Nous avons d'abord exposé les deux systèmes qui, jusqu'à présent, ont divisé les philosophes sur la nature de la lumière, que les uns regardent comme l'ébranlement des particules d'une prétendue *matière subtile*, supposée universellement répandue dans la nature, et pénétrant facilement tous les corps; tandis que les autres pensent qu'elle émane réellement des corps lumineux, qui se dépouillent sans cesse d'une partie

de leur propre substance. Nous avons présenté les probabilités qui tendent à étayer chacune de ces opinions, ainsi que les difficultés par lesquelles on peut les combattre.

Nous n'avons pas dissimulé combien les affinités électives dont jouit particulièrement ce fluide, soit dans un grand nombre d'opérations chimiques, soit dans les phénomènes de la nature, militent en faveur du système de l'émanation, et nous avons fait voir l'erreur dans laquelle il paraît que l'on est tombé, en considérant un rayon de lumière comme formé par une suite de globules lumineux tous *contigus* les uns aux autres.

Nous avons ensuite considéré la lumière sous les trois points de vue sous lesquels on a coutume de l'envisager; c'est-à-dire, en tant qu'elle arrive d'un objet à l'œil, ou directement, ou après s'être réfléchie, ou enfin après avoir été réfractée: d'où suit la division de l'optique en général, en optique proprement dite, en catoptrique et en dioptrique.

Quant à l'*optique* proprement dite, c'est-à-dire, celle qui traite de la manière dont la lumière se propage directement, nous avons réduit à quatre les principes sur lesquels est établie cette propagation.

1.° Un atome de lumière porte toujours avec lui l'image du point lumineux ou éclairé d'où il est parti; et, quelle que soit la route qu'il suive, nous rapportons toujours cette image dans la direction du dernier rayon rectiligne qui nous la transmet.

2.° La lumière, par sa nature, tend toujours à se propager en ligne droite.

3.° Un point lumineux lance des rayons en tous sens, et devient par-là le centre d'une sphère d'activité qui s'étend indéfiniment. De-là cette conséquence, que chaque point d'un objet se transmet à l'œil par une pyramide de rayons divergens, et que l'image entière de l'objet vient s'y peindre par une infinité de pyramides convergentes, dont tous les axes se croisent au centre de la prunelle de l'œil.

4.° L'intensité de la lumière que répand un point lumineux à différentes distances, diminue comme le quarré de la distance augmente.

Après avoir développé ces principes, nous en avons fait l'application

à un grand nombre de phénomènes, tels que le mouvement progressif de la lumière, son aberration, le renversement de l'image d'un objet au fond de l'œil, la détermination du rapport d'intensité de différentes lumières par le moyen de l'ombre projetée sur un même plan, &c.

Nous avons passé de-là à quelques considérations générales sur les ombres, et aux apparences que présentent les objets, suivant qu'ils sont vus de loin ou de près, et selon qu'ils sont plus ou moins éclairés. Nous avons vu que tantôt c'est par le moyen de l'angle optique sous lequel nous les apercevons, que nous jugeons de leur grandeur, de leur distance, de leur figure, &c.; que tantôt nous nous servons d'objets de comparaison avec lesquels l'habitude nous a familiarisés; que tantôt, enfin, certaines circonstances particulières déterminent notre jugement.

Nous nous sommes ensuite occupés de la *catoptrique*, qui a pour objet la lumière réfléchie. Nous avons vu qu'elle repose sur cette loi fondamentale, que si un rayon lumineux rencontre un obstacle impénétrable, il se réfléchit de manière que l'angle de réflexion est toujours égal à l'angle d'incidence; que c'est en vertu de cette loi que les objets deviennent visibles pour nous, et qu'ils nous paraissent blancs, noirs, ou diversement colorés, selon les circonstances qui accompagnent la réflexion. Nous avons ensuite passé en revue tous les phénomènes que présentent les miroirs plans, convexes et concaves, et nous avons observé, dans chacun d'eux, la marche des rayons de lumière dans toutes les inclinaisons qu'ils peuvent avoir entre eux.

Nous avons vu, 1.° que, dans les miroirs plans, l'image d'un objet est toujours droite, située derrière le miroir, à la même distance que l'objet, de la même grandeur, et avec la même inclinaison; 2.° que dans les miroirs convexes, l'image est de même toujours droite et derrière le miroir, mais que sa grandeur diminue à mesure que l'objet s'éloigne; qu'elle est toujours plus petite que l'objet et plus près du miroir, et que la limite de sa distance au miroir est le milieu du rayon de convexité; 3.° que dans les miroirs concaves, l'image est, selon la distance de l'objet, droite ou renversée, devant ou derrière le miroir, plus grande ou plus petite que l'objet; qu'à mesure que l'objet va de la surface du miroir au foyer, l'image qui est alors toujours droite, située derrière le miroir et

plus grande que l'objet, va du miroir à l'infini, et croît sans cesse en grandeur, jusqu'à devenir infinie; que l'objet continuant d'aller du foyer au centre de concavité, l'image qui est alors renversée et placée derrière le miroir, s'en approche depuis l'infini d'où elle part, jusqu'au centre, et décroît continuellement, jusqu'à devenir égale à l'objet; enfin, que l'objet s'éloignant depuis le centre jusqu'à l'infini, l'image qui est encore renversée et située devant le miroir, continue de s'approcher du miroir, depuis le centre jusqu'au foyer, et de décroître jusqu'à devenir infiniment petite.

Une observation importante, c'est que, lorsque l'objet va du foyer au centre, on voit une seconde image droite et située derrière le miroir, indépendamment de celle qui est renversée et placée par devant, ce qui doit être en effet, selon que l'œil reçoit les rayons réfléchis, avant ou après qu'ils se sont croisés.

De-là nous avons passé à la *dioptrique*, qui a pour objet la lumière réfractée, et dont le principe fondamental consiste en ce que, si un rayon lumineux passe obliquement d'un milieu dans un autre plus ou moins réfringent, il s'approche ou s'éloigne de la ligne perpendiculaire à la surface qui sépare ces milieux, de manière que, quelle que soit l'obliquité d'incidence, le sinus d'incidence et celui de réfraction sont dans un rapport constant.

Nous avons d'abord cherché à déterminer et à observer tout ce qui regarde la marche des images des objets, leur situation, leur grandeur, &c., lorsque les rayons de lumière n'éprouvent qu'une seule réfraction, en passant d'un milieu dans un autre séparé du premier par une surface plane, convexe ou concave. Ensuite nous avons fait les mêmes recherches, lorsque la lumière éprouve deux réfractions, en traversant, soit l'angle d'un prisme, ou un milieu terminé par des surfaces parallèles; soit un milieu de forme lenticulaire, ou terminé par des surfaces concaves; soit enfin un milieu plan concave, plan convexe, ou ménisque.

Nous avons vu 1.° que si un milieu réfringent est terminé par des surfaces parallèles, les rayons de lumière en sortent comme ils y sont entrés; 2.° que si l'on regarde un objet à travers une lentille ou verre convexe, l'image est, selon les circonstances, droite ou renversée, plus grande ou plus petite que l'objet, et située derrière ou devant la lentille; qu'à mesure

que l'objet va de la surface du verre au centre de convexité, l'image qui est toujours droite, plus grande que l'objet, et du même côté, s'éloigne de plus en plus jusqu'à une distance infinie, et croît sans cesse jusqu'à devenir infiniment grande ; et qu'à mesure que l'objet va du centre à l'infini, l'image qui est alors renversée, et du côté opposé à l'objet, s'approche sans cesse de la lentille, depuis l'infini d'où elle part, jusqu'au centre, et va toujours décroissant, jusqu'à devenir infiniment petite ; 3.° que si l'on regarde un objet à travers un verre concave, l'image est toujours droite, plus petite que l'objet, et située du même côté; et qu'à mesure que l'objet va de la surface du verre à l'infini, l'image va de la surface au centre de concavité, et décroît continuellement jusqu'à devenir infiniment petite.

Nous avons fait l'application de ces principes à diverses expériences et aux différens instrumens que considère l'optique, tels que celui qui porte le nom d'*optique*, la chambre obscure, la lanterne magique, les différentes espèces de microscopes et de télescopes, &c. Nous avons fait voir les diverses causes qui peuvent troubler la netteté des images, et nous avons indiqué les moyens d'y remédier.

Nous avons passé ensuite à la décomposition de la lumière à travers le prisme ; nous avons observé tous les phénomènes qu'elle présente, ce qui nous a fourni l'occasion d'en expliquer un grand nombre d'autres relatifs aux couleurs en général, aux ombres colorées, à l'arc-en-ciel. &c. ; enfin, nous avons terminé cette branche importante de la physique, par l'exposition des phénomènes de la vision ; et c'est par là qu'a fini notre cours.

Il nous restait à parler des propriétés mécaniques de l'air, relatives au mouvement, considéré, soit dans ses différentes parties prises en grande masse, soit dans les vibrations de ses molécules. Dans le premier cas, il donne naissance au vent, ce protée qui, tantôt sous des formes caressantes, se plaît à tempérer les ardeurs du midi, tantôt accourant de tous les points de l'horizon, vient broyer les productions de la nature, et en extraire les substances nourricières ; tantôt fatiguant une voile obéissante, nous aide à franchir l'espace immense qui sépare les deux mondes ; tantôt, enfin, devenu terrible, soulève avec des mugissemens affreux les plaines de l'Océan, détruit l'espoir de nos moissons, arrache le chêne superbe au

sol qui le féconde, nous fait pâlir d'effroi à l'aspect de sa chute menaçante, et couvre par tout la terre de débris ensanglantés.

Dans le second cas, ce même mouvement produit le phénomène du son, que l'on peut considérer, soit dans les vibrations des corps sonores, soit dans les milieux propres à le transmettre, soit dans l'organe qui en reçoit l'impression, soit enfin dans la comparaison de ces mêmes vibrations. De-là cet art d'imitation, qui semble d'abord n'avoir pour objet que de flatter agréablement un de nos organes, mais qui, dans tous nos sens, va bientôt porter l'éveil, s'empare de notre imagination et lui retrace tous les grands tableaux de la nature; qui se plaît à faire sortir du bruit même jusqu'à l'idée du silence; qui sait peindre également l'ivresse et les fureurs de l'amant heureux ou trompé, le fracas des torrens et le doux murmure d'un ruisseau, un ciel sans nuages et les autans précurseurs des tempêtes, les horreurs de la nuit et l'éclat de l'astre brûlant du jour, le calme d'une solitude profonde et l'agitation d'une mer en furie : cet art enchanteur, qui prête de nouveaux charmes à la poësie et donne de nouveaux attraits au plaisir; qui tantôt enflamme le guerrier impatient de voler au combat, et tantôt brûle de mille feux dévorans les cœurs en proie au tourment de l'amour; qui reporte le mouvement dans des corps presqu'inanimés, et rattache, pour ainsi dire, à la vie les êtres soumis à sa puissance; qui réveille dans l'ame de l'esclave le sentiment de sa liberté, ou produit dans l'homme libre ces élans, présages de la chute des trônes; dont les accens tour-à-tour déchirent et ravissent, excitent et calment les passions, détruisent et font naître les plus douces illusions : cet art merveilleux, enfin, dont l'antiquité nous a transmis les prestiges dans ces brillantes allégories qu'enfanta le génie de la Grèce : ici les animaux les plus féroces devenus sensibles aux accords d'*Orphée ;* là, c'est la matière inerte elle-même obéissant à la lyre d'*Amphion.*

Il nous restait encore à considérer les phénomènes de l'hygrométrie, ceux que présentent ces substances fugitives qui se sont dérobées si long-temps à nos regards, et dont s'est enrichie la physique moderne ; ces autres phénomènes, enfin, dont les uns nous reportant à une des plus intéressantes époques de l'histoire moderne, nous rappellent en même temps tous les crimes du trône et du sacerdoce, et dont les autres

ont

ont réservé à notre siècle la gloire de réaliser la fable de *Prométhée* dérobant le feu du ciel ; nous voulons parler de l'aiguille aimantée et de l'électricité. Mais l'époque à laquelle doivent désormais commencer tous les cours ayant été avancée de trois mois, nous avons cru devoir renvoyer à l'année suivante ces différentes branches de la physique, qui d'ailleurs venaient d'être traitées dans les cours préliminaires par lesquels s'est faite l'ouverture de l'École.

E. BARRUEL.

CHIMIE.

I.ère DIVISION.

SUBSTANCES SALINES.

L'EXPOSITION des propriétés des phosphates, des phosphites, des fluates et des borates, a terminé, avec l'année, le cours de l'École polytechnique.

Mais avant d'entrer dans les détails sur chacun des sels des genres ci-dessus, on a exposé aux élèves les propriétés des acides qui les composent, et celles des radicaux dont ils sont eux-mêmes formés, lorsqu'ils étaient connus dans leur nature intime. Ainsi on a fait connaître les caractères du phosphore, la manière dont il se comporte avec le calorique, l'air, l'eau, les alcalis et les terres; on a prouvé par l'expérience qu'il se fond à 30 degrés du thermomètre à mercure, qu'il est susceptible de deux espèces de combustions, l'une lente, et pour ainsi dire tacite, dans laquelle il donne naissance à un acide qui n'est pas complètement saturé d'oxigène, et qui a reçu, à cause de cela, le nom d'*acide phosphoreux;* l'autre par laquelle il s'allume avec rapidité, répand une lumière et une chaleur extrêmement considérables, et d'où il résulte un autre acide sous forme de flocons neigeux, qui porte le nom d'*acide phosphorique*, pour le distinguer du premier.

On n'a pas omis de faire voir aux élèves la nécessité du gaz azoth, mêlé au gaz oxigène pour la combustion lente du phosphore; on a également fait remarquer que tous les autres gaz susceptibles de dissoudre le phosphore, tels que le gaz hydrogène pur, le gaz hydrogène sulfuré, &c. pouvaient aussi servir à sa combustion, lorsqu'ils étaient mêlés avec le gaz oxigène.

Les caractères communs et distinctifs des acides phosphoreux et phosphorique, ont été soigneusement établis, tant par les affinités différentes qu'ils exercent sur les corps, que par la flamme phosphorique que présente l'acide phosphoreux bouillant.

L'acide phosphorique s'unit aux alcalis et aux terres, et forme des sels qu'on a nommés *phosphates ;* tandis que ceux qui résultent de la combinaison de l'acide phosphoreux, sont distingués par celui des *phosphites :* dénominations qui, comme on voit, indiquent à-la-fois la nature du sel, de la base, de l'acide et de l'état où il s'y trouve.

Les combinaisons de l'acide phosphorique avec les terres, les alcalis & quelques oxides métalliques, sont décomposées par les acides sulfurique, nitrique, muriatique, oxalique, &c. lorsqu'on opère à froid et au milieu de l'eau ; mais c'est le contraire à chaud, et le sulfate de potasse, le nitrate de potasse, &c. sont décomposés par cet acide.

Phosphate de potasse.

Le phosphate de potasse est peu connu ; on sait seulement qu'il ne cristallise pas, qu'il se prend en une espèce de gelée, lorsqu'on fait évaporer sa dissolution ; qu'il attire en cet état l'humidité de l'air ; qu'il est décomposé par la chaux et la baryte, qui l'une et l'autre ont plus d'affinité pour l'acide phosphorique. Quelques expériences semblent même prouver que la soude enlève cet acide à la potasse. Ce sel n'est pas décomposé par le charbon, comme le phosphate d'ammoniaque ; et cela doit être ainsi, puisque le carbonate de potasse est décomposé par le phosphore, qui enlève au carbone, par une double affinité, l'oxigène qu'il contient dans sa combinaison avec la potasse. Les proportions de ses principes n'ont pas encore, que je sache, été déterminées par aucun chimiste.

Du phosphate de soude.

On connaît un peu mieux le phosphate de soude : ce sel, devenu plus intéressant par son emploi dans la médecine, dans l'art du soudeur, et dans les essais au chalumeau, a fixé plus particulièrement l'attention des chimistes et des artistes.

Son existence dans l'économie animale, et sur-tout chez les hommes, a depuis long-temps fait l'objet des méditations des médecins physiologistes.

Ce sel est très-dissoluble dans l'eau, cristallise facilement. Sa forme la plus ordinaire est celle d'un rhomboïde alongé, dont les faces sont inclinées les unes sur les autres ; sa saveur est douce et légérement salée. C'est cette dernière propriété qui a engagé les médecins à le substituer, pour l'usage médicinal, au sulfate de soude, dont il a tous les avantages,

sans partager ses inconvéniens : donné à la dose d'une once pour les adultes, il purge doucement et sans coliques (1).

Ce sel se fond aisément, et favorise beaucoup la fusion des terres, soit simples ou composées, ainsi que des oxides métalliques; c'est pourquoi les minéralogistes et les chimistes l'emploient souvent avec succès dans leurs essais au chalumeau, pour reconnaître la nature des matières qu'ils examinent.

Il est décomposé par la chaux, la baryte, les sels calcaires, magnésiens, barytiques et alumineux; mais ce n'est que par une double attraction qu'il opère la décomposition de ces derniers.

La plupart des sels métalliques éprouvent également de la part de ce sel des décompositions; ce sont des moyens de former sur-le-champ, et facilement, des phosphates métalliques, qui, à la vérité, sont sujets à varier par les proportions, parce que c'est toujours l'acide le plus fort, qui, dans ces sortes de décompositions, fait la loi, et détermine les rapports entre l'acide le plus faible et la base que l'autre lui cède.

Les proportions des principes de ce sel ne sont pas connues.

Du phosphate d'ammoniaque.

Ce sel accompagne toujours le phosphate de soude, dans les matières animales; il paraît même qu'ils forment entr'eux un sel triple subordonné à des proportions déterminées de l'un et de l'autre, ce qui prouve qu'ils exercent une attraction réciproque, en vertu de laquelle ils s'unissent.

Ce sel est dissoluble dans l'eau, dont il demande environ quatre parties; à la température moyenne de l'atmosphère, il cristallise avec facilité; sa forme est celle d'un prisme à quatre pans réguliers, terminés par des pyramides à quatre faces également régulières.

Il est décomposé par le feu, qui en dégage l'ammoniaque à l'état de gaz, et laisse dans la cornue l'acide phosphorique sous la forme vitreuse.

La potasse, la soude, la chaux, la baryte et la magnésie décomposent

(1) Pour que ce sel cristallise aisément, il est nécessaire qu'il contienne un léger excès d'alcali ; c'est pourquoi celui qui est sous cette forme, verdit le sirop de violette. S'il contient au contraire un excès d'acide, il ne cristallise qu'avec peine, et se prend alors en une masse, composée de petits feuillets brillans, et comme nacrés, qui ressemblent beaucoup au sel sédatif; c'est ce que *Bergmann* appelait *acide perlé de* Haupt.

le phosphate d'ammoniaque; d'où il suit que l'ammoniaque est une des matières qui attirent le moins l'acide phosphorique.

Il se comporte avec les sels neutres et métalliques, de la même manière que le phosphate de soude. Le charbon décompose ce sel, en attaquant l'acide phosphorique, dont il s'empare de l'oxigène, et met le phosphore à nu; l'action du charbon sur l'acide phosphorique est aidée par la chaleur, et n'a même lieu que parce que l'ammoniaque exerce de son côté sur ce fluide une attraction qui détermine la décomposition. C'est un des meilleurs fondans que l'on puisse employer pour les essais au chalumeau; il hâte la fusion des pierres, des terres et des oxides métalliques, dont on reconnaît souvent l'espèce par la couleur qu'ils lui communiquent.

On ignore les proportions de ses principes.

Du phosphate de chaux.

L'abondance de ce sel dans la nature, où il forme des masses considérables; son existence chez les animaux dont il constitue, au moins dans la plupart, la base du squelette, et dans les végétaux, dans les cendres desquels on le trouve en plus ou moins grande quantité; toutes ces considérations importantes nous ont engagés à en faire l'histoire très en détail, ce qui a occupé plusieurs séances.

C'est en Espagne, dans la province d'Estramadure, qu'on a trouvé, il y a peu de temps encore, le phosphate de chaux formant des couches assez étendues; il a une couleur opaque, parsemée de taches jaunâtres dues à de l'oxide de fer. Les citoyens *Proust* et *Pelletier* en ont fait l'analyse, et ils ont trouvé qu'il était mêlé d'une grande quantité de fluate de chaux.

Celui dont on se sert pour les opérations de chimie et des arts, est retiré des os des animaux fortement calcinés dans des fourneaux, pour brûler les matières animales qui en lient les parties.

Ce sel ne paraît éprouver, de la part de la chaleur, qu'un ramollissement, une espèce de demi-fusion qui lui donne l'apparence du biscuit de porcelaine; et c'est pour cette raison que l'on a donné à ces matières fortement calcinées, le nom d'*os porcelanisés.* On remarque cependant que les os exposés à l'action d'un feu violent, répandent aux environs une

lueur jaune phosphorique, qui indique une décomposition de l'acide phosphorique, dont le phosphore brûle à une certaine distance ; mais cette décomposition a des bornes fort étroites, et s'arrête bientôt. Peut-être ces phénomènes sont-ils dus à une petite quantité de phosphate d'ammoniaque contenue entre les lames osseuses, ou dans les membranes qui les enveloppent.

Le phosphate de chaux est insoluble dans l'eau ; mais il devient soluble par le secours d'un acide qui ne peut pas le décomposer, tel que le vinaigre, ou l'acide phosphorique lui-même. C'est à cette propriété des acides de pouvoir ainsi dissoudre le phosphate de chaux, que les médecins ont attribué la cause de ces horribles maladies dans lesquelles la matière osseuse ramollie est transportée d'un lieu dans un autre, où, en se déposant, elle forme des *pétrifications*, des dépôts, des exostoses, des tophus, &c. ou bien, en dissolution encore plus complète, elle est rejetée au-dehors, soit par la voie des urines, soit à la surface de la peau par l'humeur de la transpiration. C'est sans doute à un changement d'équilibre entre les principes des matières animales, et au développement d'un acide, que sont dus tous les désordres de l'économie animale dans le rachitis, la goutte, les rhumatismes, &c.

Les alcalis et les terres ne lui font subir aucune altération ; d'où il est évident que les liens qui unissent ses principes entr'eux sont très-forts : mais les acides sulfurique, nitrique, muriatique et oxalique le décomposent (1). C'est en décomposant ainsi le phosphate de chaux par l'acide nitrique, que *Schéele* nous a fait connaître la nature des os ; je ne rappellerai point ici la série des opérations de son procédé, parce qu'on arrive maintenant au même but, en suivant une marche plus simple.

Pour cela on prend une partie d'os calcinés à blanc, et réduits en poudre fine ; on la délaie dans quatre parties d'eau, et on verse sur ce mélange une demi-partie d'acide sulfurique concentré, en agitant conti-

---

(1) Quoiqu'il soit vrai de dire en général que les trois acides minéraux décomposent le phosphate de chaux, il est également vrai qu'ils ne le décomposent qu'en partie, et jusqu'au point seulement où ils ont enlevé à l'acide phosphorique environ les 0,40 de la chaux qui existe dans une masse quelconque de phosphate calcaire, ce qui résulte d'un travail nouvellement entrepris par le citoyen *Fourcroy* et moi.

nuellement la matière. Alors l'acide sulfurique s'unit à la chaux, avec laquelle il forme un sel insoluble, et l'acide phosphorique, rendu libre, se dissout dans l'eau. Mais pour rendre l'action de l'acide sulfurique plus efficace et la décomposition plus complète, on laisse ordinairement macérer la matière pendant vingt-quatre heures, en ayant soin de l'agiter de temps en temps pour renouveler les surfaces et les points de contact (1).

Au bout de ce temps on tire la liqueur à clair; on lave le marc à plusieurs reprises avec de l'eau de rivière; on réunit ces lavages avec la première eau, et on les fait évaporer dans des chaudières de cuivre, et mieux de plomb. Pendant l'évaporation de cette liqueur, il se sépare une assez grande quantité de sulfate de chaux, retenu en dissolution à la faveur de l'acide phosphorique: on le sépare par le repos et la décantation; mais l'acide phosphorique en retient toujours une certaine quantité, qu'on n'en peut séparer que par des moyens compliqués et coûteux.

L'acide phosphorique se présente communément sous la forme d'une masse blanche, légérement jaunâtre, formée de petites écailles brillantes et comme nacrées; c'est ce qu'on appelle l'*acide phosphorique concret* (2). C'est avec cet acide que l'on fabrique le phosphore, et que l'on fait toutes les compositions qui n'exigent pas une grande exactitude; car le sulfate de chaux qu'il contient, apporte des embarras et des complications qui dérangent ou changent les résultats des expériences.

Pour extraire le phosphore de l'acide phosphorique, il suffit de le mêler avec le quart de son poids de charbon en poudre, de faire dessécher le mélange dans une chaudière de fonte, jusqu'à ce que la plus grande partie de l'humidité soit dissipée, de l'introduire dans une cornue de terre luttée, de le chauffer par degrés jusqu'à l'incandescence dans un

---

(1) Outre le phosphate de chaux, les os contiennent aussi une certaine quantité de carbonate de chaux; car lorsqu'on verse un acide sur ces organes, soit avant ou après la calcination, il se fait une vive effervescence, occasionnée par le dégagement de l'acide carbonique: donc il y a dans les os un carbonate.

(2) Cet acide contient encore beaucoup de chaux, et doit être regardé comme un phosphate acidule de chaux qui a des propriétés particulières, et que les acides minéraux ne peuvent décomposer.

fourneau de réverbère, et de recevoir le phosphore dans un appareil rempli d'eau, afin qu'il ne puisse brûler par le contact de l'air.

Au commencement de l'opération, il se dégage du gaz hydrogène et de l'acide carbonique provenant de la décomposition de l'eau par le charbon : lorsque l'acide phosphorique commence à être décomposé, le gaz hydrogène dissout un peu de phosphore, qui lui donne la propriété de luire dans l'obscurité par le contact de l'air ; enfin dès que la chaleur est assez forte, le phosphore prend la forme d'une huile qui tombe dans l'eau du récipient, où il se fige.

Cette expérience fait voir qu'à une haute température le carbone a plus d'affinité avec l'oxigène, que n'en a le phosphore ; que celui-ci en a plus que l'hydrogène, puisque l'eau est décomposée avant l'acide phosphorique ; enfin que l'hydrogène peut dissoudre une certaine quantité de phosphore. Il paraît que l'eau du récipient retient de l'hydrogène phosphoré : car lorsqu'on l'expose à l'air dans l'obscurité, même après avoir été filtrée, elle répand des flammes phosphoriques très-brillantes, sur-tout lorsqu'on renouvelle ses surfaces en l'agitant.

Le phosphore que l'on obtient par cette première opération, n'est pas pur ; il contient de la poussière de charbon, une portion de phosphore à moitié brûlé, qui lui donne une couleur rouge ou brune ; mais il suffit de le fondre et de le passer plusieurs fois à travers une peau de chamois, au milieu de l'eau chaude, pour l'avoir blanc et transparent.

Les usages du phosphate de chaux ont été présentés aux élèves avec beaucoup de soin, soit pour polir les métaux, les pierres précieuses et factices, soit pour la fabrication des coupelles, soit pour enlever les taches de graisse de dessus les étoffes, les linges ou les papiers, soit pour en fabriquer différens objets de tabletterie, avant d'avoir été calciné, soit enfin dans les manufactures de sel ammoniac, ainsi que cela se pratique dans le pays de Liége.

Du phosphate de baryte.

Le phosphate de baryte a par ses propriétés beaucoup de rapports avec le phosphate de chaux : comme lui, il est insoluble dans l'eau, indécomposable par les alcalis et par les terres, décomposable par les acides minéraux, et même par quelques acides végétaux ; il en diffère cependant en

en ce qu'il n'est pas susceptible de se dissoudre dans l'eau, à la faveur d'un excès d'acide, ou d'un autre acide qui ne le décomposerait pas.

Ce sel, ainsi que le phosphate calcaire, se fond au chalumeau, et si l'on fait l'opération sur un support de charbon, il répand une flamme jaune phosphorique; les globules qu'il forme deviennent opaques en refroidissant, à moins qu'ils ne contiennent un excès d'acide.

On peut préparer le phosphate de baryte de deux manières, ou en unissant immédiatement, jusqu'au point de saturation, la baryte à l'état de pureté avec l'acide phosphorique, ou même combinée à l'acide carbonique, ou bien, par une double affinité, en présentant à un sel barytique dissous dans l'eau, tel que le muriate ou le nitrate, l'acide phosphorique combiné à un alcali, soit soude, potasse ou ammoniaque; alors l'acide phosphorique se porte sur la baryte, et forme un dépôt dans la liqueur, tandis que l'autre sel reste en dissolution.

Les carbonates alcalins décomposent le phosphate de baryte, soit à froid, soit à chaud; mais, dans ce dernier cas, le carbonate d'ammoniaque est insuffisant.

Ce sel n'est encore d'aucun usage; mais on peut s'en servir avec avantage, pour séparer le sulfate de chaux de l'acide phosphorique retiré des os. En faisant bouillir ces matières ensemble, l'acide sulfurique s'unit à la baryte, et la chaux à l'acide phosphorique; d'où naissent deux sels parfaitement insolubles.

Les proportions des élémens de ce sel sont encore inconnues.

Du phosphate de magnésie.

Ce sel est peu connu; *Lavoisier* est presque le seul qui s'en soit occupé avec quelques détails. Il a fait voir que ce sel est peu dissoluble dans l'eau; que cependant il l'est assez pour fournir, par une évaporation ménagée, des cristaux de plusieurs lignes de long, sous la forme d'aiguilles aplaties, très-minces et coupées obliquement à leurs extrémités.

J'ai trouvé un moyen de l'obtenir promptement, cristallisé en solides de plusieurs pouces de long, et quelquefois de 2 à 3 lignes d'épaisseur. Ce moyen consiste à mêler parties égales de sulfate de magnésie et de phosphate de soude, l'un et l'autre dissous dans l'eau. Il paraît d'abord ne se passer aucune action entre ces matières; mais au bout de vingt-quatre heures, il se forme

dans la liqueur des cristaux prismatiques parfaitement transparens, dont les dimensions varient suivant les quantités des sels employés.

Cette substance, exposée à l'air, perd son eau de cristallisation, devient opaque, et même se réduit en poussière en peu de temps : cela prouve qu'il n'a pas une grande affinité avec l'eau ; il n'a pas de saveur sensible ; il se fond aisément au chalumeau, en un globule qui conserve sa transparence après le refroidissement.

Il est décomposé par les alcalis fixes caustiques, mais il ne l'est pas par l'ammoniaque ; au contraire, la magnésie décompose complètement le phosphate d'ammoniaque, sur-tout à l'aide d'une chaleur douce.

Le phosphate de magnésie s'unit aisément au phosphate d'ammoniaque, et forment ensemble une combinaison triple, très-insoluble. Le citoyen *Fourcroy* en a fait connaître les propriétés, dans un calcul pesant plusieurs livres, trouvé dans le colon d'un cheval mort de tranchées à l'école vétérinaire d'Alfort (1).

La chaux et la baryte décomposent le phosphate de magnésie ; ce dont il est facile de se convaincre, en versant une dissolution de ces terres dans une dissolution de ce sel, qui se trouble sur-le-champ, parce que les phosphates de chaux et de baryte sont beaucoup moins solubles que celui de magnésie.

Les acides minéraux, savoir, l'acide sulfurique, nitrique et muriatique, séparent les élémens du phosphate de magnésie, en s'unissant à sa base, et en rendant l'acide phosphorique libre. Ce sel est aussi décomposé par les carbonates alcalins. Ses proportions ne sont pas connues.

Phosphate d'alumine.

Le phosphate d'alumine est encore un de ces sels qui ne sont connus que de nom : les chimistes ne se sont jamais occupés d'en rechercher les propriétés, soit qu'ils en attendent peu de résultats utiles, soit que des travaux plus importans ne leur aient pas encore permis de descendre à ces objets de détail, qui donnent, en général, peu de gloire à celui qui les entreprend.

Ce sel est presque indissoluble dans l'eau ; mais il le devient abondamment par un excès d'acide.

(1) *Voyez* Annales de Chimie.

Il se fond au chalumeau en un verre transparent, et sans éprouver de décomposition.

Il est décomposé par les alcalis et les autres terres ; les acides minéraux lui font subir la même altération.

Quoique je n'aie pas retracé ici tout ce que l'on sait sur les combinaisons salines de l'acide phosphorique, je puis assurer cependant que c'est un des genres de sels sur lequel il reste le plus de recherches intéressantes à faire, et qui appelle conséquemment l'attention et le travail des chimistes.

Des combinaisons de l'acide phosphoreux.

Phosphites (1).

Les phosphites ont avec les phosphates beaucoup de propriétés communes. Les phosphites de soude et de potasse sont très-dissolubles dans l'eau, et cristallisables ; ceux de chaux, de magnésie et de baryte, le sont peu ; mais le phosphite d'alumine jouit de cette propriété d'une manière très-marquée.

Les phosphites insolubles par eux-mêmes, le deviennent abondamment par un excès de leur acide ; tous, excepté peut-être celui de baryte, sont décomposés par la chaux.

Cependant ces sels présentent des phénomènes à l'aide desquels on peut facilement les distinguer des phosphates et de toutes les autres substances de cette classe.

Ces phénomènes sont principalement de fournir à la distillation une petite quantité de phosphore, et de répandre une lumière vive lorsqu'on les chauffe au chalumeau, même sur un support incombustible.

Ces sels jouissent encore en commun, avec quelques autres sels, de la propriété de précipiter l'or de sa dissolution à l'état métallique, et de détoner par la percussion avec le muriate sur-oxigéné de potasse.

Du phosphite de potasse.

Ce sel cristallise assez facilement par le refroidissement, lorsque sa dissolution a été suffisamment évaporée. Sa forme nous a paru être un prisme à quatre pans terminés par des biseaux ; sa saveur est légérement piquante, et sa dissolubilité est très-considérable.

Chauffé au chalumeau, il se gonfle, se fond ensuite sans répandre,

(1) Ces sels jusqu'ici n'ont presque point été examinés, et le peu que j'en dirai dans ce résumé, est extrait d'un travail que nous avons entrepris en commun, sur cet objet, le C.en *Fourcroy* et moi.

comme les autres phosphites, de lumière phosphorique; il se rassemble en un globule parfaitement transparent, tant qu'il est fondu, mais qui cristallise et devient opaque par le refroidissement.

Il est décomposé par la chaux et la baryte, qui occasionnent dans sa dissolution des précipités abondans. Les acides sulfurique, nitrique, muriatique, oxalique, &c. séparent l'acide phosphoreux de sa base alcaline; l'acide muriatique oxigéné le convertit en phosphate.

Nous avons trouvé que ses élémens étaient dans le rapport suivant:

1.° Potasse	49,424.
2.° Acide phosphoreux.........	39,466.
3.° Eau.......................	11,110.
	100,000.

Du phosphite de soude.

Ce sel est très-dissoluble; il n'exige, à la température moyenne, qu'environ deux parties d'eau; sa dissolution, soumise à une évaporation lente, a d'abord offert, sur les bords de la capsule, des cristaux disposés en barbe de plumes, comme le sel ammoniac; ensuite il s'est formé sur la surface de la liqueur des lames carrées, qui paraissaient être la réunion de quatre triangles: on a remarqué aussi que quelques portions de ce sel prenaient la forme des pappus ou aigrettes de certaines semences végétales; mais, en les examinant avec une bonne loupe, l'on aperçoit que les aigrettes sont composées d'une infinité de petits cubes, qui se sont approchés les uns des autres, mais sans s'unir intimement, car on voit sans peine les espaces qui les séparent.

Exposé à l'action du chalumeau, il décrépite, répand une flamme phosphorescente, puis se fond en un verre qui s'étend sur le support, et devient opaque en refroidissant. Quant à ses autres propriétés, elles sont analogues à celles du phosphate de potasse.

Il est composé

1.° de soude............	23,680.
2.° d'acide.............	16,320.
3.° d'eau...............	60,000.
	100,000.

Il a une saveur piquante très-forte ; il grimpe sur les parois des vases où se fait l'évaporation ; il cristallise sous la forme d'aiguilles transparentes, très-longues, mais très-déliées ; en sorte qu'il est difficile d'en déterminer, à la vue simple, la forme et le rapport des angles.

Phosphite d'ammoniaque.

Au chalumeau, il bouillonne, se gonfle, et répand, au bout de quelques secondes, une grande quantité de gaz hydrogène phosphoré, qui s'enflamme dans l'air, où il forme des cercles très-agréables de fumée blanche. Cette expérience prouve qu'à une haute température, le phosphore, aidé par la présence de l'ammoniaque, a la propriété de décomposer l'eau dont l'oxigène se combine à une portion de cette matière combustible, et dont l'hydrogène s'unit à une autre portion avec laquelle il forme le gaz hydrogène phosphoré, qui s'enflamme dès qu'il a le contact de l'air.

Distillé dans une cornue, il est décomposé ; l'ammoniaque se dégage partie à l'état liquide, partie à l'état de gaz qui retient du phosphore en dissolution, mais qui ne s'enflamme point; cependant il répand une lumière phosphorique, lorsqu'on y mêle de l'air vital : ce qui reste dans la cornue est de l'acide phosphorique vitreux.

Il est décomposé par la potasse, la soude, la chaux et la baryte; car la dissolution de ces deux terres occasionne un précipité très-abondant dans celle du phosphite d'ammoniaque. On s'assure que les alcalis fixes le décomposent aussi, par l'odeur d'ammoniaque qui se développe dans leur mélange.

Il précipite le nitrate de mercure en blanc ; mais le phosphite de mercure qui en résulte, devient bientôt gris, sur-tout à la partie frappée par la lumière.

Ses principes sont dans les rapports suivans :

Ammoniaque	51
Acide phosphoreux	26
Eau	23
	100

L'acide phosphoreux forme avec la chaux une combinaison très-intime, qui est insoluble dans l'eau, et dont la saveur est absolument nulle. Son union avec l'eau s'opère par le secours d'un excès de son acide, et cette union triple donne par une évaporation ménagée de petits cristaux brillans

Phosphite de chaux.

et durs, dont la petitesse ne nous a pas permis de déterminer la forme. L'acide phosphoreux paraît adhérer fortement au phosphite de chaux: car il est impossible de l'en séparer par des lavages multipliés avec de l'eau. Le sel et l'acide se dissolvent dans les mêmes proportions où ils sont combinés; mais cet excès d'acide lui est enlevé par toutes les matières terreuses et alcalines, quoiqu'elles n'aient pas pour l'acide phosphoreux autant d'affinité que la chaux; ce qui prouve que l'acide tient à cette combinaison par deux forces différentes.

Le phosphite de chaux se fond au chalumeau, en répandant, comme les autres sels de ce genre, une lueur phosphorique, et se rassemble en un globule, dont la transparence persiste après le refroidissement. Lorsqu'il contient un excès d'acide, sa fusion est beaucoup plus facile, et le verre qu'il fournit est plus transparent.

Parmi les différentes substances susceptibles de s'unir à cet acide, la chaux paraît être celle qui l'attire avec le plus de force; ainsi, dans les tables d'affinité, cette matière terreuse doit être placée la première dans la colonne de l'acide phosphoreux.

Ce sel est décomposé par la plupart des acides minéraux, et même quelques acides végétaux, tels que l'acide oxalique, citrique, tartareux, &c.

Les proportions de ses principes sont ainsi qu'il suit:

Chaux	51
Acide phosphoreux	34
Eau	15
	100

Phosphite de baryte.

Le phosphite de baryte est peu soluble; il l'est cependant assez pour que l'eau de chaux forme, dans sa dissolution, un nuage sensible; fait qui atteste en même temps que la chaux a plus d'affinité avec l'acide phosphoreux que la baryte.

La dissolubilité de ce sel croît singulièrement par l'addition d'un excès d'acide, en sorte qu'il peut donner, par l'évaporation spontanée, des cristaux en aiguilles, si fines, à la vérité, qu'il n'est pas possible d'en reconnaître la forme exacte.

Ce phosphite acide se comporte avec l'eau de la même manière que le phosphite acidule de chaux.

L'acide oxalique forme dans sa dissolution un dépôt cristallin, composé de beaucoup de petites aiguilles assez longues : ces cristaux sont l'union de l'acide oxalique et de la baryte, d'où il est évident que cet acide a plus d'affinité avec la baryte que l'acide phosphoreux, lors même qu'il est en excès.

L'ammoniaque enlève l'excès d'acide au phosphite de baryte, et précipite celui-ci sous la forme d'une poudre blanche floconneuse, dissoluble dans l'acide acéteux : ainsi, comme le phosphite de chaux, celui de baryte est dissoluble dans un acide qui n'est pas capable de le décomposer.

Le phosphite de baryte se fond au chalumeau, en un globule qui se recouvre d'une lumière si éclatante, qu'il est impossible de la fixer seulement quelques secondes, sans se blesser les yeux. Ce globule est transparent pendant qu'il est en fusion, mais il devient opaque en refroidissant.

Excepté la chaux, toutes les autres terres et les alcalis ne lui font éprouver aucun changement.

Les acides minéraux et plusieurs acides végétaux le décomposent, en lui enlevant sa base.

Il est composé

de baryte..........................	51,230
d'acide phosphoreux..............	41,770
d'eau..............................	7,000
	100,000

Phosphite de magnésie.

Ce sel est légérement dissoluble dans l'eau sans le secours d'un excès d'acide : sa dissolution, évaporée à une chaleur douce, présente d'abord une pellicule transparente, dépose ensuite une matière floconneuse qui s'attache aux parois de la capsule ; mais à la fin de l'opération, il se forme de petits cristaux transparens, qui nous ont paru être des tétraèdres. Il n'a pas de saveur sensible ; il s'effleurit à l'air comme le phosphate de magnésie.

Chauffé au chalumeau, il se boursoufle subitement et s'enflamme en répandant une lumière phosphorique verdâtre ; il se fond ensuite en un globule qui devient laiteux en refroidissant.

Il est décomposé par les alcalis fixes, la chaux et la baryte ; l'ammoniaque ne le décompose qu'en partie, et forme avec lui, comme avec tous les autres sels magnésiens, un sel triple, qui a des propriétés particulières.

Les acides sulfurique, nitrique, muriatique, fluorique, citrique, oxalique et tartareux, le décomposent et en séparent l'acide phosphoreux. L'acide muriatique oxigéné le convertit en phosphate, en brûlant la petite quantité de phosphore qu'il contient.

Il est composé,

1.° de magnésie..................	20
2.° d'acide phosphoreux..........	44
3.° d'eau........................	36
	100

Du phosphite d'alumine.

Il est très-dissoluble dans l'eau, sans excès d'acide, en quoi il diffère essentiellement du phosphate, qui ne l'est pas du tout, ou qui ne le devient que par un excès d'acide.

Évaporé à une chaleur douce, et comme spontanément, il n'a présenté aucun signe de cristallisation, aucun sédiment cristallin; il s'est réduit, au contraire, en une masse transparente, ductile, qui ressemblait assez bien à de la gomme encore molle.

Ce sel a une saveur astringente, comme tous les sels alumineux; mis sur les charbons allumés, il se boursoufle à la manière de l'alun, en répandant une lumière phosphorique très-belle; il conserve le grand volume qu'il a acquis par le gonflement, et devient très-léger.

Il n'attire point l'humidité de l'air; il reste toujours sec et transparent.

L'alumine est, de toutes les matières alcalines et terreuses, celle qui tient le moins à l'acide phosphoreux, en sorte que le phosphite d'alumine est décomposé par chacune d'elles.

La plupart des acides le décomposent aussi; d'où l'on pourrait dire que c'est, en quelque sorte, le sel le moins parfait.

Réflexions sur les phosphites.

Si l'on pouvait toujours juger par analogie, des propriétés des corps composés, l'on serait porté à croire que les phosphites doivent être très-combustibles, puisqu'ils contiennent une portion de phosphore non brûlé, qui, comme tout le monde sait, a pour l'oxigène une telle attraction, qu'il l'absorbe à toutes les températures. Si l'on considère encore que la plupart des sulfites, dont le radical n'est cependant pas aussi combustible, deviennent

deviennent bientôt des sulfates lorsqu'ils sont en contact avec l'air, cette induction paraît devenir plus naturelle et plus forte ; mais l'observation n'est pas ici d'accord avec le raisonnement, car il est démontré que des phosphites, soit à l'état solide, soit à l'état liquide, peuvent rester plusieurs mois à l'air sans éprouver d'altération sensible.

Quoique l'explication de cette différence entre les sulfites et les phosphites ne me paraisse pas très-facile, je vais cependant en hasarder une de celles qui me semblent le mieux cadrer avec les faits. On sait que la combustion des corps est d'autant plus facile et plus prompte, qu'ils sont en présence d'autres corps avec lesquels leur affinité augmente par la combustion; c'est ainsi que les métaux se brûlent beaucoup plus rapidement dans l'eau, lorsqu'elle est mêlée d'un acide, et même qu'ils sont convertis en oxides, lorsqu'ils ne le sont pas dans de l'eau pure; c'est encore d'après le même principe que l'acide nitrique cède son oxigène à l'or, lorsqu'il est accompagné de l'acide muriatique, tandis que s'il est seul, il ne l'attaque pas sensiblement; parce que son affinité pour l'oxide d'or n'est pas suffisante pour déterminer la décomposition d'une partie de cet acide; c'est donc par une force préexistante sur l'oxide d'or, avec lequel il a beaucoup d'affinité, que l'acide muriatique favorise l'oxidation de ce métal : de même, c'est en vertu d'une affinité plus forte qu'exercent les bases alcalines et terreuses sur les acides sulfurique et phosphorique, qu'elles sollicitent en quelque sorte les acides sulfureux et phosphoreux à absorber une nouvelle quantité d'oxigène par tout où ils peuvent en prendre pour s'unir ensuite avec eux. Or, comme l'acide sulfurique a beaucoup plus d'affinité avec les substances alcalines que l'acide phosphorique, il est évident que la combustion des sulfites doit être plus rapide que celle des phosphites. Une autre cause paraît se joindre à celle-ci, c'est qu'il y a une plus grande différence entre l'affinité de l'acide sulfurique et de l'acide sulfureux, pour ces mêmes corps, qu'entre celle de l'acide phosphorique et de l'acide phosphoreux, et que le phosphore dans l'acide phosphoreux est plus près de la combustion complète que le soufre dans l'acide sulfureux; qu'étant entouré d'un plus grand nombre de molécules d'oxigène, son affinité pour ce principe doit diminuer dans la même proportion, et doit rendre par-là la combustion des phosphites moins énergique.

De l'acide fluorique et de ses combinaisons.

L'acide fluorique est une de ces substances sur lesquelles l'analyse chimique n'a eu jusqu'à présent aucune prise ; ses élémens nous sont donc encore parfaitement inconnus, et ce n'est que par analogie que les chimistes y admettent la présence de l'oxigène.

La nature nous offre cet acide en assez grande quantité dans une espèce de pierre où il est combiné avec la chaux, appelée par les minéralogistes *spath fluor*, et qui accompagne souvent les mines métalliques auxquelles il sert quelquefois de fondant, d'où est venue sa dénomination de *fluor*.

C'est de cette combinaison naturelle que les chimistes retirent l'acide fluorique, en présentant à sa base un autre acide avec lequel elle a plus d'affinité.

L'acide sulfurique, comme jouissant éminemment de cette propriété, et de plus, étant assez fixe, et formant avec la chaux un sel insoluble, a mérité la préférence sur les autres.

Mais comme l'acide fluorique dissout le verre, et qu'il le réduit à l'état de gaz à l'aide d'une chaleur légère, il est nécessaire, lorsqu'on veut l'avoir pur, d'employer, pour cette opération, des vaisseaux de métal sur lequel ni lui, ni l'acide sulfurique n'exercent que peu d'action ; le plomb, parmi les métaux connus, est celui qui réunit ces conditions au plus haut degré.

La pénurie de matières et le défaut de vases propres à travailler l'acide fluorique, ne nous ont pas permis de faire aucune observation nouvelle sur ses propriétés, et celles de ses combinaisons avec les terres et les alcalis ; nous avons donc été forcés de nous borner à exposer seulement aux élèves ce qu'en ont dit les autres chimistes.

Ainsi sa fluidité élastique permanente à toutes les températures, son action sur la silice, et l'application de cette propriété à l'art ingénieux de graver sur le verre, ont été présentées avec beaucoup de détails ; nous avons passé de-là à ses combinaisons avec les alcalis et les terres, et nous avons insisté principalement sur la tendance qu'a cet acide de former des sels triples avec la silice et les alcalis, soit qu'on le prenne déjà à l'état siliceux, soit qu'on l'emploie pur, et qu'on le fasse ensuite évaporer dans des vases de verre. De-là la nécessité de se servir de capsules de plomb pour faire évaporer ces dissolutions.

On s'est également attaché à prouver, par des expériences soignées,

que cet acide est d'une nature particulière, et qu'il n'a de commun avec les acides sulfurique et muriatique, avec lesquels *Monnet* et *Boullanger* ont voulu le confondre, que les propriétés générales qui appartiennent à tous les autres. L'opinion diverse de ces deux chimistes suffirait seule, ce me semble, pour prouver en faveur des expériences de *Scheele ;* car qu'y a-t-il en effet de plus différent que l'acide sulfurique et l'acide muriatique ?

Si quelques personnes pouvaient encore avoir quelque doute sur cet objet, qu'elles comparent les propriétés de ces trois corps et de leurs combinaisons, et elles verront 1.° que l'acide fluorique dissout la silice, même à l'état solide, et que les autres ne font rien de semblable; 2.° que sa combinaison avec la potasse et la soude ne cristallise point, et attaque elle-même le verre à l'aide de la chaleur, tandis que les acides sulfurique et muriatique forment, avec les mêmes matières, des sels cristallisables, que tout le monde connaît, et qui ne dissolvent point le verre; 3.° que l'acide sulfurique, traité avec du charbon, donne du soufre, ce que ne fait point l'acide fluorique; que l'acide muriatique précipite l'argent et le plomb de sa dissolution dans l'acide nitrique, et rien de semblable n'a lieu par l'acide fluorique, lorsqu'il est bien pur; 4.° que l'acide fluorique forme avec la chaux un sel très-insoluble, tandis que l'acide muriatique donne, avec la même substance, un sel déliquescent; 5.° que l'acide fluorique a plus d'affinité avec la chaux qu'avec les alcalis, et c'est le contraire pour les acides sulfurique et muriatique; 6.° que l'acide fluorique n'attaque point les métaux qui ne décomposent pas l'eau, et l'acide sulfurique en dissout plusieurs; 7.° que l'acide muriatique est susceptible de se combiner à l'oxigène, lorsqu'on le traite avec l'oxide de manganèse, et rien de semblable n'a lieu avec l'acide fluorique; 8.° que l'acide sulfurique forme avec la baryte un sel entièrement insoluble, et l'acide fluorique fournit un sel soluble avec cette substance; 9.° enfin, que les acides sulfurique et muriatique chassent l'acide fluorique de ses combinaisons, ce qui n'arriverait pas si ces acides étaient les mêmes.

Voilà, ce me semble, assez de preuves pour convaincre les bons esprits qui ne cherchent que la vérité, qu'il ne peut y avoir plus de différence entre des corps naturels, que celles qui existent entre l'acide sulfurique, l'acide muriatique et l'acide fluorique. Au surplus, je suis

convaincu que les C.^ens^ *Monnet* et *Boullanger*, avec le temps et l'expérience, ont changé d'opinion sur cet objet, et que la vérité s'est fait sentir chez eux.

Parmi les combinaisons de l'acide fluorique, nous avons spécialement insisté sur le fluate de chaux, à cause de son abondance dans la nature, de ses usages dans les travaux des mines, de son emploi en chimie pour préparer l'acide fluorique, pour servir de fondant à différentes substances terreuses, &c. &c.

De l'acide boracique et de ses combinaisons.

On appelle ainsi une matière blanche, sous forme de paillettes brillantes, qu'on retire du borax par l'intermède d'un acide plus fort; il portait autrefois le nom de *sel sédatif d'*Homberg, parce que c'est, à ce qu'il paraît, ce chimiste qui l'a découvert, et qui a cru ensuite y apercevoir des propriétés calmantes.

L'expérience chimique n'a point encore prononcé sur la nature de cette substance, en sorte qu'elle doit être rangée, jusqu'à nouvel ordre, dans la classe des inconnus chimiques.

Si, comme tout l'annonce, cet acide contient des élémens, ils doivent être réunis par une force très-considérable; car les épreuves multipliées et dures, les tortures, en quelque sorte terribles, auxquelles on l'a soumis, dans une foule de circonstances, en auraient fait apercevoir quelques traces.

L'acide boracique n'a qu'une très-légère saveur; sa dissolubilité dans l'eau froide est très-bornée, mais elle est beaucoup plus grande dans l'eau chaude; ce qui fournit un moyen de le purifier et de l'obtenir cristallisé.

Exposé au feu, il se boursoufle, bouillonne et se fond ensuite en verre, dont la transparence persiste long-temps après le refroidissement. La facilité avec laquelle il se fond, son action sur la silice et sur beaucoup d'autres matières, l'ont rendu très-recommandable pour les essais au chalumeau.

Quoique cet acide soit par lui-même très-fixe au feu, il devient cependant volatil par la présence de l'eau; et c'est en quoi consiste le procédé suivi par les pharmaciens pour préparer le sel sédatif par sublimation; ils mettent dans une cornue, ou une cucurbite de verre recouverte de son chapiteau, du borax, avec de l'acide sulfurique et un peu d'eau, et ils chauffent ce mélange jusqu'à le faire fondre : à la faveur de l'eau, une partie de cet acide, séparée du borax par l'acide sulfurique, s'élève en

vapeurs, qui se condensent et se déposent, en refroidissant, dans la partie supérieure de l'appareil, sous la forme de petites lames argentines très-brillantes.

Cette expérience prouve que des corps fixes, lorsqu'ils sont purs, deviennent volatils s'ils sont unis à des matières qui jouissent de cette propriété à un certain degré, et que, dans ce cas-ci, l'eau paraît exercer sur l'acide boracique une forte attraction.

Des combinaisons de l'acide boracique.

L'acide boracique s'unit aux alcalis, aux terres et à la plupart des oxides métalliques; mais son adhérence pour tous ces corps paraît très-faible, car elle est détruite par presque tous les autres acides à froid. De toutes ses combinaisons, celle qu'il forme avec la soude est la seule qui soit connue avec quelque détail; c'est le borax du commerce, dont les chaudronniers, les bijoutiers et les orfévres se servent avec tant de succès pour souder les métaux ensemble, et c'est pour cette raison que les anciens lui avaient donné le nom de *chrysocolle.*

La soude, dans le borax du commerce, n'est pas complétement saturée d'acide, car il verdit le sirop de violette, et *Bergmann* s'est assuré qu'il pouvait encore absorber la moitié de son poids d'acide boracique, et qu'alors il n'altérait plus la couleur des violettes; mais il ne cristallise plus aussi facilement; en sorte qu'il paraît que cet excès de soude y est ajouté exprès.

La forme du borax est un prisme à 6 pans irréguliers, terminés par des biseaux. Ce sel se fond aisément au feu; il commence par se gonfler, et prendre un volume considérable; dans cet état il porte le nom de *borax calciné;* si on continue à le chauffer, il s'affaisse et se fond en un verre transparent. Il est souvent préféré à l'acide boracique pour les essais au chalumeau, parce qu'il se fond plus aisément, et qu'il se combine mieux aux substances terreuses.

La chaux, la baryte et la magnésie décomposent le borate de soude, et forment dans sa dissolution des précipités insolubles.

Le borate de potasse éprouve la même altération de la part de ces terres; ce qui prouve qu'elles ont plus d'affinité avec l'acide boracique que n'en ont les alcalis; elle prouve encore que les borates de chaux, de baryte et de magnésie sont insolubles.

L'ammoniaque n'adhère presque point à l'acide boracique, puisque sa dissolution, par une évaporation spontanée, laisse échapper l'ammoniaque et ne conserve à la fin que de l'acide boracique.

Tous les acides, excepté les acides carbonique et lithique, décomposent les borates à froid, et en séparent l'acide sous la forme de paillettes ; mais, à l'aide d'une forte chaleur, l'acide boracique décompose à son tour presque tous les sels dont les acides sont moins fixes que lui. La raison très-intéressante de cette différence, a été expliquée en détail ; elle s'entend d'ailleurs facilement, pour peu qu'on veuille y réfléchir.

On a trouvé, il y a déjà plusieurs années, aux environs de Lunébourg, dans des couches de sulfate de chaux, une substance qui, à cause de sa forme et de sa dureté, reçut le nom de *quartz cubique*. *Westromb* a prouvé, par des expériences nombreuses, que cette matière est un sel triple, composé de magnésie, de chaux et d'acide boracique, dans les rapports suivans :

Acide boracique	0,660
Chaux	0,105
Magnésie	0,135

Le reste en matières étrangères, qui consistaient en un peu de fer, de silice et d'alumine.

Les alcalis caustiques sont impuissans pour décomposer le borate magnésico-calcaire-natif; ce n'est que par les acides que *Westrumb* est parvenu à en séparer les élémens et à en déterminer les proportions.

L'acide boracique attaque difficilement les métaux ; la voie la plus courte et la plus certaine de former ces combinaisons, est d'employer les doubles affinités en prenant des dissolutions métalliques, et les mêlant à une dissolution de borate de soude *saturé* ou *neutre*. Mais, quoique toutes les dissolutions des métaux doivent être décomposées par ce moyen, elles ne sont pas toutes précipitées ; celles d'or, de platine, d'argent, de bismuth, de manganèse, n'éprouvent aucun changement dans leur transparence par leur mélange avec le borate de soude, tandis que les dissolutions de mercure, de plomb, de cuivre, de fer, d'étain, de nikel, de cobalt, de zinc sont troublées sur-le-champ, et donnent des borates métalliques très-peu solubles.

TABLEAU

Des Propriétés classiques, génériques et spécifiques ou différentielles des matières salines minérales.

Par les C.

Substances	Classe	Caractères	Ordre	Caractères	Section	Genre	Propriétés génériques
SUBSTANCES SALINES.	PRIMITIVES.	Très-sapides, très-dissolubles dans l'eau avec dégagement de calorique, altérant les couleurs bleues végétales......	Alcalis...	Saveur âcre, lixivielle, et verdissant les couleurs bleues végétales.......		Potasse......	Blanche, solide, caustique, s'humectant et devenant liquide à l'air, plus attirable par les acides.
						Soude.......	Blanche, solide, caustique, s'humectant sans devenir liquide à l'air, moins attirable par les acides.
						Ammoniaque..	Très-odorante, gazeuse.
			Acides...	Saveur aigre et rougissant les couleurs bleues végétales......	Saturés d'oxigène.	Sulfurique....	Précipitant le muriate barytique.
						Nitrique.....	Fournissant du gaz nitreux avec les corps combustibles.
						Muriatique...	Formant avec la dissolution de nitrate d'argent un précipité insoluble.
						Phosphorique..	Vitrifiable, donnant du phosphore avec le charbon.
						Fluorique....	Gazeux, dissolvant la silice et précipitant l'eau de chaux.
						Boracique....	Vitrifiable, et ne donnant point de phosphore avec le charbon.
						Carbonique...	Gazeux, précipitant l'eau de chaux en un sel effervescent avec les acides.
					Non saturés d'oxigène.	Sulfureux....	Odeur de soufre qui brûle; brûlant avec l'acide muriatique oxigéné.
						Nitreux.....	Couleur orangée, jaunissant les matières animales.
						Phosphoreux..	Donnant des étincelles et des gerbes de phosphore, brûlant par la chaleur.
					Sur-saturés d'oxigène.	Acide muriatique oxigéné.	Couleur jaune citron, odeur acerbe et astringente, enflammant la plupart des métaux à l'état de gaz.
	SECONDAIRES.	Saveur piquante, salée ou amère; moins solubles en général dans l'eau, que les sels primitifs, et absorbant pendant leur dissolution une certaine dose de calorique; cristallisables.	11 GENRES.....			Sulfates......	Donnant des sulfures par le charbon.
						Nitrates......	Donnant du gaz oxigène impur à la distillation, des vapeurs blanches par l'acide sulfurique, et brûlant les corps combustibles.
						Muriates.....	Donnant des vapeurs par l'acide sulfurique; non décomposables par le feu; presque tous volatils.
						Phosphates...	Dissolubles dans l'acide nitrique sans effervescence, précipitant ensuite par l'eau de chaux.
						Fluates......	Donnant par l'acide sulfurique un gaz qui dissout le verre et précipite par l'eau.
						Borates......	Donnant avec l'acide sulfurique de l'acide boracique en paillettes.
						Carbonates...	Faisant effervescence avec les acides, et ne répandant point de fumée blanche dans l'atmosphère pendant cette opération.
						Nitrites......	Donnant une vapeur rouge orangée par l'acide sulfurique ou nitrique.
						Phosphites....	Répandant une flamme phosphorescente lorsqu'on les chauffe au chalumeau, sans contact du charbon.
						Sulfites......	Répandant une vapeur très-odorante et semblable au soufre qui brûle par le contact de l'acide sulfurique.
						Muriates oxigénés......	Donnant du gaz oxigène très-pur, détonant avec l'acide sulfurique et répandant une vapeur jaune-verdâtre.

77 SORTES. *Savoir:*

Genre	Sorte	Propriétés spécifiques
SULFATES...	1.° Sulfate de potasse, sulfate acide de potasse.......	Donne du nitrate de potasse avec l'acide nitrique, et de l'acidule oxalate de potasse avec l'acide oxalique.
	2.° De soude.....	Saveur fraîche et amère, efflorescent à l'air.
	3.° D'ammoniaque: sulf. acid. d'amm.	Donnant une odeur d'ammoniaque avec la chaux; volatil.
	4.° De chaux.....	Donnant un dépôt avec l'acide oxalique.
	5.° Magnésien....	Ne donnant point de précipité avec le carbonate de potasse à froid.
	6.° De baryte.....	Très-pesant, indissoluble, indécomposable par les acides et alcalis simples.
	7.° Acide d'alumine.	Saveur styptique, donnant un précipité par l'ammoniaque; dissoluble dans les alcalis caustiques.
	D'alumine cristallisé en cubes...	Peu dissoluble, peu sapide.
NITRATES...	Nitrate de potasse.	Donnant un précipité en cristaux avec l'acide oxalique; saveur fraîche.
	De soude......	Ne donnant point de précipité avec l'acide oxalique; forme rhomboïdale.
	D'ammoniaque..	Brûlant seul dans les vaisseaux fermés.
	De chaux......	Très-déliquescent; donnant un précipité insoluble avec l'acide oxalique.
	De magnésie....	Ne donnant point de précipité par le carbonate de potasse à froid.
	De baryte......	Donnant un dépôt insoluble avec l'acide sulfurique.
	D'alumine.....	Donnant avec l'ammoniaque un précipité dissoluble par les alcalis.
MURIATES...	Muriate de potass.	Donnant un précipité en cristaux avec l'acide oxalique; forme cubique.
	De soude......	Ne donnant point de précipité avec l'acide oxalique; le seul qui ait une saveur salée agréable.
	D'ammoniaque..	Volatil, donnant une odeur d'ammoniaque avec la chaux.
	De chaux......	Très-déliquescent; formant un précipité insoluble avec l'acide oxalique.
	De magnésie....	Ne donnant point de précipité avec le carbonate de potasse à froid; précipité par l'ammoniaque; indissoluble par les alcalis caustiques.
	De baryte......	Précipitant avec l'acide sulfurique en une matière insoluble.
	D'alumine.....	Donnant par l'ammoniaque un précipité dissoluble dans les alcalis.
PHOSPHATES.	Phosphate de potasse........	Déliquescent, donnant avec l'eau de chaux un précipité dissoluble dans les acides sans effervescence.
	De soude......	Efflorescent; même précipité que le précédent.
	D'ammoniaque..	Décomposable au feu, fusible en un verre acide.
	De magnésie....	Indécomposable par les alcalis caustiques, et se fondant en verre.
	De chaux......	Dissoluble dans les acides, cette dissolution précipitant l'eau de chaux.
	De baryte......	Décomposable par la chaux; précipité en poussière par l'acide sulfurique, en cristaux par l'acide oxalique.
	D'alumine.....	Décomposé par l'ammoniaque et donnant un précipité soluble dans les alcalis.
FLUATES.....	Fluate de potasse.	Se prend en gelée et donne un précipité soluble avec l'acide oxalique.
	De soude......	Forme cubique, ne précipitant point par l'acide oxalique.
	D'ammoniaque..	Décomposable par la chaleur et par la silice.
	De magnésie....	Ne précipitant point par le carbonate de potasse à froid.
	De baryte......	Très-dissoluble et cristallisable; précipitant en cristaux par l'acide oxalique.
	De chaux......	Dissoluble dans les acides nitriques et muriatique et donnant ensuite un précipité insoluble avec l'acide oxalique.
	D'alumine.....	Donnant par l'ammoniaque un précipité soluble dans les alcalis caustiques.
	De silice.......	Précipité par l'eau et cristallisable.
BORATES....	Borate alcalin de potasse....... Borate neutre de potasse.......	Précipité cristallin avec l'acide oxalique; verdissant les couleurs bleues végétales.
	Alcalin de soude. Borate neutre de soude........	Point de précipité avec l'acide oxalique; peut absorber de la soude.
	D'ammoniaque..	Décomposable par le feu, fusible en verre acide.
	De magnésie....	Insoluble, indécomposable par les alcalis.
	De chaux......	Insoluble dans l'eau, dissoluble par les acides, et la dissolution donnant un précipité par l'acide oxalique.
	De baryte......	Soluble et donnant un précipité par l'acide sulfurique.
	D'alumine.....	Peu soluble, précipité par les alcalis.
CARBONATES.	Carbonate de pot.	Ne précipite pas les sels magnésiens à froid.
	De soude......	Précipitant les sels magnésiens à froid.
	D'ammoniaque..	Indécomposable par la chaleur, mais volatil.
	Magnésien.....	Décomposable par la chaleur et les alcalis.
	De baryte......	Indécomposable complétement par la chaleur.
	De chaux......	Décomposable par la chaleur et non par les alcalis.
	D'alumine.....	Décomposable à l'air par la dessiccation.
LES NITRITES. LES PHOSPHITES. LES SULFITES.		Se reconnaissent par les mêmes moyens que les nitrates, les phosphates et les sulfates.

Le muriate oxigéné de potasse, est le seul qui soit encore connu.

Tels sont, très en abrégé, les objets sur lesquels on a entretenu les élèves de l'École polytechnique pendant le dernier mois de la première année d'études ; on leur a fait répéter, autant que les circonstances l'ont permis, les expériences qui ont servi de base au raisonnement dans les leçons qui leur ont été données sur cette partie de la chimie.

Après avoir exposé avec quelques détails les propriétés les plus remarquables des matières salines, nous avons pensé, le C.en *Fourcroy* et moi, qu'il serait intéressant pour les élèves de l'École polytechnique, et pour tous ceux qui se livrent particulièrement à cette branche de la chimie, de trouver réunis dans une espèce de tableau analytique et synoptique, les caractères classiques, génériques et spécifiques, ou différenciels, des sels, à l'aide desquels on puisse les reconnaître, les distinguer, et même les séparer les uns des autres lorsqu'ils seront mélangés. On a découvert, il y a quelques années, deux terres particulières, la *strontiane* et la *zircone*, qui doivent fournir deux nouveaux genres de sels ; mais comme leurs combinaisons n'ont pas encore été suffisamment examinées pour en établir exactement les caractères, nous n'en avons pas parlé dans ce tableau.

VAUQUELIN.

I.ere DIVISION.

SUBSTANCES SALINES.

Notice des objets traités dans le laboratoire de Chimie de l'École polytechnique, section des matières salines, pendant les mois Vendémiaire et Brumaire, an 3.

LES douze séances des mois vendémiaire et brumaire, an 3, ont été employées à l'histoire du carbone, de l'acide carbonique et des carbonates, terreux et alcalins. L'ordre généralement adopté dans le cours de chimie sur les matières salines, à l'École polytechnique, est de parler d'abord

du corps combustible dont la combinaison avec l'oxigène forme l'acide qui doit être examiné ; telle est la raison qui a fait placer au commencement de cette section du cours, l'histoire du carbone. Ce corps inflammable, indécomposé, a été examiné dans ses propriétés physiques, dans son histoire naturelle, dans sa préparation artificielle, dans ses propriétés chimiques, et dans ses usages. Chacune de ces divisions a fourni des détails toujours importans, quelquefois nouveaux, et dont l'ensemble n'a point encore été présenté jusqu'ici dans aucun ouvrage de chimie. On a sur-tout insisté sur la couleur noire, qui paraît être aussi exclusive que caractéristique du carbone ; sur l'existence de ce corps combustible dans la nature, comme fossile primitif ou secondaire, pur ou presque pur, ou combiné avec l'argile, avec une huile bitumineuse, avec le fer ; sur sa propriété de minéralisateur, par rapport aux métaux, qu'il paraît exercer, comme le soufre, le phosphore, &c. ; sur les différences qu'il présente, suivant la préparation des charbons ; sur sa propriété de mauvais conducteur du calorique ; sur son affinité pour l'eau et les gaz, qu'il absorbe et condense ; sur le dégagement de ceux-ci par le feu ; sur sa combinaison avec les alcalis ou les carbures alcalins ; sur son attraction pour l'oxigène à une haute température, attraction à l'aide de laquelle il décompose l'air vital, l'eau, les acides, les oxides métalliques ; sur sa combustion très-différente de celle de tous les autres corps combustibles, avec lesquels il se fond dans l'air vital, au lieu d'en solidifier l'oxigène ; sur son passage de la terre végétale et des engrais qu'elle recèle, ou qu'on y introduit, dans les filières des plantes, par leurs racines ; enfin, sur ses usages connus et sur ceux auxquels on pourra l'appliquer encore. Parmi ceux-ci, on a parlé de l'emploi du charbon placé autour et au dehors des fourneaux, pour en augmenter l'ardeur, et entassé derrière les cloisons et sous les lambris, les planchers, les parquets, pour arrêter l'humidité et conserver les meubles des lieux où elle les détériore. Trois leçons ont été consacrées à cette histoire du carbone.

L'acide carbonique, le plus remarquable et le plus important des composés dont le carbone fait partie, a succédé immédiatement à l'histoire de ce radical. Ses propriétés physiques, sa fluidité élastique, sa pesanteur spécifique par laquelle il déplace l'air, sa saveur piquante, son odeur aigrelette

aigrelette, son action sûr les corps enflammés, qu'il éteint; sur les animaux, qu'il asphixie et qu'il paralyse : son existence si fréquente dans la nature, soit comme fluide élastique mêlé à l'air pour quelques centièmes de sa masse, entassé dans quelques cavités souterraines, recouvrant les terres fraîchement creusées ou remuées ; soit comme liquide et dissous dans les eaux minérales ; soit comme solide et faisant presque les 0,32 de toute la masse de matière calcaire qui charge les montagnes et les plaines ; son extraction par le feu, par les effervescences, par les fermentations ; ses combinaisons avec les matières colorantes, l'air, l'eau, qu'il acidule ; la chaux, la baryte, qu'il précipite et redissout; les alcalis caustiques, qu'il adoucit et fait cristalliser ; les métaux très-combustibles, tels que le zinc et le fer, dont il favorise l'oxidation ; les oxides métalliques, sur-tout ceux de mercure, de plomb et de cuivre, qui l'absorbent avec facilité ; enfin, sa décomposition opérée par le phosphore, lorsqu'on le fait chauffer uni à une base alcaline, spécialement à la soude, avec ce corps combustible ; l'extraction du carbone presque pur, très-noir et très-divisé par cette décomposition : voilà les principaux faits qu'on a offerts à l'attention des élèves, et sur lesquels on a multiplié les expériences, afin de ne laisser aucun doute, et d'établir les preuves qui en assurent la certitude. L'examen de toutes les propriétés et de la comparaison de cet acide faible avec ceux qui avaient déjà été traités, a conduit à le faire regarder comme un des plus répandus à la surface et dans l'intérieur du globe, comme celui qui est appelé, pour ainsi dire, à jouer un grand rôle dans les phénomènes naturels, et comme un des corps dont l'homme peut tirer un des plus grands partis pour ses différens besoins. Quatre leçons ont été employées à l'exposé de toutes les propriétés de l'acide carbonique, et à l'exécution des expériences nécessaires pour leur démonstration.

Les six suivantes, qui ont eu lieu pendant le mois de brumaire, ont été occupées par l'histoire chimique des carbonates terreux et alcalins ; ces sels, absolument inconnus en chimie il y a vingt ans, et dont plusieurs même n'ont été analysés que depuis quelques années, ont été étudiés dans l'ordre suivant : le carbonate de potasse, le carbonate de soude, le carbonate d'ammoniaque, le carbonate de chaux, le carbonate de baryte, le carbonate de magnésie et le carbonate d'alumine. Après avoir examiné

les propriétés générales, ou plutôt génériques, des carbonates, chacun d'eux a été successivement considéré dans ses propriétés spécifiques ou individuelles, sa forme et ses variétés, sa saveur urineuse ou nulle, sa pesanteur variée; leur existence dans la nature, ou leur préparation due à l'art; leur manière de se comporter au feu, qui en dégage l'eau et l'acide carbonique; à l'air, qui en absorbe l'eau, ou les imbibe de la sienne; à l'eau, qui les dissout dans différentes proportions, en absorbant du calorique et produisant du froid; la cristallisabilité dont ils jouissent, et les procédés par lesquels on parvient à les faire cristalliser; leur action sur les terres qu'ils tendent à vitrifier à l'aide du feu, et en perdant leur acide carbonique; les altérations réciproques qu'ils éprouvent par les différentes bases alcalines et terreuses caustiques, et qui dépendent des attractions électives de l'acide carbonique pour ces bases; leur décomposition par les acides, qui en dégagent l'acide carbonique, sous forme de gaz, parce qu'il absorbe le calorique mis en liberté; enfin, leurs divers modes d'agir sur les autres genres des sels neutres connus avant eux : telles sont les bases des connaissances qu'on a présentées aux élèves sur les propriétés des carbonates terreux et alcalins. On a terminé l'histoire de chaque espèce par l'exposé de ses usages, et par une esquisse des arts auxquels plusieurs des carbonates donnent naissance. Ainsi l'extraction de la potasse, sa calcination, sa purification, la différence de celle qu'on prépare dans divers pays, et sur-tout les moyens de multiplier cette importante fabrication chez nous; la récolte du carbonate natif, ou du natrum en Égypte, dans les plaines du Delta, dans les environs du Caire, &c.; la préparation de la soude par la combustion des kalis, des soda, des varecs, des fucus, des algues; la différence de celle d'Alicante et de celle de Cherbourg; l'art de retirer cet alcali du sel marin et des eaux salées; la fabrication du carbonate d'ammoniaque ou sel volatil d'Angleterre en grand; l'utilité d'employer à cet usage une foule de matières animales qu'on laisse souvent pourrir dans les campagnes, les chemins, ou dans ces lieux infects connus sous le nom de *voiries;* la préparation des craies, leur lavage; leur emploi dans la peinture, dans le dessin; la taille, la ténacité, la solidité, la pesanteur, le grain, le tissu, la durabilité et les différences des pierres à bâtir, celles des marbres, des brèches, des lumachelles; l'art de les

tailler, de les scier, de les polir, de les tourner, de les graver, de les teindre, &c.; une partie des arts du chaufournier, du faiseur de ciment, de mortier, du stucateur, &c., ont été présentés aux élèves, avec toutes les applications de la chimie exacte à tous les objets d'un grand intérêt; et on leur a fait voir combien tous les procédés propres aux différens arts où les carbonates sont employés, étaient susceptibles d'amélioration et de perfectionnement par les nouvelles découvertes dont les chimistes ont enrichi la science.

FOURCROY.

2.e DIVISION.

SUBSTANCES VÉGÉTALES.

QUOIQUE l'action organique qui constitue la vie, tende essentiellement à former des composés combustibles, quoiqu'en général la force vitale tende à séparer des matériaux qu'elle s'approprie et qu'elle emploie à la nutrition, l'oxigène qui s'y trouve, à rapprocher, à combiner d'une manière particulière et dans des proportions différentes, le carbone, l'hydrogène et les autres substances combustibles simples, cependant, lorsqu'on examine les solides qui forment la base des corps organisés, les fluides qui circulent dans leurs vaisseaux, ou sont déposés dans leurs tissus parenchymateux, on reconnaît bientôt que presque tous ces produits de la vie retiennent, conservent dans l'ordre de leur composition, une quantité d'oxigène plus ou moins grande; ce qui forme tantôt des oxides, tantôt des acides.

Mais c'est principalement dans les végétaux que l'on trouve ces sortes de combinaisons, et qu'elles y sont plus abondantes, plus variées, et à un plus haut degré d'oxigénation. Peut-on en être surpris, quand on observe quels sont les principes constitutifs des végétaux, quelles sont les substances qui servent à leur nutrition? D'un côté, on y trouve le carbone plus abondant que dans les animaux. On y voit ce principe fixe, et qui a

si peu d'affinité avec le calorique, combiné à une quantité plus ou moins considérable d'hydrogène, et former ainsi des composés binaires qui, à une température peu élevée, ont la plus grande disposition à retenir, à fixer l'oxigène, et par conséquent à former des oxides ou des acides.

D'un autre côté, l'oxigène, ce principe acidifiant commun, est transmis continuellement dans le tissu de la plante, soit par le contact de l'air atmosphérique, soit par l'eau que les racines puisent de la terre; il circule avec la sève; il parcourt les plus petits vaisseaux; il pénètre les tissus les plus fins : là, réduit à une division extrême, perdant successivement le calorique, il est disposé à de nouvelles combinaisons, tandis qu'une partie, conservant une plus grande quantité de calorique, prend la forme de gaz, s'échappe avec la transpiration de la surface des feuilles, et se répand dans l'atmosphère.

Ainsi l'organisation végétale présente en même temps les matériaux et les conditions les plus propres à former des combinaisons oxigénées; et quoique toujours formées des mêmes substances, ces combinaisons sont très-nombreuses, très-variées, parce qu'elles diffèrent essentiellement dans l'ordre de leur composition, soit par les proportions respectives d'hydrogène et de carbone, dont l'union constitue la base ou radical acidifiable, soit par la quantité d'oxigène qui s'y trouve fixée.

D'après ces considérations, on n'est point surpris de trouver un si grand nombre d'acides végétaux; on en connaît actuellement treize, qui sont distingués les uns des autres par quelques propriétés particulières; et comme assurément les proportions des substances propres à les former, ne sont pas les mêmes, ni dans toutes les plantes, ni à toutes les époques de la végétation, vraisemblablement on pourra encore un jour en augmenter le nombre.

L'expérience et l'observation ne laissent aucun doute sur la composition des acides végétaux et la cause de leurs différences. En effet, non-seulement on peut par divers procédés les détruire, séparer leurs parties composantes, mais encore, en diminuant, ou en augmentant la proportion d'une de leurs parties composantes, on change leurs propriétés, on forme des acides particuliers, entièrement différens de ce qu'ils étaient avant l'opération;

ainsi on les convertit les uns dans les autres. Enfin, ce qui est très-remarquable, on obtiendra, on formera toujours des acides, en traitant par quelque procédé oxigénant une substance végétale quelconque, ou même un simple composé d'hydrogène et de carbone.

La vérité de ces assertions est confirmée par un si grand nombre d'expériences faites par les plus habiles chimistes, qu'il suffirait de les rappeler; cependant nous en ajouterons une qui a été faite dans les séances du cours, et qui nous paraît bien propre à ne laisser aucun doute sur ce point important de théorie.

On a pris un alambic de verre tubulé, auquel on a adapté un appareil propre à recevoir et à recueillir les produits liquides et gazeux; puis on a mis dans la cucurbite de l'alambic dix grammes d'huile volatile de térébenthine, et on a fermé la tubulure avec un bouchon de liége, au milieu duquel passait un tube de verre, élargi, évasé en haut en forme d'entonnoir, alongé, rétréci, et terminé en bas par une petite ouverture.

L'appareil ainsi préparé, on a fait tomber sur l'huile volatile de térébenthine, goutte à goutte, et souvent à de longs intervalles, vingt grammes d'acide nitrique pur et concentré.

Nous ne nous arrêterons pas à décrire tous les phénomènes que présente l'opération, à indiquer toutes les attentions qu'elle exige pour éviter l'explosion ou l'inflammation; il suffit, en ce moment, pour notre objet, d'en faire connaître les produits, qui sont très-remarquables.

1.° Il y a eu une quantité considérable de fluides gazeux, que l'on a facilement reconnus être un mélange de gaz acide carbonique, de gaz azote et de gaz nitreux : la proportion respective de ces gaz était à-peu-près moitié de gaz acide carbonique, un quart de gaz azote et un quart de gaz nitreux; mais la quantité et la proportion de ces gaz ont changé plusieurs fois dans le cours de l'opération, et on peut, en quelque sorte, déterminer ce changement à volonté, en rapprochant ou en éloignant l'instillation de l'acide nitrique; ainsi, en faisant tomber de suite plusieurs gouttes d'acide nitrique sur l'huile volatile de térébenthine, il y a aussitôt dégagement de calorique, accompagné de gonflement, de bouillonnement, et il passe rapidement une quantité considérable de gaz acide carbonique mêlé de gaz nitreux; au contraire, en laissant entre chaque goutte un

long intervalle, la combinaison se faisant lentement, on n'obtient qu'une très-petite quantité de gaz, qui, pour la plus grande partie, est du gaz azote; il n'y a même aucun produit gazeux, si on emploie un acide nitrique faible.

2.° Il y avait dans le ballon un liquide diaphane, de couleur citrine, d'une odeur vive, pénétrante, et chargé de quelques portions d'huile qui avait été vaporisée par la chaleur et le bouillonnement produits dans l'acte de la combinaison : cette liqueur était un mélange d'acide nitrique qui avait été vaporisé, et d'acides nouveaux qui s'étaient formés. Après en avoir séparé, autant qu'il a été possible, l'huile épaisse et pesante, ainsi que l'huile légère qui y étaient mêlées, on l'a soumise à la distillation, et à un feu très-doux, on en a retiré la moitié. Cette première portion, limpide comme l'eau, était remarquable par une odeur vive de fleurs de pêchers; c'était le *principe* ou *acide prussique* très-pur, ce dont on s'est assuré par ses propriétés, et sur-tout par le précipité bleu que l'on a obtenu, en versant de cette liqueur sur quelques dissolutions de fer. La portion restant dans la cornue était encore un mélange d'acide; une partie s'est cristallisée par le refroidissement, et il a été facile de reconnaître l'*acide oxalique*; l'autre partie, qui n'est point cristallisée, était un mélange d'acide nitrique, et d'*acide malique*.

3.° Enfin il restait dans la cucurbite de l'alambic une masse brunâtre, d'une odeur particulière, d'une consistance tenace, visqueuse, qui approchait de la nature des résines, ou des savonules acides. L'affusion de l'acide nitrique ne produisait plus aucun effet sensible; mais en exposant l'appareil à un feu très-doux, et en versant de nouveau et peu-à-peu de l'acide nitrique, on a obtenu une nouvelle production de gaz, une nouvelle production d'acides; le temps ne nous a pas permis de suivre plus loin cette opération; mais il est vraisemblable qu'en la continuant avec les précautions qu'elle exige, on aurait encore obtenu de nouveaux produits et peut-être différens; mais c'en était assez pour faire sentir comment, avec les mêmes substances, et seulement en changeant les proportions, la nature forme des composés dont les propriétés sont si différentes, et comment l'art peut l'imiter.

Après ces considérations générales et quelques autres analogues sur la formation des acides végétaux, la nature de leurs bases, les moyens d'en

séparer les parties composantes, de déterminer la quantité d'oxigène qui y est fixée, on a passé à l'examen particulier de chacun de ces acides, des propriétés qui les distinguent, de leurs usages dans nos arts : et pour suivre quelqu'ordre dans cet examen, nous les avons divisés en deux genres.

Nous comprenons dans le premier les acides *natifs*, ceux qui existent tout formés dans les végétaux, qui sont un produit de l'acte même de la végétation : nous en comptons sept.

1.° L'*acide gallique*, ainsi nommé parce qu'on le retire principalement de la noix de galle (sorte d'excrescence accidentelle déterminée par la piqûre et le développement d'un insecte), mais que l'on retrouve aussi en plus ou moins grande quantité dans les feuilles, les écorces, les racines d'un grand nombre de plantes, qui long-temps avaient été comprises sous la dénomination générale *d'astringentes*. Cet acide, dont la base est, sinon entièrement, du moins pour la plus grande partie, formée de carbone, est susceptible de cristallisation, et distingué de tous les autres acides, principalement par son action sur les oxides de fer, qu'il enlève aux autres acides et qu'il précipite en noir.

2.° L'*acide benzoïque*, que l'on obtient du benjoin, des baumes, de quelques fruits qui contiennent une substance résineuse et ont une odeur aromatique, est cristallisable, fusible, volatil, à une température douce ; combustible par le contact avec le charbon, donnant une fumée d'une odeur vive, agréable ; peu soluble dans l'eau, davantage dans l'alkool ; formant avec la chaux, la baryte, des sels peu solubles, &c.

3.° L'*acide citrique*, qui existe dans le citron, les tamarins, l'épine-vinette, et un grand nombre de fruits, est également cristallisable, facilement soluble dans l'eau, formant avec la chaux un sel insoluble, ne décomposant pas les sulfates, nitrates et muriates de chaux, ne formant pas avec la potasse un acidule, ne précipite pas les dissolutions nitriques de plomb, de mercure, d'argent, &c.

4.° L'*acide tartareux*, que l'on obtient principalement du tartre de nos vins, mais qui existe tout formé dans le raisin, la sauge, la mélisse, le

tamarin, et beaucoup d'autres plantes; cristallisable, facilement soluble dans l'eau, ne décomposant pas les nitrates, muriates et sulfates de chaux, et lorsqu'il est en partie saturé de potasse, forme un sel acidule peu soluble dans l'eau.

5.° L'*acide oxalique*, que la nature présente dans l'*oxalis*, les différentes espèces d'oseille; cristallisable, facilement soluble dans l'eau, décomposant tous les sels calcaires, formant un sel acidule lorsqu'il est en partie saturé de potasse, &c.

6.° L'*acide malique*, qui existe non-seulement dans la pomme (*malus*); mais encore dans la fraise, la framboise, et la plupart de nos fruits d'été : cet acide, qui contient plus d'oxigène que les précédens, est incristallisable; il forme avec la chaux un sel cristallisable, soluble seulement dans l'eau bouillante; avec le plomb, le mercure, la baryte, des sels presque insolubles; avec les alkalis, la magnésie, des sels déliquescens; précipite les dissolutions nitriques de plomb, de mercure, d'argent.

7.° Enfin, l'*acide acéteux*, que l'on prépare toujours pour nos usages par la fermentation, a été observé tout récemment par *Deïeux* dans la sève de la vigne, et il existe vraisemblablement dans d'autres végétaux. Cet acide, caractérisé par son odeur, sa saveur, sa volatilité, ne cristallise point; il ne forme point d'acidule avec la potasse; les sels que produit sa combinaison sont facilement solubles, et généralement peu cristallisables.

En terminant cette énumération des acides natifs, des végétaux, et de quelques-unes de leurs propriétés, nous devons ajouter 1.° qu'ils n'existent jamais purs dans les plantes; souvent ils sont unis, d'une manière plus ou moins intime, au muqueux, comme les acides gallique, citrique, malique; d'autres fois à une substance résineuse ou huileuse, comme l'acide benzoïque et *succinique;* quelquefois ils sont en partie saturés de potasse et forment un acidule, comme l'acide tartareux, l'acide oxalique; enfin on les trouve combinés avec une terre : ainsi *Deïeux* a observé que dans la sève de la vigne, l'acide acéteux était combiné avec la chaux;

2.° Souvent plusieurs de ces acides sont réunis dans la même partie; ainsi

ainsi la groseille, la cerise, la fraise, dans leur état de maturité, contiennent à-peu-près autant d'acide citrique que d'acide malique. Le raisin contient l'acide tartareux et l'acide citrique; et, ce qui est très-remarquable, la proportion respective de ces acides change successivement, suivant l'état de maturité du fruit, et les progrès de la végétation.

3.° L'art est parvenu par différens procédés, à former tous les acides végétaux, tantôt en traitant une substance végétale et même animale, avec l'acide nitrique ou un oxide métallique, tantôt en la soumettant à la fermentation. Ainsi on obtient également de l'acide oxalique, du sucre, de la soie, de la laine, &c.; et cet acide une fois formé, peut être converti en acide acéteux, ou bien on peut obtenir ce dernier par la fermentation des liqueurs vineuses ou même du petit lait, &c. Cette circonstance ne doit pas nous empêcher de les considérer comme des acides natifs, parce qu'en effet dans les plantes ils sont un produit de la végétation; et l'art pour les obtenir, n'a fait, par ses différens procédés, que saisir les moyens de la nature, et déterminer les conditions qu'elle emploie pour les former.

Le second genre des acides végétaux comprend ceux qui sont *produits par quelque altération indépendante* de la végétation; on en distingue six; savoir: 1.° *l'acide pyromuqueux*, 2.° le *pyrotartareux*, 3.° le *pyrohigueux*: ces trois acides, également incristallisables, sont un produit de la décomposition opérée par le feu du muqueux, du tartre ou du bois; mais les composés qu'ils forment, leurs propriétés, ont encore été peu observés.

4.° Nous plaçons dans cette section *l'acide succinique*, parce que cet acide ne se trouve dans aucun végétal vivant, parce qu'il n'est pas le produit de l'organisation; enfin parce que le succin dont on le retire, est évidemment le résultat d'une altération bitumineuse qu'ont éprouvée les végétaux enfouis dans le sein de la terre. Cet acide volatil, cristallisable, combustible, et dont la base paraît huileuse, présente tous les caractères des acides végétaux, et forme avec les terres, les alcalis, des sels qui n'ont pas encore été bien examinés.

5.° Nous plaçons également dans cette section *l'acide acétique*, qui n'est qu'un degré ultérieur d'oxigénation de l'acide acéteux, qui acquiert ainsi de nouvelles propriétés.

6.° Enfin on ajoutera *l'acide camphorique*, même celui que l'on dit *retiré*

du liège, lorsque ces combinaisons oxigénées mieux connues, mieux observées, présenteront un caractère constant, distinct, et quelques propriétés particulières et utiles, comme instrumens de recherches et d'analyse.

A cette liste nombreuse des acides que l'on trouve tout formés dans les végétaux, ou que l'on obtient en soumettant quelques-uns de leurs produits à la distillation ou à des procédés oxigénans, on pourrait encore ajouter les acides *carbonique*, *sulfurique*, *muriatique* et *nitrique*, dont la combinaison avec la soude, la potasse, la chaux, forme différens sels secondaires que l'on trouve dans les bourraches, la mille-feuille, et sur-tout dans les plantes maritimes, &c. Mais quoiqu'ils ne puissent pas être considérés comme un produit accidentel de la végétation et du sol, quoiqu'ils soient bien assurément un résultat constant de l'action vitale, de l'organisation propre à quelque plante, cependant on ne les place pas au nombre des acides végétaux, parce qu'ils ont un caractère particulier, parce qu'on les trouve plus abondamment dans le sein de la terre, dans la masse de l'atmosphère, et qu'ils appartiennent en quelque sorte à toutes les classes des corps de la nature.

Pour compléter l'exposition des acides, il nous restait à considérer le *tanin*, qui long-temps a été confondu avec l'acide gallique ou les substances astringentes, et qui aujourd'hui est considéré par quelques chimistes, sinon comme un acide particulier, du moins comme un composé faisant fonction d'acide. Mais connaissant les recherches multipliées, les découvertes importantes que le C.en *Seguin* avait faites sur cet objet, l'application heureuse qu'il en avait faite pour simplifier et perfectionner l'art de la tannerie, nous l'avons invité à venir au laboratoire faire part de ses observations, de sa méthode. Bien différent de quelques fabricans égoïstes qui cachent soigneusement et sous un voile mystérieux, des procédés simples, souvent perpétués par tradition orale, et qui ne leur ont coûté ni peines ni dépenses, le C.en *Seguin* n'a pas hésité à répondre à nos vœux, et a consacré pour cet objet deux séances, auxquelles tous les élèves et la plus grande partie des instituteurs et agens de l'école ont assisté. Non-seulement il a exposé sans réserve tout ce que l'expérience et la méditation lui ont fait découvrir, mais encore il a fait apporter des instrumens, il a amené avec lui des ouvriers habiles pour exécuter toutes les manœuvres, enfin il a fourni gratuitement les peaux et une quantité considérable de tan, afin que chacun des élèves

pût lui-même répéter les expériences, suivre le détail de tous les procédés, et connaître complétement cette méthode. Nous désirerions pouvoir rendre un compte exact des deux séances que le C.en *Seguin* a faites à l'*école*; mais forcés par les circonstances, nous nous bornerons à un précis des principaux objets.

Le besoin a créé nos arts. Quoique l'homme jouissant de toute sa force soit constitué de manière à supporter la différence des saisons, des climats; quoique les parties de son corps soumises à la pression soient, comme dans les quadrupèdes, disposées de manière à acquérir, par l'habitude et l'exercice, une épaisseur, une compacité qui les rend peu sensibles à l'action des corps étrangers; des accidens, des circonstances qu'il est facile de supposer, l'auront déterminé à chercher les moyens de garantir ses pieds de l'impression d'un sol inégal, caillouteux ou humide. Le pasteur aura employé d'abord des écorces molles et flexibles, des tissus, des nattes de différentes sortes; le chasseur aura pris, des animaux qui servent à sa nourriture, un morceau de peau encore fraîche, qu'il aura façonnée, modelée sur son pied, et qu'il y aura retenue par des courroies (1). Ces moyens simples suffisent dans un climat ordinairement sec; mais ils seraient peu avantageux sur un sol humide, dans un climat sujet aux alternatives des pluies et de la sécheresse. Les peaux se gonflent, s'amollissent par l'humidité, deviennent perméables à l'eau, se détruisent facilement, passent promptement à la putréfaction, et deviennent ensuite dures et cassantes par la sécheresse. Le hasard, sans doute, fit découvrir dans quelques plantes et sur-tout dans l'écorce de chêne, un moyen de prévenir ces inconvéniens. On vit que les peaux préparées avec ces substances, acquéraient de nouvelles propriétés; que, sans perdre leur souplesse elles devenaient moins perméables à l'eau, plus fermes, plus compactes, et en quelque sorte imputrescibles. Ces observations firent naître l'art du tanneur.

---

(1) Au récit des voyageurs, ces usages se retrouvent encore chez quelques peuples. *Sparmann* dit que les Hottentots font leurs chaussures avec un morceau de peau fraîche, dont ils relèvent les bords, et qu'ils attachent avec des courroies. Le côté du poil est en dehors; on ne fait à la peau d'autre apprêt que de la battre et de la mouiller; si elle est d'une espèce plus forte et plus épaisse, de buffle, par exemple, on la laisse pendant quelques heures dans du fumier de vache, et par ce moyen elle devient molle et flexible, &c.

Cet art, fort ancien sans doute, puisqu'il est fondé sur un des premiers besoins de l'homme en société, comprend une suite de procédés que l'on exécutait par habitude, par imitation, mais dont l'objet essentiel restait inconnu ; aussi la préparation des cuirs exigeoit ordinairement plusieurs années, et quelquefois encore, malgré les soins, la dépense, la longueur du temps, le tannage était incomplet, la peau ne formait qu'un cuir mollasse et poreux, qui se détruisait promptement par l'humidité : ces défauts provenaient essentiellement de l'ignorance des vrais principes de cette opération, parce qu'on n'avait pas saisi l'action du tan sur la peau, les circonstances, les conditions qui peuvent hâter ou retarder cette opération.

Pour y parvenir d'une manière exacte, il faut considérer 1.° la nature et les propriétés du tan, 2.° la structure et la composition de la peau.

Nous ne nous arrêterons pas à indiquer les attentions que l'on doit apporter dans le choix des écorces de chêne, le temps, la manière de les détacher de l'arbre, de les conserver, de les réduire en poudre ; il suffit, pour notre objet, de remarquer que l'eau versée dans une cuve sur du tan, après quelques heures d'infusion et à la seule température de l'atmosphère, se colore, prend une saveur acerbe, se charge des substances les plus solubles qui existent dans le tan ; en versant plusieurs fois de nouvelle eau, en répétant les infusions, on enlève successivement toutes les parties solubles du tan, l'eau cesse de se colorer, il ne reste plus dans la cuve qu'une masse fibreuse, qu'un tissu parenchymateux aride, insoluble dans l'eau, et entièrement impropre à l'opération du tannage ; aussi on rejette toujours des fabriques ce résidu, comme inutile, les jardiniers seulement s'en servent pour leurs couches ; et peut-être l'emploîrait-on encore plus avantageusement à former des papiers grossiers.

C'est donc dans l'eau qui a servi à l'infusion, aux lixiviations du tan, qu'il faut rechercher ces substances solubles qui seules sont efficaces pour le tannage.

En examinant l'eau des dernières filtrations, on trouve non-seulement qu'elle est plus claire, moins chargée, moins acerbe que l'eau de la première lixiviation, mais encore elle a toutes les propriétés de l'acide gallique; elle altère en rouge l'infusum de tournesol, elle agit sur les dissolutions métalliques, elle précipite sur-tout en noir le sulfate de fer, &c.; aussi un

morceau de peau fraîche, dépouillée des graisses et des sucs sanguins, macéré dans cette liqueur, au lieu d'y devenir compacte, y prend plus de mollesse et de gonflement.

La liqueur de la première lixiviation présente un caractère bien différent; non-seulement elle est plus colorée, plus acerbe, non-seulement on y retrouve les propriétés de l'acide gallique, par l'altération des couleurs bleues des végétaux, par le précipité noir qu'elle forme avec le sulfate de fer; mais encore elle a cette propriété si remarquable de former avec la gélatine animale ou la colle-forte, un précipité jaunâtre, abondant, insoluble dans l'eau, inputrescible, et qui devient dur et cassant par la dessiccation; aussi si on y fait tremper un morceau de peau convenablement préparé, il devient peu-à-peu plus compacte, et passe à l'état de cuir.

Il existe donc en même-temps dans cette même liqueur, deux substances très-différentes par leurs propriétés : l'une qui précipite le fer en noir, c'est *l'acide*, ou le principe gallique; l'autre qui précipite la gélatine animale ou la colle-forte, est désignée sous le nom de *tanin*, à cause de son action pour la préparation des cuirs.

Pour ne laisser aucun doute sur ce point important, on a démontré, par une foule d'expériences faciles à vérifier,

1.° Que la liqueur des dernières lixiviations, quoique colorée et conservant une saveur acerbe, ne donne avec la colle aucun précipité, ce qui semble indiquer que l'acide gallique qui se trouve dans le tan, n'a pas une aussi grande solubilité que le tanin; en effet, comme on l'a déjà remarqué, en versant successivement de l'eau sur le tan, on finit par obtenir une liqueur qui ne contient plus de tanin, qui ne précipite plus la colle, quoiqu'elle précipite encore très-bien le sulfate de fer.

2.° La liqueur de la première lixiviation, après avoir été saturée de colle ou gélatine animale, après avoir formé avec cette substance un précipité abondant, est entièrement dépouillée de tanin; elle ne diffère plus de la liqueur des dernières filtrations; enfin elle ne contient plus qu'une portion de principe gallique; aussi l'addition du sulfate de fer fournit encore, avec cette liqueur, un nouveau précipité.

3.° Comme le tanin a une grande affinité avec la gélatine animale, comme il forme toujours avec cette substance un précipité insoluble, ce

moyen fournit un réactif très-commode pour reconnaître sur-le-champ, dans une liqueur, et déterminer, d'une manière précise, la quantité de gélatine qui s'y trouve ; ainsi l'infusum de tan versé dans du lait, du petit-lait, de la sérosité du sang, du bouillon de bœuf, &c., forme dans ces liqueurs un précipité plus ou moins abondant, suivant la quantité de gélatine qui s'y trouve.

Cette propriété particulière du tanin fournit une application qui peut devenir très-importante, dans l'art de traiter les maladies, pour déterminer la nature des urines, et servir à reconnaître quelques affections. Dans l'homme sain, et dont toutes les fonctions s'exercent avec intégrité, les urines ne contiennent point de gélatine et ne forment point de précipité avec l'infusum de tan ; au contraire, dans toutes les affections gastriques, les urines sont plus ou moins chargées de gélatine et forment, avec l'infusum de tan, un précipité plus ou moins abondant ; il en est de même dans toutes les maladies aigües et chroniques, où les forces digestives et assimilatrices sont troublées, dérangées ou perverties.

4.° L'acide gallique, ou, si on aime mieux, le principe qui précipite le sulfate de fer, se trouve souvent seul, ou du moins sans être réuni au tanin ; ainsi le quinquina, le café cru, ou torréfié, les racines de fraisier, de scrophulaire, la mille-feuille, l'arnica, les fleurs de camomille romaine ; enfin, cette multitude de plantes que l'on a comprises vaguement sous le titre d'*astringentes*, contiennent uniquement l'acide gallique : toutes forment, avec le sulfate de fer, un précipité plus ou moins coloré et abondant ; mais aucune ne produit le plus léger changement dans le solutum de colle animale ; au contraire le tanin, ou le principe propre au tannage, n'a jamais été trouvé seul ; toujours il est uni ou combiné au principe gallique. Long-temps on avait cru qu'il n'existait que dans le chêne, la noix de gale, le sumac, les seules substances que l'on employât dans les fabriques pour le tannage ; mais il se trouve encore en plus ou moins grande quantité dans le gaînier, le rosier, le melèse, plusieurs espèces de pins, d'acacias, d'aliziers, dans l'oignon de scille, les racines de bistorte, de rhubarbe, de patience et plusieurs autres plantes dont nous présenterons le tableau dans un autre numéro de ce Journal ; nous avons même trouvé ce principe dans les produits de la distillation de

différentes substances végétales, où il avait été en quelque sorte formé dans l'acte même de l'opération.

De ces différentes considérations, fondées sur l'expérience, on peut tirer ces principes généraux : 1.° Toute substance dont l'infusum peut précipiter la colle animale, jouit de la propriété tannante; 2.° toute substance qui a la propriété tannante, précipite aussi en noir le sulfate de fer; 3.° toute substance qui précipite le sulfate de fer, mais ne précipite pas le solutum de colle (1), n'a pas la propriété tannante.

Nous terminerons cet article, en faisant connaître quelques changemens remarquables qu'éprouve la lessive ou l'infusum de tan.

1.° Peu de jours après sa préparation, il s'y forme spontanément un précipité jaunâtre, qui est d'autant plus abondant, que la liqueur est plus chargée et que l'infusion a été plus longue. Ce précipité, séparé de la liqueur, se réduit, par la dessiccation, en une poudre très-fine, très-légère, de couleur cendrée, qui est entièrement insoluble dans l'eau, l'huile, l'alkool, l'éther, même à la température de l'ébullition : projetée sur les charbons, cette poudre brûle facilement en donnant une fumée épaisse; soumise à la distillation, elle fournit une assez grande quantité de gaz acide carbonique, une liqueur aqueuse acide, une huile brunâtre; enfin il reste dans la cornue un charbon léger et spongieux. Comme, par son insolubilité, ce précipité se rapproche de la nature des parties ligneuses, et comme il a lieu même lorsqu'on conserve la lessive de tan dans des flacons entièrement remplis et bien bouchés, on pourrait penser que c'est seulement un dépôt graduel et successif du débri des parties ligneuses et parenchymateuses de l'écorce, disséminées et suspendues dans la liqueur; on pourrait penser que le contact de l'air n'a aucune part à ce phénomène; mais nous devons observer que ce précipité se forme dans la lessive la plus limpide, même après avoir été filtrée; qu'il est plus abondant lorsque la lessive a été préparée avec un tan anciennement moulu et conservé sans soins; qu'il se forme plus promptement, lorsque la liqueur présente

---

(1) Le solutum de colle est un réactif commode pour reconnaître le tanin, et qu'il est avantageux d'avoir toujours dans un laboratoire de chimie. Pour prévenir la putréfaction à laquelle passent promptement les substances animales, nous y avons fait ajouter un vingtième d'alkool, ce qui remplit très-bien l'objet, sans altérer les propriétés du solutum.

une grande surface au contact de l'air; on voit alors la surface de cette liqueur se ternir, se couvrir d'une pellicule extrêmement fine, qui s'épaissit chaque jour par le repos, et prend plus de consistance. Si on la divise en agitant la liqueur, elle se renouvelle et produit, en se détachant, le précipité dont nous parlons.

On peut déterminer, en quelque sorte à volonté, la formation de cette pellicule et de ce précipité, en exposant la liqueur au contact du gaz oxigène, ou en y versant de l'acide muriatique oxigéné; il suffit même d'approcher près de l'infusum de tan un flacon qui contienne de l'acide muriatique oxigéné; on voit dans l'instant même se former une pellicule qui, comme une gaze légère, flotte, se répand en un clin d'œil sur toute la surface, se revêt d'abord, et dans un ordre constant, des plus belles couleurs de l'iris, et finit par devenir brunâtre: si on continue l'expérience quelques minutes, la pellicule s'épaissit, le précipité commence. Ainsi la formation de ce précipité, les propriétés qu'il acquiert, dépendent d'une combinaison de l'oxigène, qui s'opère, soit pendant l'infusion et la filtration de la lessive, soit après l'avoir tirée au clair par le contact de l'oxigène atmosphérique; ce qui fait sentir la nécessité, l'avantage d'employer un tan récemment préparé (1); de le conserver, ainsi que les lessives que l'on en prépare, à l'abri du contact de l'air.

Ces phénomènes sont communs à toutes les préparations des végétaux faites à l'eau, soit par infusion, décoction, soit même par distillation; nous avons vu de semblables précipités se former peu-à-peu dans l'infusum ou le décoctum de noix de gale, de sumach, de gentiane, de quinquina, et même des plantes les plus fades, comme des plus aromatiques et des plus âcres; le suc exprimé des plantes fraîches, telles que la cigüe, la mercuriale, l'indigotier, &c. présente les mêmes phénomènes et fournit (sur-tout quand on favorise l'action de l'air par l'agitation) un dépôt pulvérent coloré, et que

---

(1) Ces observations doivent s'étendre à toutes les substances végétales qui sont réduites en poudre. Non-seulement elles perdent l'arome qui leur est propre, mais encore elles se dénaturent par le contact de la lumière, de l'air atmosphérique; leurs propriétés sont considérablement altérées, et la dose à laquelle il convient de les employer, est alors très-incertaine; aussi le médecin ne doit-il prescrire, dans ses formules, que des poudres récemment préparées.

long-temps on a désigné sous le nom de *fécules*; enfin toutes les eaux distillées que l'on conserve plusieurs années, se troublent, sont parsemées de filamens et de flocons blanchâtres plus ou moins abondans, mais toujours insolubles; et c'est à une combinaison de l'oxigène, comme l'avait déjà indiqué *Fourcroy*, au sujet du quinquina, dans la belle analyse qu'il a donnée de cette substance, que l'on doit attribuer la formation de ces précipités, l'insolubilité qu'ils acquièrent et qui les rapproche de la nature de la fibre ligneuse.

Quoi qu'il en soit, la précipitation spontanée qui s'opère par le contact de l'oxigène atmosphérique dans la lessive du tan, n'en change pas les propriétés, du moins d'une manière sensible : et comme dans une lessive un peu chargée, ce précipité est abondant les premiers jours, il serait peut-être avantageux d'attendre que ce premier précipité fût formé avant d'y plonger les peaux; car cette matière en se déposant, s'attache à la surface des peaux, y forme un enduit plus ou moins épais, qui les salit, bouche leurs pores, et retarde un peu l'action directe du tan.

2.° La lessive du tan, sur-tout si elle est fort chargée et préparée dans une saison chaude, prend, après quelques jours, une odeur vineuse, ce qui semble annoncer un commencement de fermentation, et pourrait faire craindre, qu'en se prolongeant, elle ne détruisît les propriétés tannantes. Pour s'assurer jusqu'à quel point ces craintes étaient fondées, on a mêlé avec une lessive de tan, différens acides végétaux, et aucun n'a altéré sensiblement ses propriétés; enfin nous devons ajouter que depuis près de deux ans, on conserve dans le laboratoire un flacon d'infusum de tan, et, malgré les alternatives de température auxquelles il a été exposé et les changemens qu'a nécessairement produits le contact de l'air, ses propriétés paraissent les mêmes, et journellement encore on s'en sert avec avantage comme réactif, pour reconnoître la présence de la gélatine.

Comme la connaissance des propriétés du tan fournit des observations importantes et qui servent de base à la méthode de *Seguin*, nous n'avons pas craint de nous étendre sur cet objet; mais nous nous bornerons seulement à quelques considérations générales sur la structure et la composition chimique de la peau.

Cette membrane, comme le démontrent les anatomistes, est essentiellement formée d'un grand nombre de petites lames ou fibres blanches, larges,

courtes, rapprochées, unies, serrées, mais entrecroisées et disposées en différens sens, de manière à laisser entre elles une infinité de petites aréoles ou vacuoles ; ce qui présente en même temps un tissu dense, mais mou, spongieux, et susceptible de s'étendre et de se raccourcir ; au milieu de ce tissu, que l'on compare ordinairement à un feutre, on trouve un grand nombre de nerfs, de vaisseaux de différens ordres, dont les ramifications très-fines et très-multipliées, concourent encore à soutenir, à conserver cette structure lamelleuse de la peau, et portent dans toutes les vacuoles les sucs qui servent à l'entretien, à la nutrition de cette membrane. A sa surface on voit l'épiderme. Cette membrane, mince, transparente, est d'une texture bien différente; on n'y trouve ni cet appareil des vaisseaux, ni cette disposition de fibres ou lames, dont l'entrecroisement forme des mailles, un tissu spongieux : ce n'est en quelque sorte qu'une couche uniforme, qui ne présente aucune organisation distincte, mais qui adhère fortement à la peau, s'enfonce dans les plis, les porosités nombreuses qu'elle présente; enfin dans l'épaisseur de la peau, les poils sont implantés, et y tiennent par une sorte de bulbe ou de racine ovale, parsemée de petits vaisseaux remplis d'un suc muqueux.

La composition de la peau, les changemens qu'elle éprouve par les différentes préparations, par les agens chimiques, les propriétés qu'elle acquiert dans ces divers états, présentent d'autres considérations.

Si on fait macérer pendant quelques heures dans l'eau, à la température de l'atmosphère, la peau fraîche d'un animal adulte; si, pour hâter l'effet, on l'agite, on en exprime, on en sépare le sang, les sucs, les différentes substances solubles contenues dans les vaisseaux ou dans son tissu, et en examinant la nature des substances que l'on en a séparées, on n'y reconnaît qu'une petite quantité de gélatine qui encore a peu de consistance, peu de tenacité. Des macérations ultérieures, à la même température, ne fournissent plus de gélatine; le tissu fibreux reste insoluble, il n'éprouve plus de nouvelles pertes. Ainsi il paraît que dans l'état naturel, la peau contient peu de gélatine soluble et toute formée; on peut même penser que la petite quantité obtenue par la macération première, était seulement renfermée dans les aréoles de la peau, adhérente à la surface des fibres, et que la force vitale n'avait pas encore eu le temps d'en faire l'assimilation, de l'amener à l'état fibreux.

Mais si on élève la température, si on la porte au degré de l'ébullition, le tissu fibreux s'altère, s'amollit, se fond successivement, prend le caractère de gélatine, et peut même être entièrement converti en une colle visqueuse et tenace; ainsi la fibre qui forme la trame solide de la peau, ne diffère essentiellement de la gélatine que par sa texture, sa concrétion, son insolubilité à l'eau froide; et comme on observe que des substances capables d'absorber l'oxigène font perdre à la fibre sa solidité, hâtent et déterminent sa conversion en gélatine, on est autorisé à penser que ces propriétés distinctes de la fibre ne dépendent que d'une proportion d'oxigène que l'action vitale et les progrès de la vie combinent avec la gélatine. Des expériences multipliées semblent ne laisser aucun doute sur ce point; elles m'ont démontré, dit *Séguin*, que la fibre n'est que de la colle oxigénée, qui à l'état de fibre ne peut se combiner avec le tanin, mais qui acquiert cette propriété en passant à l'état de gélatine, en perdant une partie de son oxigène.

Le point essentiel dans l'opération du tannage, est donc de connaître, de diriger, d'une manière précise et invariable, les circonstances, les conditions qui déterminent le passage de la fibre et l'état de gélatine, et de saisir l'instant et les procédés pour opérer à propos la combinaison avec le tanin. Cet objet est trop important pour ne pas rappeler encore quelques-unes des observations qui ont été faites par *Séguin*.

La colle, ainsi qu'il a été remarqué précédemment, a une grande affinité avec le tanin; elle forme sur-le-champ avec cette substance, un précipité insoluble, imputrescible; mais ce qu'il faut bien remarquer, ce précipité est sec, cassant; de-là il est évident qu'une peau, dont le tissu aréolaire contiendrait de la gélatine toute formée, ou dont la texture fibreuse aurait été altérée et amenée par quelques préparations à l'état gélatineux, se tannerait très-promptement, mais ne fournirait qu'un cuir sec, cassant, qui, par l'usage, se gercerait et se détacherait en écailles. Au contraire, l'opération sera longue, incomplète, et ne fournira qu'un cuir mou, spongieux et putrescible, si la fibre conserve son état d'oxigénation, si elle ne passe pas par des degrés successifs à l'état de gélatine, si le tanin ne pénètre pas dans son épaisseur à mesure que s'opère la conversion de la fibre en gélatine.

On évite ces inconvéniens, on atteint d'une manière précise le but qu'on se proposait, par l'usage de la lessive de tan. Cette liqueur contient, comme

on l'a fait observer, deux principes très-différens, mais dont la réunion et l'action sont également nécessaires pour le succès de l'opération. D'un côté, le principe gallique, qui, comme l'on sait, enlève facilement l'oxigène aux dissolutions métalliques, et les ramène ou les rapproche de leur état métallique, agit à-peu-près de la même manière sur la fibre, il la *débrule*, il l'amène à l'état de gélatine. D'un autre côté, le tanin, qui se trouve également dans la lessive, exerce son action dès que la fibre est suffisamment amenée à l'état de gélatine ; ainsi le tannage ne se fait pas instantanément, comme la précipitation de la colle animale, mais il s'opère graduellement, successivement, par couches des surfaces de la peau au centre ; et comme l'action du tanin suit immédiatement celle du principe gallique, la fibre est surprise dans sa position, la texture feutrée de la peau est conservée dans son intégrité, sa composition seule est changée ; aussi les cuirs préparés par ce procédé, ont l'avantage d'être souples, flexibles, insolubles, imputrescibles, plus durables et moins disposés que tous les autres à s'imbiber de l'humidité.

C'est sur cette suite d'observations et d'expériences qu'est fondée la nouvelle méthode de *Séguin*, pour la préparation des cuirs ; nous ne nous arrêterons pas à en rapporter les détails, à indiquer les changemens, les perfectionnemens qu'il a faits dans les différentes branches de l'art du tanneur; mais nous devons ajouter que les procédés ont été répétes dans tous les laboratoires de l'École, exécutés, suivis par le plus grand nombre des élèves ; que les opérations sur différentes espèces de peaux, ont toutes été terminées en huit, dix, douze ou quatorze jours au plus ; que le cuir que l'on a obtenu était complétement saturé de tan, d'une qualité supérieure au cuir préparé par l'ancienne méthode, et que l'on trouve dans le commerce; enfin, à ces avantages, la méthode de *Séguin* réunit la simplicité, la facilité de l'exécution, la certitude du succès. Une découverte aussi importante dans un art si nécessaire à nos besoins, assure à l'auteur l'estime, la reconnaissance générale : ces sentimens sont sur-tout bien dus au citoyen qui sacrifie ses intérêts particuliers à la prospérité publique, et s'empresse à communiquer le fruit de ses recherches. L'avantage d'être utile fait sa récompense, et le dédommage des clameurs que l'envie, l'ignorance et la routine ne manquent jamais d'élever contre toute innovation utile.

Après les deux séances employées par le C.en *Séguin* à faire connaître la nature et les propriétés du tan, on a repris l'ordre adopté dans le cours de chimie végétale; on a examiné successivement les *alcalis*, la *partie ligneuse*, la *matière colorante* des végétaux ; ce qui a naturellement conduit à l'exposition des principes de l'art du teinturier ; des différens procédés qu'il emploie pour fixer les couleurs, pour s'assurer de leurs qualités. En traitant de ces différens objets, on a présenté quelques considérations sur les propriétés nouvelles que les étoffes acquièrent par les combinaisons teintoriales.

La teinture ne doit pas être une simple coloration pour flatter l'œil, mais elle doit être une espèce de tannage colorant, capable d'ajouter aux propriétés du tissu, et de le rendre moins soluble, moins putrescible. Cet objet est généralement négligé ou peu connu; cependant il ne peut être indifférent; non seulement il est important pour l'économie, mais il l'est également, nous ne craignons pas de le dire, pour la salubrité, la conservation de la santé. On le concevra facilement, si l'on fait attention que des étoffes du même tissu, fabriquées de la même manière, diffèrent considérablement, suivant la teinture; quelques-unes sont sèches, peu durables, cassantes, peu propres à conserver, à retenir le calorique; d'autres sont molles, spongieuses; elles se chargent de miasmes de toute espèce, elles attirent l'humidité de l'atmosphère, la retiennent long-temps; et, par l'action successive de la lumière, de l'air, du calorique, elles éprouvent une sorte d'oxidation qui détruit les tissus, ou bien elles passent à une sorte de putréfaction qui forme autour du corps une atmosphère continuelle, ce qui influe, d'une manière plus ou moins marquée, sur la santé. C'est au milieu des armées, sous les tentes; c'est dans les camps, où l'on trouve réunis un grand nombre d'hommes exposés aux mêmes genres de fatigue, d'intempérie, et qui ne diffèrent que par la couleur des habits, que l'on peut bien s'assurer que ces observations ne sont pas sans quelque fondement. C'est dans les magasins des hôpitaux militaires où l'on rassemble les habits, que l'on reconnaîtra une différence très-marquée dans l'odeur, la porosité des étoffes, suivant la couleur dont elles sont chargées.

Après avoir examiné successivement les différens produits des végétaux, on a considéré les altérations qu'ils éprouvent après la mort, par l'action

de la lumière, du calorique, de l'air et de l'eau; ce qui a conduit à la théorie des fermentations vineuse, acéteuse, de la production de l'alkool, de l'éther; enfin le cours a été terminé par l'examen des phénomènes de la putréfaction, qui rend à l'atmosphère, à la terre, les principes que l'action vitale y avait puisés.

Pendant les derniers mois du cours, les élèves ont continué à s'exercer dans les laboratoires particuliers qui leur sont destinés, soit à répéter les expériences principales qui avaient servi d'objets de démonstration, soit à en exécuter d'autres qui leur avaient été désignées ou dont ils avaient conçu le plan : leur attention a été principalement dirigée sur l'application que l'on peut faire des connaissances chimiques pour le progrès des arts, des manufactures; ainsi, ils ont successivement préparé différentes espèces de savons, de vernis, de peintures; ils ont exécuté en petit les différens procédés de la teinture, du tannage, &c. Quelques-uns se sont particulièrement attachés à rechercher les différentes substances propres à servir à la formation de l'acide oxalique; d'autres ont cherché à reconnaître les végétaux qui contiennent le tanin, et que l'on pourrait substituer à l'écorce de chêne. Il est résulté de ces recherches un tableau déjà fort étendu, dans lequel on a distingué les végétaux qui donnent un précipité seulement avec le sulfate de fer, de ceux qui en forment un avec le solutum de colle; ce tableau est déjà intéressant; mais on sent qu'il doit y avoir encore bien des lacunes; elles ne peuvent disparaître que par le temps et l'expérience. Ce sera l'objet du travail d'une autre année, et lorsqu'il sera terminé, nous aurons bien de l'empressement à présenter le travail des élèves.

La chimie animale a occupé pendant les mois de vendémiaire, brumaire et frimaire. L'absence du C.en *Berthollet* ne permet pas de donner actuellement la notice de ce cours, elle sera placée dans un autre cahier.

CHAUSSIER.

3.e DIVISION.

SUBSTANCES MINÉRALES.

LE commencement de l'année d'études ayant été fixé par la loi du 15 fructidor, au 1.er nivôse, il a fallu terminer, dans ce trimestre, la démonstration des trois derniers ordres de la division méthodique du système minéral, qui sont :

Ordre IV. *Combustibles métalliques.*
Ordre V. *Produits volcaniques.*
Ordre VI. *Les eaux.*

L'ordre des métaux comprend aujourd'hui vingt genres, en y admettant l'*urane* et le *titane*, nouvellement découverts, et le *ménakne*, qui n'est encore connu que par les expériences de M. *Grégor.*

Les caractères propres à chacune de ces substances, sont aussi variés qu'importans ; ils forment un ensemble de connaissances fondamentales et d'une fréquente application, soit aux opérations de la chimie, soit aux arts. Pour donner aux élèves le moyen de les acquérir promptement, de les retrouver facilement au besoin, on a mis sous leurs yeux un tableau dans lequel tous les genres sont placés, avec leurs signes chimiques, et renfermés dans des accolades qui montrent celle des trois classes à laquelle ils appartiennent, savoir : 1.° *très-ductiles, difficilement oxidables ;* 2.° *ductiles, facilement oxidables ;* 3.° *non-ductiles, facilement oxidables.*

A la suite sont treize colonnes, dont les cases horizontales correspondent aux différens genres.

La première indique la *couleur* propre à chaque métal ;

La seconde, sa *pesanteur spécifique ;*

La troisième, sa *cohésion*, ou ténacité, déterminée par le poids qu'il soutient avant de rompre;

La quatrième, sa *dureté*, c'est-à-dire le rang dans lequel il paraît devoir être placé relativement à cette qualité, en attendant que l'on ait imaginé quelque moyen d'obtenir des résultats propres à donner une échelle de comparaison plus rigoureuse. On a même jugé nécessaire de

faire ici deux séries, l'une pour les métaux des deux premières classes, l'autre pour les métaux non-ductiles, dont la dureté semble moins dépendre de la force de cohésion de leurs parties que de leur résistance à l'écrouissement ;

La cinquième, sa *ductilité*, qui n'est encore indiquée que par l'ordre respectif, mais qu'il sera plus facile de déterminer par des rapports plus exacts, sur-tout pour les métaux susceptibles d'être tirés à la filière ;

La sixième, sa *fusibilité*. Le degré de l'échelle pyrométrique de *Wedgwood* en a fourni l'expression pour les métaux qui n'entrent en fusion qu'à une chaleur capable d'opérer le retrait de l'argile. On s'est servi, pour les autres, des divisions décimales du thermomètre à mercure; ce qui n'empêche pas que ces termes soient comparables, parce qu'on sait que le zéro du pyromètre de *Wedgwood* répond à 598,32 de ce thermomètre, et que chaque degré du pyromètre parcourt 72,23 degrés de l'échelle thermométrique.

La septième colonne porte pour titre, *oxidabilité*. On voit ici onze degrés déterminés par les observations de *Bergmann*, sur le plus ou le moins de résistance qu'opposent les divers métaux à leur conversion en chaux, c'est-à-dire à leur oxidation.

Mais il faut se garder de trop généraliser les conséquences de ces observations. Par exemple, un métal *A* peut être estimé plus oxidable que le métal *B*, parce qu'il s'oxidera à une température moins élevée; il sera jugé plus oxidable que le métal *C*, parce qu'il décomposera un acide qui résistera à celui-ci; il sera en même temps moins oxidable que *B* et *C*, qui décomposent l'eau, ce qu'il ne fait pas.

Ce sont donc autant de cas d'affinité qui ne préjugent rien de l'un à l'autre, et qu'il faudrait déterminer comparativement.

La série de *Bergmann* étant établie sur la propriété qu'ont quelques métaux d'en précipiter d'autres de leurs dissolutions acides, en état métallique, c'est sans contredit l'un des phénomènes les plus caractéristiques, puisqu'il n'a lieu qu'autant que le métal précipitant a le pouvoir d'enlever l'oxigène au métal précipité.

Le fer, le nickel, le cobalt, le zinc et le manganèse, se trouvant à cet égard dans une condition égale, se partagent le premier rang; l'or et le platine

platine sont à l'autre extrémité de l'échelle, parce qu'ils sont précipités par les autres en état de métal.

La huitième colonne indique l'*accroissement de poids* résultant de l'oxidation. Il diffère de l'affinité avec l'oxigène, en ce que ce n'est pas toujours le métal qui s'y unit le plus facilement, qui en prend le plus pour sa saturation.

Rien ne serait plus avantageux pour doser les parties constituantes dans les analyses, que de connaître d'avance les quantités d'oxigène qui s'unissent aux différens métaux; mais ces quantités varient suivant les procédés d'oxidation, ou, pour mieux dire, suivant que le métal est présenté à l'oxigène dans un état plus favorable à la combinaison, et que celui-ci est plus libre ou moins puissamment engagé.

Ainsi, l'oxide noir de fer qui donne encore des signes de magnétisme, est bien moins chargé d'oxigène que celui qui est tenu en dissolution par l'acide sulfurique, et celui-ci bien moins que l'oxide que cet acide abandonne.

Ainsi, l'étain oxidé à la faveur d'une température un peu élevée, acquiert bien moins que celui qui est oxidé par l'acide nitrique; il prend, dans ce dernier cas, jusqu'à 0,4 de son poids.

Pour déterminer cet accroissement dans les circonstances les plus comparables, et qui fournissent le plus d'applications utiles, on s'est servi des expériences sur les précipitations des oxides métalliques par la soude.

La case du platine est restée vide, parce que l'on sait qu'il n'y a guère plus du tiers du métal précipité, le surplus passant à l'état de sel triple.

On pourra dans la suite établir une autre échelle de cet accroissement de poids, en prenant pour base la mesure du gaz hydrogène dégagé pendant la dissolution d'une quantité donnée de métal, par exemple dans l'acide muriatique, n'étant pas possible de douter que ce gaz ne soit dans une proportion correspondante à l'eau décomposée, et par conséquent à l'oxigène pris par le métal. En appliquant ce principe aux expériences de *Bergmann* sur le fer ductile et son oxide noir, on verrait, par exemple, que les quantités d'oxigène qu'ils prennent pour être tenues en dissolution, peuvent différer dans le rapport de 61 à 3.

Mais les observations n'ont pas été jusqu'à présent assez multipliées, ni faites avec assez de précision, pour les encadrer dans un tableau qui ne doit offrir que des faits bien vérifiés.

La neuvième colonne, sous le titre d'*acidification*, fait connaître ceux des métaux qui passent à l'état d'acide. On a cru devoir y comprendre l'argent et l'étain. Quelques phénomènes mieux observés en augmenteront encore probablement le nombre.

La dixième colonne indique la *vitrescibilité*, ou, pour mieux dire, la couleur propre au verre que donne chacun des oxides métalliques qui sont assez fixes pour subir la vitrification.

On a rapporté dans la onzième l'ordre de leur *affinité avec les acides.*

Leur *couleur en état de prussiate*, fait le sujet de la douzième.

Enfin, dans la treizième, ils sont comparés par les rapports de leur *adhésion au mercure*, déterminés par la différence des forces employées pour les en séparer lorsqu'ils ont été mis en contact, toutes choses étant d'ailleurs égales. La correspondance de ces rapports avec les forces d'affinité dans l'amalgamation, leur donne un degré d'intérêt qui ne permet pas de les négliger dans la série des caractères des diverses substances métalliques. L'opinion assez générale que le platine n'est pas mouillé par le mercure, fera peut-être remarquer avec surprise qu'il occupe ici le sixième rang, c'est-à-dire qu'il précède l'antimoine, le cuivre et même le zinc; mais il sera facile de vérifier l'observation, et ce sera un nouvel avertissement de se défier des apparences. Ce degré d'adhésion annonçait dissolubilité; j'ai fait voir qu'en effet on obtenait un véritable amalgame en relâchant l'agrégation des parties du platine, par l'élévation de température.

Quoique ce tableau, rédigé pour les élèves, ait été mis à leur disposition, on croit devoir en différer l'impression, pour lui donner le degré de perfection dont il est susceptible.

On en usera de même à l'égard d'un autre tableau destiné à présenter la division générale des eaux en neuf classes, les agens chimiques connus sous le nom de *réactifs*, qui servent à leur essai, et les phénomènes

caractéristiques par lesquels ils en découvrent la nature. Il est suivi d'un manuel d'analyse approprié aux substances de cet ordre.

On a tiré du cabinet de l'École les genres, les espèces et les variétés principales pour en faire saisir les caractères extérieurs ; quelques expériences fondamentales ont servi à en démontrer les principes constituans et les propriétés. Cette exposition a toujours été terminée par la description des travaux que leur fouille nécessite, des ateliers où on leur fait subir différentes préparations, et des arts qui les emploient. Enfin, le travail des élèves, dans leurs laboratoires particuliers, a été successivement dirigé vers des opérations analogues au sujet des démonstrations, et jugées les plus propres à remplir le double but de les exercer à la pratique, et de leur apprendre à interroger eux-mêmes la nature, et à asseoir leur jugement sur leurs propres observations.

Une revue générale et rapide de tous les objets parcourus pendant la durée du cours, a amené, à la séance de clôture, quelques réflexions dont elle avait préparé l'impression.

Quelle étonnante variété d'espèces ! Que de propriétés, et par conséquent que de richesses ! Combien restent inconnues ! combien restent sans application ! C'est à la chimie à les découvrir, c'est par elle que nous pouvons en acquérir la possession.

Mais, dans cet immense magasin, que trouvons-nous en dernier résultat ? C'est ici que la science s'élève à mesure que les phénomènes disparaissent, ou se trouvent ramenés à de plus simples élémens.

1.° Une matière essentiellement expansible, qui pénètre tout, qui tend continuellement à l'équilibre, quelquefois enchaînée, quelquefois s'écoulant presqu'insensiblement, quelquefois débordant comme un torrent : c'est le CALORIQUE.

2.° Les traces continues de l'action d'une puissance qui attire, qui assemble, qui solidifie toutes les parties de la matière, qui résiste quelquefois, et à un certain point, même à l'action expansive du calorique ; qui tour-à-tour agrège et rompt l'agrégation pour produire d'autres unions ;

qui s'affaiblit par la distance; qui croît à l'approche; qui serait incommensurable dans le contact absolu; qui se compose de plusieurs tendances, dont l'effet isolé est nul, dont l'effet simultané est efficace; l'ATTRACTION, qui, suivant l'objet de nos spéculations, devient *gravitation*, *adhésion*, *cohésion*, *agrégation*, *affinité*, et qui, sous le nom d'*affinité*, se présente à notre esprit comme la cause immédiate des trois grands phénomènes de la nature et de l'art, la *dissolution*, la *cristallisation*, la *précipitation*.

3.° L'OXIGÈNE, cette substance qui échappe à nos regards, mais non pas à nos balances; qui est le plus habituellement dans l'état gazeux; qui est susceptible de se fixer; qui ne perd et ne reprend l'état élastique qu'en exprimant ou absorbant du calorique.

4.° CINQ TERRES bien connues par des propriétés caractéristiques.

5.° QUATRE ACIDES, dont on n'a pu séparer les radicaux.

6.° VINGT-SIX COMBUSTIBLES, ainsi nommés parce qu'ils peuvent s'unir à l'oxigène, et que, dans l'acte de cette combinaison, une portion de calorique est mise en liberté.

Voilà cependant tous les matériaux dont est composé le globe, du moins à la profondeur connue; car les corps les plus denses comme les plus légers, les plus durs comme les plus tendres, les solides et les fluides, les cristaux de toute forme, les pierres de toute couleur, les sels de toute saveur, tous les acides du second ordre se résolvent dans quelques-uns de ces principes, et il y a déjà beaucoup de probabilité que les deux alcalis fixes subiront à leur tour la même décomposition que le volatil.

Nous sommes donc conduits à admirer comment un si petit nombre d'élémens suffit à la production de tant d'êtres divers; ce sentiment est une jouissance pour celui qui est parvenu à ce résultat par une étude approfondie des œuvres de la nature; il agrandit la carrière de l'art par l'espérance de voir naître à l'infini des corps nouveaux de la seule variété des combinaisons : mais nous devons nous garder de le transformer en système, de manière à considérer le nombre de ces élémens comme arrêté. Telle substance est réputée simple, que des expériences nouvelles feront effacer de cette liste; d'autres seront découvertes, qui mériteront

d'y être inscrites : c'est ainsi que le jargon et l'hyacinte nous donnent une sixième terre qu'il paraît difficile d'identifier avec celles qui ont été admises jusqu'à présent.

Que devons-nous en conclure ? Qu'il faut poursuivre nos recherches sans nous embarrasser si elles nous conduiront à ajouter ou à réduire ; la science y gagnera également, parce que c'est la vérité qui en fait la richesse.

L. B. GUYTON.

SUITE DU COURS PRÉLIMINAIRE RELATIF AUX ARTS DE DESSIN.

QUATRIÈME LEÇON.

DE L'APPARENCE DES CORPS.

De quelqu'ordre que soient nos pensées, toujours elles correspondent à l'action de quelques-uns de nos sens; ce sont eux qui mettent en activité l'intelligence, par la communication qu'ils établissent entr'elles et les objets extérieurs. Pour prouver cette vérité, supposons un être de l'espèce humaine privé des sens de l'odorat, du goût, du toucher, qui serait aveugle, qui serait sourd et par conséquent muet, cet être ne pourrait se faire l'idée de rien, le germe de son intelligence resterait sans action comme sans effet, il serait au-dessous des animaux, des plantes même, qui dans leur classe et selon leur nature, sont ce qu'elles doivent être.

On ne peut donc nier que des sensations ne précèdent toujours des pensées et ne soient la condition nécessaire à leur manifestation sensible.

Mais de ce que nos sens sont les organes de nos pensées, il ne s'ensuit pas qu'ils en soient le principe; car si l'intelligence ne s'emparait pas des divers rapports des sens, pour les combiner à son goût, pour en composer les idées qu'elle se fait des objets, ces objets n'existeraient pour l'homme que comme ils existent pour les animaux, qui en ont bien la sensation, mais qui n'en ont pas la connaissance.

En effet, l'animal éprouve la sensation du feu, sans que le plaisir qu'il en ressent l'invite à chercher les moyens de le conserver; il entend les sons de la parole, les accens de la musique, sans en apprécier la signification, il voit le ciel, il parcourt la terre, sans examiner ni l'un ni l'autre, sans devenir astronome, peintre, ni géographe.

Je ne m'arrêterai pas long-temps sur ces observations, parce qu'elles n'appartiennent qu'indirectement à mon sujet; il me suffit d'avoir observé que si les sens sont les organes des pensées, ils n'en sont pas le principe; ils activent l'intelligence, mais ils ne la produisent point; ils en développent le germe, mais ils ne lui donnent pas l'existence.

Nous rappellerons un peu plus tard cette observati n importante, qui aura son application quand nous tâcherons de découvrir les règles du vrai beau.

De ce que nos pensées correspondent toujours à des sensations, de ce que c'est par cette voie seule que notre intelligence peut commencer, croître et s'enrichir, il suit que l'art de multiplier les sensations, d'en comparer les résultats, de les classer, de les rapprocher, de les étendre, est le véritable, le premier moyen d'instruction, celui qui, bien ou mal dirigé, produit les vérités ou les erreurs dont se composent les connaissances que l'homme acquiert par l'observation, qu'il conserve par la mémoire, qu'il combine par l'imagination.

Ces connaissances correspondent dans leurs diverses parties à l'action des différens organes, ce qui donne naissance à toutes les spéculations sur lesquelles s'exerce l'intelligence de l'homme; à l'étude et à la pratique de tous les arts et métiers, à l'exécution de tous les travaux.

Mon objet est de vous parler seulement de ce qui tient au sens de la vue, de vous apprendre à connaître et à représenter l'apparence des corps, qui n'existent pour les yeux que sous le rapport des formes et des couleurs.

Cependant, avant de toucher ce point, je parlerai succinctement de la manière dont les divers sens agissent sur l'ame, parce qu'en comparant ces différentes actions, nous apprendrons à connaître le champ de l'intelligence humaine, et la diverse culture qu'il doit recevoir.

J'ai observé que les objets n'existent pour nous que par les rapports qu'ils ont avec nos sens, que par la manière dont ils agissent sur eux. Ainsi le sens du toucher sert à estimer leur pesanteur, leur élasticité, leur degré de chaleur, de froid, de polissure, de rudesse, de solidité, de liquidité, &c.

Le sens de l'odorat les distingue par la manière différente dont il en est affecté, par leur action bonne ou mauvaise, par leur convenance ou leur disconvenance avec lui.

Le palais sert à connaître leur saveur et à les apprécier principalement comme convenables ou non à nous servir d'alimens. Ces trois sens, quoique plus physiques que les deux qui nous restent à examiner, s'allient pourtant quelquefois à des connaissances moins matérielles, comme quand les chimistes, pour distinguer quelques propriétés d'une substance, interrogent le palais et l'odorat, et indiquent, pour les faire connaître, l'impression qu'elles produisent sur ces organes. Ces cas sont rares.

Les objets agissent sur l'organe de l'ouïe, qui nous sert à les distinguer par les sons qui leur sont propres; ainsi nous apprécions par ce moyen la nature d'un corps, nous calculons sa proximité ou sa distance, ses rapports bons ou mauvais avec nous.

Voilà les effets généraux du sens de l'ouïe. Mais il en a de plus importans pour l'homme; car tandis que les trois organes précédens n'établissent presque jamais, comme je viens de le dire, entre l'homme et les objets extérieurs, que des rapports matériels, celui-ci, indépendamment de cette propriété, fait sentir à l'ame toutes les merveilles du chant et de l'harmonie, tous les charmes de l'éloquence et de la conversation; il fait naître entre l'homme et son semblable la communication la plus simple de leurs pensées réciproques; il correspond directement avec l'intelligence, et devient ainsi le moyen le plus puissant de réunion parmi les hommes. C'est peut-être pourquoi le sens de l'ouïe est celui de tous dont la privation est la plus fâcheuse, en ce qu'il prive l'homme des charmes de la société, l'isole au milieu de ses semblables, lui enlève une jouissance plus douce que celle du spectacle de la nature, et des perfections visibles des objets. C'est peut-être aussi pour cette raison que les sourds sont ordinairement plus tristes que les aveugles.

Le sens de la vue, qui est celui dont nous devons nous occuper plus particulièrement, nous sert à connaître la forme et la couleur des corps, leurs dimensions, leur distance, ainsi que tous les phénomènes de la lumière qui les rend sensibles. Le toucher peut bien déjà servir à connaître les objets, mais seulement sous le rapport de la forme, et quand ils sont avec nous en contact immédiat; la vue par les images qu'elle en reçoit, les touche comme s'ils étaient près, les atteint malgré la distance, les rapproche et les unit à l'ame, comme s'ils étaient en elle-même.

Ce

Ce sens peut bien aussi rappeler des idées correspondantes aux autres sens, comme quand la vue d'un fruit en rappelle la saveur, celle d'une fleur en rappelle l'odeur, comme quand la vue d'une partition d'opéra en fait pressentir le chant et l'harmonie. Ces effets tiennent aux merveilles de la mémoire et de l'imagination. J'ai indiqué, à l'article de la composition des tableaux, comment la peinture pouvait se servir de cette correspondance des autres sens à celui de la vue, pour augmenter l'effet de ses moyens propres, en multipliant les sensations qu'ils peuvent faire naître.

Les objets n'ont que deux manières d'agir sur l'œil : leur forme et leur couleur. A cet égard j'observerai que nous ne pouvons concevoir séparément ces deux modifications que par la pensée ; car un objet ne peut nous offrir sa forme, sans nous offrir en même temps sa couleur ; et *vice versâ*. Ces deux propriétés, qui déterminent la manière dont les objets existent relativement aux yeux, sont tellement inhérentes l'une à l'autre, que l'on ne peut anéantir l'une que l'autre ne le soit également. Cependant les artistes sont si accoutumés à les considérer séparément, que plusieurs ayant des idées saines et étendues sur l'une des deux parties, n'ont eu dans l'autre que des connaissances très-bornées, et quelquefois fausses. Je ne parlerai pas des sculpteurs, qui ne s'occupent ordinairement que de la forme des corps : mais parmi les peintres, il y en a qui ont excellé dans le dessin, et qui ont ignoré l'art du clair-obscur ; d'autres qui étaient (comme on dit) habiles *coloristes*, et ont été médiocres dessinateurs. Cependant la sensation était la même relativement à ces deux propriétés réunies ; mais le jugement qui en étudiait les lois, qui en faisait l'application, appréciait mieux l'une que l'autre. D'après cette observation, je pourrais déjà rappeler ce que j'ai dit en commençant cet article, que si les sens apportent à l'ame l'impression des objets, c'est elle seule qui les juge, et qui les connaît bien ou mal, selon la qualité bonne ou mauvaise de ses jugemens.

Mais pour revenir à mon sujet, sans examiner si dans la peinture, le talent du coloriste et celui du dessinateur peuvent se réunir, ou s'ils s'excluent mutuellement, nous allons présenter quelques réflexions sur la manière dont les divers objets de la nature paraissent à la vue, sous les deux rapports de la forme et de la couleur. Nous nous occuperons de la forme dans cette séance, et des couleurs dans la suivante.

De la Forme.

Les formes de tous les corps de la nature, malgré leur innombrable variété, ne sont jamais engendrées que par deux lignes, la ligne droite et la ligne courbe. La ligne droite est une, les géomètres la définissent : le plus court chemin d'un point à un autre; mais elle est aussi l'emblème de la stabilité, celle qui mesure l'autre, et qui en fixe les continuelles variations : car tandis que la ligne droite se prolonge toujours pour produire son effet, et n'a qu'une manière d'être, qu'une direction que suit la lumière, le son, la pensée, l'autre, au contraire, a une infinité de manières d'exister; elle se replie sur elle-même, elle tournoie en tous sens, elle borne la première dans ses effets, et ne peut être réglée que par le diamètre qui la mesure, que par le centre auquel elle correspond. Mais dans les corps, leurs formes appartenant à une prodigieuse multitude de centres, il est impossible d'en faire la représentation avec le compas, et l'on ne sait ce qu'il faudrait admirer le plus, de la folie ou de la patience d'un artiste qui entreprendrait de dessiner une figure humaine en en traçant au compas toutes les parties circulaires, après avoir cherché tous les centres de ces parties.

La ligne droite, dans sa définition vraie d'être le plus court chemin d'un point à un autre, a pourtant différentes manières d'être, d'après lesquelles on peut la considérer : car elle peut être, ou perpendiculaire, ou horizontale, ou bien inclinée en autant de lignes qu'on en peut supposer entre les deux angles droits que forment dans leur intersection la perpendiculaire et l'horizontale.

De sa combinaison avec la ligne circulaire naît la forme de tous les corps, la physionomie qui les distingue, et leur donne leur apparence propre. L'art de combiner ces deux lignes pour exprimer l'apparence des corps, quelque moyen que l'artiste emploie, est ce qu'on peut appeler l'*art du dessin.*

Pour apprendre à représenter convenablement les formes des différens corps, il faut comparer ces formes entr'elles, il faut les connaître par leurs différences, apprécier les rapports respectifs de leurs parties, enfin les prononcer avec justesse dans l'ensemble et dans les détails. Cet art demande une

longue pratique ; il suppose l'habitude d'observer la nature, et d'en imiter les formes, selon le caractère propre à chaque objet. Cet art devient alors une sorte d'écriture dont l'artiste se sert pour rendre ses pensées ; et ce genre d'écriture a l'avantage d'être d'une facile intelligence, parce qu'il se compose des caractères de la nature, lesquels sont les mêmes dans tous les temps et dans tous les pays.

De même que l'écrivain a soin de former avec précision les lettres de son alphabet ; car sans cette précaution indispensable, on ne pourrait concevoir le sens de ses paroles, et son écriture serait inintelligible ; de même aussi le peintre doit imiter avec précision l'apparence des objets qu'il représente, afin de les faire connaître sans équivoque, afin de faire apprécier les nuances qui les distinguent d'une manière souvent peu prononcée, et presqu'imperceptible.

Cette qualité dans l'artiste est ce qu'on appelle la *correction du dessin.*

Mais la correction du dessin ne peut guères s'appliquer qu'à des objets qui en sont susceptibles, et qui sont eux-mêmes corrects : or dans la nature telle qu'elle s'offre souvent aux yeux, la plupart des objets altérés ou indécis dans leur forme, n'offrent aux yeux que des caractères effacés ; l'artiste n'y retrouve qu'avec peine l'empreinte primitive qui les distingue, et c'est de-là que provient pour lui la nécessité de choisir parmi ces objets, afin que les caractères de son alphabet, mieux formés, aient un sens plus clair et plus énergique.

C'est ce qui a donné lieu à ce précepte si connu, que l'artiste doit imiter la belle nature.

Nous n'avons encore dit que quelques mots sur la forme, et déjà nous avons parlé de la beauté ; déjà nous avons senti la nécessité de la définir, afin que l'artiste apprenne à fixer les idées incertaines qu'il pourrait s'en former, en considérant les usages des différens peuples, les variations de la mode, les caprices d'un faux goût.

Rien n'est plus bizarre en effet que les opinions qu'en ont eu les hommes, soit dans son ensemble, soit dans ses détails. C'est sur-tout parmi les nations les moins civilisées, que ces singularités sont plus remarquables ; la bizarrerie du goût de ces peuples, annonce la confusion de leurs idées, et fait assez connaître le penchant naturel de l'homme à tout brouiller, quand son esprit marche

sans frein ni loi, au gré d'une imagination inculte ou pervertie. Sans parler de leurs usages civils ou religieux, nous examinerons seulement ce qui a rapport au physique et ce qui tient à leurs opinions sur la beauté.

Les anciens habitans de la Guianne regardent la longueur du cou comme une difformité monstrueuse; en conséquence ils travaillent de bonne heure à le faire rentrer dans la poitrine, de manière à ce que les yeux paraissent être à la hauteur des épaules. La plupart des Indiens du Pérou, des nègres du Brésil, se percent le nez, les narines, les lèvres, les joues, pour y passer des os de poisson, des plumes d'oiseau, d'autres y passent seulement des aiguilles, ainsi qu'à la peau des yeux, ou des anneaux fort grands qui leur entourent la bouche. Les Omaguas aplatissent le visage de leurs enfans en le serrant entre deux planches; ils se font au lobe de l'oreille un trou prodigieux, qu'ils remplissent d'un gros bouquet de fleurs ou d'herbes. Cette fantaisie de grandes oreilles est commune à presque tous les peuples de l'Orient. Les Hottentots écrasent le nez de leurs enfans, prétendant qu'un nez proéminent est une insupportable difformité.

Leurs femmes se noircissent tout le corps en se couvrant de graisse et de suie. Les habitans de Nicobar se barbouillent le visage de jaune et de vert, et peignent en gros rouge les cheveux de leurs enfans.

Les Arabes des déserts, et certaines femmes d'Afrique, se peignent le menton et les lèvres avec une couleur bleue qui est ineffaçable ; ils dessinent avec la même couleur, une multitude de formes bizarres sur tout leur corps.

Les Mogolles se découpent la chair en fleurs, à la manière dont on applique les ventouses; elles peignent ces fleurs avec différens jus de racine, ce qui donne à leur corps l'apparence d'une étoffe de nos manufactures.

Les Tunquinois et les Siamois se noircissent les dents avec une espèce de vernis, prétendant qu'il ne convient pas à des hommes d'avoir les dents blanches comme des animaux. Chaque année ils sont contraints à l'abstinence pendant plusieurs jours qui sont indispensables, pour donner à ce vernis le temps de pénétrer la substance des dents.

Mais l'une des plus bizarres coutumes de ces peuples sauvages, est celle des nègres de la nouvelle Guinée, qui se traversent les deux narines par une espèce de cheville, de la grosseur du doigt, longue d'environ quatre pouces, en sorte que les deux bouts touchant à l'os des joues, ne doivent

laisser paraître qu'un petit morceau du nez. Quant aux oreilles, ils les traitent de même, et y font passer des chevilles encore plus grosses.

Au reste, ces usages bizarres ne font qu'ajouter à la laideur naturelle de ces différens peuples ; au moral comme au physique, ils paraissent n'avoir avec la perfection aucune affinité, et la nature marâtre à leur égard, semble les traiter, sous tous les rapports, en enfans disgraciés. Comment leurs coutumes pourraient-elles faire loi en matière de goût? leurs yeux étant gâtés par l'aspect de leur propre forme, ils ne pourraient arriver au sentiment de la beauté que par des efforts d'esprit qu'ils sont loin de pouvoir faire, et qu'en surmontant des préjugés que l'habitude et l'ignorance ont rendus ineffaçables.

Au nord de l'Europe et de l'Asie, on rencontre des peuples qui ne diffèrent entr'eux que par le plus ou le moins de laideur: ce sont les Lapons, les Samoïèdes, les Borandiens, les Groënlandais, les Esquimaux, &c. ils ont tous le visage large et plat, le nez écrasé, les paupières tirées vers les tempes, la bouche très-grande, les lèvres très-épaisses, les joues extrêmement élevées, la tête grosse et courte, la voix grêle. Ils sont petits, maigres et trapus, la plupart n'ont que quatre pieds de haut, ou au plus quatre pieds et demi.

Les divers peuples de la Tartarie ne sont pas plus beaux; mais les Tartares calmuques sont les plus laids et les plus difformes des humains. Ils ont le visage si plat et si large, que d'un œil à l'autre il y a l'espace de 5 à 6 doigts; leurs yeux sont extrêmement petits, et leur nez si plat, qu'on n'y voit que deux trous au lieu de narines; ils ont la mâchoire supérieure enfoncée, et l'inférieure fort avancée; leurs genoux gros et épais sont tournés en-dehors, et leurs pieds en-dedans. Leur nourriture est aussi sauvage que leur aspect.

Vers le détroit de Davis, les habitans ont, comme les Lapons et les Samoïèdes, la taille petite, le teint olivâtre, les jambes courtes et grasses.

Les sauvages de la terre de Labrador, et ceux de la baie d'Hudson, ont le visage et le corps presqu'entièrement couverts de poil, leur visage est large et plat, leurs yeux gros, leur nez très-camus.

Les habitans de la nouvelle Hollande, plus hideux que les précédens, augmentent encore leur laideur naturelle, en s'arrachant, hommes et femmes, les deux dents de devant de la mâchoire supérieure. Ils ont les paupières à

demi fermées par habitude et par goût, autant que par le besoin de se garantir des moucherons.

Les Papous, ainsi que les habitans de la nouvelle Guinée, ont les lèvres épaisses, le nez large et plat, les cheveux crépus, les dents noires, le visage extrêmement laid et désagréable. Leurs femmes, avec d'aussi vilains traits, ont de plus le ventre fort gros, les jambes et les cuisses très-menues, et les mamelles extrêmement longues.

La plupart de ces sauvages, paresseux, superstitieux, ignorans, sont cruels et farouches. La raison n'explique aucun de leurs usages, le caprice les dirige seul; aussi étrangers aux idées du bon qu'à celles du beau, ils confondent également ce qui tient au goût ou à la morale; la plupart sont voleurs, insociables, d'une débauche effrénée; et l'on remarque en eux la même disparate au moral, que présente au physique la couleur de leur peau, la forme et la proportion de leurs membres.

Parmi les Naïres ou nobles de Calicut, il y a une espèce d'hommes qui ont les jambes aussi grosses que d'autres ont le corps. Quelques-uns n'ont qu'une jambe ainsi faite, d'autres les ont toutes deux. A Ceylan on retrouve de ces hommes à grosses jambes; ils s'en font un titre de gloire, et d'ailleurs ils n'en sont pas moins forts et dispos.

Gemelli Careri assure qu'à Mindora, près Manille, il existe une race d'hommes appelés *Manghiens*, qui tous ont des queues de 4 à 5 pouces de long, formées par le prolongement du coccix; quelques-uns de ces hommes ont embrassé le catholicisme. *Struys* assure avoir vu, dans l'île Formose, au nord de Manille, un de ces hommes à queue, en ayant une de plus d'un pied de long, couverte d'un poil roux, et fort semblable à celle d'un bœuf. Cet homme à queue assurait que ce défaut (si c'en était un) venait du climat, et que tous ceux de la partie méridionale de cette île, avaient des queues comme lui. *Struys* dit avoir vu dans ce même pays, des femmes qui ont de la barbe autant que les hommes.

Les femmes naturelles du Cap ont une difformité bien plus hideuse encore; selon *Jean Owington*, il leur croît au-dessus de l'os pubis, une espèce de peau dure et large, qui descend, en forme de tablier, jusqu'au milieu des cuisses. *Thevenot* en dit autant des femmes Égyptiennes; mais, selon lui,

elles brûlent cette excroissance monstrueuse avec des fers chauds, ce qui l'empêche de recroître (1).

Les Chinois, les Japonnais, les Mogols, les Nubiens, les Éthyopiens, les Guèbres, les Persans, ne sont guères moins difformes que les différens peuples de l'Afrique et de la Tartarie, dont je viens de parler ; ce qui diminue leur laideur, sur-tout parmi les plus relevés d'entr'eux, c'est qu'ayant de la beauté les mêmes sentimens que nous, ils achètent chèrement les belles femmes de Circassie, de Mingrelie, de Géorgie, et des îles de l'Archipel, dont ils obtiennent des enfans moins laids que leurs pères.

J'aurais pu m'étendre davantage sur les usages et la forme de ces différens peuples; mais j'en ai dit assez pour faire connaître leur ignorance et leur dépravation.

Les fausses idées de ces peuples sur la beauté, tenant en partie à leur naturelle difformité, ne doivent pas faire conclure que la beauté n'existe point; elles prouveront plutôt que ces hommes mêmes en ont le désir, sinon la connaissance; et, malgré la dépravation de leur goût, nous reconnaîtrons qu'ils la cherchent constamment, et se contentent de leurs recherches, en croyant l'avoir obtenue.

Pour nous que de meilleurs exemples et des efforts plus heureux ont plus rapprochés d'elle, nous espérons la mieux définir; nous tâcherons de la représenter sous des traits qui lui seront moins étrangers, et auxquels elle ne dédaignera pas de se reconnaître.

Nous ne nous dissimulons pas les difficultés qui existent pour traiter ce point délicat; tous ceux qui ont des prétentions à la beauté pour eux-mêmes ou pour ce qui leur plaît, la voudront voir définie à leur manière et jetée dans le moule qui leur convient. Les artistes exigeront que je la représente selon l'idée qu'ils en ont et qu'ils en veulent donner dans leurs ouvrages. Cependant le doute et l'opposition de leurs sentimens à cet égad, déposent déjà contr'eux; ils prouvent évidemment qu'ils n'ont pu remonter jusqu'au vrai principe du beau, et réussir par son moyen à fixer l'incertitude de leurs

---

(1) J'aurais pu omettre ces faits, dont quelques auteurs contestent la vérité; je me dispenserai du moins d'en citer beaucoup d'autres plus merveilleux, et par conséquent moins croyables, quoiqu'ils soient confirmés par d'illustres et anciens témoignages, tels que ceux de *Pline*, *Eudoxe*, *Strabon*, *Pomponius Méla*, &c.

recherches. Je vais tenter cette délicate entreprise; mais ce qui peut me faire espérer quelques succès, c'est que je prouverai aux hommes qu'ils en ont tous l'idée en eux-mêmes; que par un instinct secret, ils cherchent la beauté dans les productions de la nature, comme dans celles de leur intelligence; et que, bien ou mal connue, elle est l'objet de leurs recherches constantes, comme de leur juste admiration.

Je puis, en passant, rappeler de nouveau ce que j'ai dit au commencement de cette séance, que les sens peuvent bien être les organes de la pensée, mais qu'ils n'en sont pas le principe. En effet, ce ne sera point eux que nous interrogerons pour connaître la perfection des objets, ils en reçoivent l'impression et n'en jugent pas; et s'ils font connaître à l'homme quelques vérités, ils sont aussi pour lui la voie de l'erreur et du mensonge. Ainsi n'espérons pas qu'ils nous apprennent à connaître la beauté, n'en cherchons le type qu'en nous mêmes, notre ame seule est capable d'en trouver, d'en suivre la trace, et d'en représenter l'image après l'avoir conçue.

Pour pouvoir être compris sur la matière délicate que je vais essayer de traiter, je demande un peu d'attention, je n'en abuserai pas long-temps, et je tâcherai qu'elle ne soit pas infructueuse.

De la Beauté.

Le principe particulier qui anime tous les corps et qui leur donne l'existence, quand il agit régulièrement et selon sa loi, soit au moment de la formation du corps, soit dans le cours de sa durée, manifeste et conserve en lui la forme qui lui est propre, toute la perfection dont il est susceptible. L'homme a le sentiment de cette perfection : voilà pourquoi, à la première vue et comme involontairement, il prononce sur tous les objets qui s'offrent à ses regards, soit verbalement et d'une manière sensible, soit intérieurement et par un acte de sa pensée.

Ainsi nous disons une belle ou une laide femme, un beau ou un vilain cheval, un animal, un arbre beau ou laid; et de même, pour les paysages, pour les édifices, pour tous les objets de la nature et de l'art. Nous distinguons aussi par leurs détails, les parties de ces divers objets, que nous séparons de l'ensemble, pour en déterminer les qualités ou les imperfections : comme quand

quand nous disons, cette femme n'est point belle, mais elle a de beaux yeux; elle a une laide taille, mais de belles mains; cet arbre n'est point beau, mais ses fleurs sont belles, &c., &c.

Toutes ces manières de parler annoncent un jugement qui se fait en nous, par lequel nous classons les objets sous le rapport de leur beauté ou de leur laideur, de leur perfection ou de leur imperfection. Ce jugement peut être vrai ou faux; mais sa fausseté même annonce qu'il pourrait être vrai, et que l'homme peut prétendre, avec des efforts plus heureux ou mieux dirigés, à obtenir des résultats plus conformes à la vraie nature des choses. Cependant des philosophes ont pensé que ces jugemens n'ont aucunes bases; que la beauté n'est que relative, et que le même objet plaisant ou déplaisant à telle ou telle époque, dans tel ou tel pays, ce qu'un homme trouve admirable et ravissant, pouvait bien laisser un autre homme froid et indifférent. Dans cette hypothèse, ceux qui nient l'existence de la beauté, s'engagent aussi à nier l'existence de la laideur, et se trouvent par-là en opposition avec le langage et les habitudes de tous les peuples. Nous n'adopterons pas leur sentiment, et nous allons en donner les motifs. L'incertitude des opinions sur la beauté nous paraît tenir à trois causes: 1.° quelquefois à l'imperfection des organes, mais plus souvent à celle du jugement qui peut être altéré par des préjugés ou des habitudes; 2.° à ce qu'on a voulu établir la discussion, à l'égard de la beauté, sur des êtres qui, étant trop éloignés du premier anneau de la chaîne et du vrai principe de la perfection, ne manifestent que des traits effacés et difficiles à saisir; comme quand on a cherché les règles de la beauté dans des objets morts et inanimés, et qui ne sont pas susceptibles d'en présenter le type d'une manière prononcée et sans indécision; 3.° lorsque l'homme a voulu l'étudier dans les objets qui pouvaient lui en retracer l'image d'une manière plus précise, quand il l'a cherchée dans les êtres de son espèce; le jugement qu'il en a porté, a dû nécessairement varier par l'effet des préjugés et des habitudes, par les différentes impressions étrangères qui ont modifié ses opinions, et l'ont de nouveau livré à l'incertitude. En effet, une femme, pour celui à qui elle plaît, a d'autres moyens de séduction que ceux de son visage et de sa stature; et si quelques défauts peuvent lui être reprochés à cet

égard, ce n'est pas à celui qu'elle enchaîne par l'amabilité de son caractère et les grâces de son esprit, qu'il faut s'adresser pour les reconnaître ; mais si sa beauté est parfaite et son esprit médiocre, si son humeur aigre et dédaigneuse répond mal aux charmes de son visage, ce n'est pas de ceux qui ont à se plaindre de ces défauts, qu'on obtiendra les éloges que mériterait sa beauté.

La difficulté consiste donc à considérer la beauté indépendamment de ce qui peut influer sur elle, et sans que son effet soit contrarié par des impressions qui lui sont étrangères, et qui s'opposent à ce qu'on la reconnaisse aux signes qui lui sont propres.

Cette idée abstraite de la beauté est indispensable à l'artiste, parce qu'il doit la connaître en elle-même et indépendamment des qualités accessoires qui la suppléent ; parce que l'art n'ayant que des moyens bornés pour produire les effets puissans de la beauté, s'il méconnaît ceux qui lui sont accordés, il reste trop au-dessous d'elle, il ne peut la faire admirer dans ses ouvrages.

Avant de la définir sensiblement, et de la démontrer pour ainsi dire aux yeux, présentons-la à la pensée, indiquons quelques-uns de ses effets, et l'opinion que les hommes en ont eue dans tous les temps.

L'idée de la beauté peut s'appliquer à tout ce qui existe dans la nature : un objet nous paraît beau, quand notre imagination ne peut rien y ajouter, ni en retrancher rien ; quand nous lui reconnaissons une convenance précise avec les propriétés que nous lui trouvons, et d'après les rapports qu'il a avec d'autres objets. Mais quoique la beauté existe pour nous dans tous les objets de la nature, elle nous touche bien plus vivement dans les êtres de notre espèce, par les nombreux rapports qui existent entre eux et nous, par les douces impressions, par les transports ravissans qu'elle fait éprouver à notre ame, quand les sens lui en offrent l'image.

La beauté est, de toutes les qualités naturelles, après l'esprit, celle qui se sent le mieux, et se définit le moins : elle est comme la pensée, le génie, la lumière ; on en jouit, on en éprouve les effets, sans la définir, sans chercher, que bien rarement, à en connaître le principe. *Platon* mettait au premier rang des dons de la nature, la supériorité de l'intelligence, mais la beauté venait en second ; il la préférait de beaucoup aux

autres avantages de la fortune, de la naissance, de la force, &c. « Si la » jeunesse, disait-il, qui a déjà la beauté en partage, avait aussi la prudence, » il faudrait lui élever des autels ». La beauté avait des temples chez les Grecs, qui l'adoraient sous différens noms : dans leur langue, ils n'ont qu'un même mot, *κόσμος*, pour exprimer, la beauté, l'ordre et l'univers. L'excellence qui distingue tous leurs ouvrages, tient sans doute à l'idée exquise qu'ils s'étaient faite de la beauté. On la retrouve dans leurs poësies, comme dans les monumens et les statues qui nous restent d'eux. Il convenait que les philosophes qui ont si bien parlé de la morale, les poëtes qui ont composé ces admirables écrits, les architectes dont les édifices serviront à jamais de modèles, fussent les contemporains des peintres et des sculpteurs excellens que la Grèce a produits. *Homère*, *Pythagore*, *Socrates*, *Platon*, *Æschille*, *Démosthènes*, *Sophocles*, *Euripide* devaient être les amis et les émules de *Phidias*, d'*Apollodore*, d'*Agasias*, d'*Agésandre*, de *Parrhasius*, de *Protogènes*, de *Zeuxis* et d'*Apelles.* Ce peuple ingénieux, pour faire aimer la sagesse, fondait son triomphe sur ses charmes; *Minerve*, fille du premier des dieux, était la plus belle des déesses, pour être aussi la plus puissante.

Parmi les institutions de l'ancienne Gaule, rien n'est plus intéressant que celle de la chevalerie; l'orgueil s'en est emparé depuis, pour en composer de vains titres, et des prétentions frivoles; mais elle dut son origine au sentiment de la beauté.

Les chevaliers, défenseurs nés du beau sexe, le respectaient autant qu'ils le chérissaient; ce n'est pas tout, ils devaient le défendre, ils devaient lui sacrifier leur vie; et l'amour de la beauté, qu'ils portaient jusqu'à l'enthousiasme, supposait naturellement en eux de la générosité, de la grandeur d'ame: cet enthousiasme élevait leur courage, il l'enflammait, et le faisait triompher.

C'est aussi dans la Gaule, que le droit de juger les différens, de terminer les procès, appartenait aux femmes. Si l'on ne doit pas croire que ce droit leur ait été accordé par une supériorité de prudence qu'elles n'ont pas coutume de montrer sur les hommes, c'est encore à la beauté qu'elles furent redevables de ce privilège.

Le culte de la beauté fut aussi en grand honneur chez une nation

autrefois fameuse, aujourd'hui affaiblie par la superstition et par l'or du Pérou. L'Espagne eut besoin des leçons d'un sage pour tempérer l'exagération de sa galanterie chevaleresque; *Cervantes* combattit cette exagération dans un roman ingénieux ; mais le héros de la Manche, malgré les bizarreries de son caractère, n'en est pas moins un homme plein de vertu, plein de courage, dont la folie porte par-tout l'empreinte d'une belle ame et d'un cœur généreux. L'auteur de cet admirable caractère, dans la leçon qu'il donne à ses contemporains, les honore en voulant les corriger : il n'a pu leur reprocher que l'excès d'un travers à la mode; et le ridicule qu'il répand sur les chevaliers de son siècle, en prouvant leur singulière exagération, prouve aussi leur loyauté franche et courageuse. Heureuse la nation chez qui la philosophie n'a pas d'autres vices à corriger !

Le sentiment de la beauté paraît être particulier à l'homme; il est l'un des caractères distinctifs de son espèce, il influe sur toute sa conduite, il détermine tous ses choix, il se fait remarquer dans toutes ses actions. Dans les besoins naturels qui rapprochent les animaux de différens sexes, nous ne voyons pas qu'aucune préférence fondée sur les idées du beau, influe sur leur choix; de ce qu'une biche est en rut, de ce qu'une chienne est en amour, elles sont, pour le cerf et le chien, les plus belles de toutes; mais chez l'homme, le sentiment de la beauté, bien ou mal défini, précède et dirige toute espèce de besoin physique; il s'allie à toutes ses actions, il s'exerce jusque sur des objets qui n'en présentent que des correspondances éloignées, jusque dans le choix de ses vêtemens, de leur forme, de leur couleur; jusque dans le choix, qui, parmi une grande quantité de fruits, nous détermine à préférer l'un à l'autre ; et les enfans dans une corbeille de cerises, choisissent jusqu'à la dernière. A la vérité, dans ces cas, la beauté du fruit est presque toujours l'indication de sa bonté ; mais s'il n'en est pas de même parmi nous, si ces deux qualités ne se trouvent pas toujours réunies dans le même individu, c'est cependant de leur union supposée qu'elles tirent leur plus grande force; la bonté n'a point tout son effet, quand elle est séparée de sa compagne, qui à son tour ne peut obtenir seule un triomphe durable.

Essayons de donner à cette observation toute l'évidence de la vérité.

Un être qui, comme l'homme, éprouve dans son ame intellectuelle des

sentimens et des désirs d'un ordre supérieur, ne peut arrêter aux formes extérieures seulement les idées qu'il se fait du beau. Cette perfection des formes est déjà bien précieuse sans doute, en ce qu'elle correspond à l'état de santé, dont les avantages sur la maladie ne sont contestés de personne. Cet état peut se définir, *l'aptitude qu'a le corps de jouir de la plénitude de ses facultés.* Par cette correspondance avec la santé, la beauté nous offre bien un moyen de la reconnaître; mais ce moyen, qui s'applique à tous les animaux, ne peut lui convenir que relativement à son corps; pour l'homme, il est un autre genre de beauté, dont le siége est principalement sur le visage; celle-là se peut définir, l'*aptitude à représenter facilement et sans équivoque les traits de l'intelligence et ceux des affections d'une ame bien réglée.* Alors la beauté devient l'emblême de l'esprit et de la vertu; elle mérite l'épithète de *divine*, et l'admiration qu'elle commande devient légitime et incontestable.

Qu'on ne croie pas imaginaire ce rapport du bon et du beau; c'est l'opinion qu'en ont eue les hommes de tous les temps, c'est celle que chacun de nous en porte en lui-même, comme je vais essayer de le démontrer.

La beauté correspond tellement à la vertu, que sur un ame honnête son effet ne peut se produire, si l'expression de la vertu ne vient l'embellir et la compléter. Un visage qui attirerait par ses charmes, si on y découvre l'apparence du vice, devient repoussant, et la corruption de l'ame, qui ne peut se cacher, fait perdre à la beauté tout son attrait; mais quand elle est innocente et pure, elle plaît par cette apparence même, elle en prend un nouvel éclat, et sa puissance s'augmente de toute celle de la vertu.

Veut-on supposer un être malheureux, ce serait l'homme délicat et sensible qui, dans l'objet de son penchant, voit des vices qu'il déteste, et qu'il ne peut se dissimuler; qu'attirent les grâces du corps, que repoussent les défauts de l'ame; qui, rougissant de lui-même, et ne pouvant accorder ses sentimens ni sa raison, ne veut rompre ni conserver ses chaînes, et ne peut trouver le bonheur avec ni sans l'objet de son attachement.

Un être plus malheureux encore, ce serait une femme sensible à qui la nature aurait refusé les moyens de plaire, et qui ne pourrait faire

partager les sentimens qu'elle éprouve. Rien n'annonce la finesse de son esprit, ni la délicatesse de son ame; rien de son extérieur ne la fait connaître. Ses yeux couverts sont sans éclat, son nez court et mal formé n'a point de noblesse, sa bouche est sans grâces, son visage sans régularité, rien n'invite à l'aimer, et si elle ne rencontre l'homme sage qui saura l'apprécier, toutes ses qualités, toutes ses vertus resteront sans récompense.

La preuve de ce rapport qui devrait exister entre le corps et l'ame, se tire encore de la curiosité que nous éprouvons pour voir les personnages illustres par leurs talens, leurs dignités, leur renommée, afin de reconnaître si cette correspondance existe entre les traits de leur visage et les qualités rares qu'on leur suppose. Quand cette correspondance n'existe pas, nous en éprouvons un vif mécontentement, comme d'une disconvenance choquante. Nous voulons aussi que les personnages de haut rang montrent de la dignité dans leur extérieur, nous désirons qu'ils soient beaux, grands, qu'ils aient l'air spirituel et de bonne mine. L'usage de leur donner un costume qui les fasse remarquer, qui les rende imposans, n'a pu être établi que pour augmenter leur bonne mine naturelle, ou pour y suppléer quand ils n'en ont pas.

Le sentiment de ce qui est beau est comme le sentiment de ce qui est bon, c'est une sorte de conscience qui apprécie les rapports physiques, comme l'autre conscience apprécie les rapports moraux. La preuve qu'il existe en nous un sentiment naturel de la perfection des formes et de leurs vraies dimensions, c'est l'admiration qu'elles nous font d'abord éprouver quand elles s'offrent à nos regards avec ces avantages; c'est le rire involontaire qu'excitent en nous de certaines difformités, quand nous les voyons pour la première fois, et quand nous ne sommes retenus ni par le respect ni par la pitié. Un trop long nez ou trop gros, des yeux discors, une disposition singulière des traits du visage, une taille grêle et gigantesque, la difformité des épaules ou des jambes, tout cela nous choque, comme de certaines disparates de l'esprit, comme de certains défauts de l'ame; ceux qui sont ainsi faits, ou nous paraissent ridicules, ou bien attirent notre compassion, ou bien même ils nous éloignent d'eux presqu'i nvolontairement.

Ce qui indique encore la correspondance de la beauté physique à la

perfection morale, c'est qu'elles s'altèrent toutes deux par les mêmes moyens, au moins en général. Les passions violentes, comme la colère, la jalousie, la haine, l'envie, ne nuisent pas moins à la beauté du corps qu'à celle de l'ame. Leur effet prolongé, en dépravant la santé, produit la laideur; leur effet momentané défigure le visage, et l'expression extérieure de ces passions décompose les traits et nuit à la beauté.

La beauté a dans son maintien une sorte de dignité naturelle; par tout où elle paraît elle se fait remarquer; elle inspire l'admiration jusque dans la cabane rustique, jusque sous les haillons de la pauvreté. Cependant elle redoute le malheur, le chagrin est son ennemi, il la détruit et fane son éclat. Quelquefois elle ne le supporte qu'avec impatience, elle s'en aigrit comme d'une injustice, elle s'indigne d'un avilissement qui la prive de ses droits, et détruit son empire. J'ai rencontré, il y a quelques jours, presqu'au même moment, deux personnes jeunes et belles : l'une portait, enveloppées dans un linge, quelques portions de ces alimens, qui, destinés par leur nature à une corruption prochaine, tendent plus promptement encore à cet état, en nous servant de nourriture; j'ai cru la voir embarrassée, honteuse du genre de fardeau dont elle était chargée, elle semblait rougir de ses besoins, comme si cette nourriture grossière et sanglante fût indigne d'un être délicat, comme si la beauté ne devait vivre que d'ambroisie.

L'autre personne portait une assez grande toile à peindre, et une boîte probablement pleine de couleurs. Malgré l'embarras de la charge et les chemins glissans, elle marchait avec assurance, elle désirait d'être vue; car on ne pouvait manquer de la trouver belle, et on devait lui supposer de l'instruction et du talent. Elle avait la grâce et la dignité d'une Muse.

Les vrais admirateurs de la beauté souffrent avec peine tout ce qui peut l'altérer: ils s'indignent de la voir prostituée à des travaux pénibles, à des fonctions viles qui défigurent l'objet de leurs hommages, et le soustraient à leur admiration. Je n'ai jamais vu qu'avec peine de misérables femmes courbées sous de pesans fardeaux, exposées à l'intempérie des saisons, et ne conservant des charmes de leur sexe que ce qu'il en fallait pour faire naître les sentimens de la pitié et du regret.

Il n'est pas impossible de concevoir la délicatesse d'un admirateur vrai de la beauté, qui, pour conserver les perfections de ce qu'il aime, redoutant la

fécondité, renoncerait aux faveurs qu'il pourrait obtenir, et ne voudrait pas d'un bonheur qui altérerait l'objet de son culte.

Comment excuser ces artistes impies qui ont confondu le signe sacré de la forme humaine avec celle des plus grossiers animaux, et qui, d'une main sacrilége, ont placé l'être intelligent et sensible, sous des masses de pierres et sous l'entablement d'un pesant édifice. L'emploi des cariatides est, je crois, d'invention moderne : je n'imagine pas qu'une telle profanation soit entrée dans l'esprit des Grecs, adorateurs si vrais de la beauté. Mais si quelqu'artiste de ce temps s'en est rendu coupable, sans doute il aura soulevé contre lui les artistes philosophes et les connaisseurs délicats ; et le blâme justement versé sur son ouvrage, en vengeant la beauté, aura prévenu l'effet de ce condamnable exemple.

Nous avons dit que les objets de la nature et de l'art nous paraissent d'autant plus beaux, qu'ils ont plus de convenance avec leur destination. Si nous connaissions mieux cette destination des êtres, nous jugerions d'autant mieux de leur perfection, et de la suprême intelligence qui a déterminé leur apparence visible ; mais nos connaissances, à cet égard, ont des bornes bien étroites. Quoi qu'il en soit, l'homme, en se regardant comme le centre des objets créés, comme le terme vers lequel ils correspondent, s'est servi de cette supposition comme d'une balance, pour estimer la perfection des objets, en raison de l'utilité qu'il lui en revient, du plaisir qu'ils lui font. Cette manière d'en juger s'est souvent trouvée conforme à ce qui paraît convenir le mieux à l'existence de ces mêmes êtres, à ce qui, pour eux, est le meilleur état possible.

Essayons si, cette règle posée, nous ne pourrions pas, avec son aide, déterminer aussi ce qu'est la beauté dans l'homme, d'après cette observation : qu'elle doit correspondre à sa vraie nature, à l'emploi de ses organes, à leur destination propre. J'espère que cette marche ne sera pas infructueuse ; mais je dois avertir que la beauté n'ayant point de type particulier dans la nature, et ne pouvant se comparer qu'à elle-même, on ne peut en avoir l'idée complète que par sentiment, puisqu'elle ne peut se prouver comme une vérité mathématique.

La beauté dans l'homme, comme nous l'avons dit, se peut considérer sous deux rapports ; celle du corps et celle du visage. Celle du visage aurait

aurait pour objet d'exprimer avec clarté et promptitude les mouvemens de l'ame, les affections du cœur, les effets de l'intelligence. Nous parlerons tout à l'heure de cet objet.

La beauté du corps annonce, dans les membres, l'aptitude à remplir leurs fonctions, à obéir à la volonté de l'homme, à servir ses besoins. La laideur, dans ces deux cas, doit être le contraire des qualités que je viens d'énoncer.

Les hommes, qui s'accordent si difficilement à l'égard de la beauté, s'accordent plus aisément à l'égard de la laideur : mais leurs opinions sont plus généralement conformes encore sur la définition de la santé, et sur celle de l'expression des passions. Par tout, et dans tous les temps, les passions se présentent sous les mêmes caractères, s'expriment par les mêmes traits. La haine, la colère, l'envie, la douleur, l'admiration, l'amour, la bienveillance, le plaisir, s'expriment en France comme à la Chine; ils s'écrivent sur le visage d'ébène d'un Africain comme sur le visage blanc d'un Européen : quant à la santé, elle est aussi différente de la maladie, que les traits par lesquels ces deux états du corps se manifestent l'un et l'autre. Or la santé est encore une correspondance de la beauté du corps; comme l'aptitude à exprimer l'apparence de l'esprit et de la sensibilité, fait en grande partie la beauté du visage. Nous appliquerons ces observations, principalement quand nous parlerons de l'expression. Revenons à l'homme. Pour le représenter dignement, il faut le bien connaître, et l'étudier, soit au moral, soit au physique, non par les côtés qui le font ressembler aux animaux, mais par ceux qui l'en font différer.

Si l'auteur de la nature eût destiné l'empire du monde à la force physique, l'éléphant et le lion seraient les maîtres de la terre; mais l'homme y commande par le privilége de son intelligence; c'est elle qui l'en a fait souverain; par elle il assujettit les élémens à ses lois, il convertit les métaux à son usage, il retient dans sa dépendance les animaux de toute espèce, il règne sur tout ce qui vit et respire. Les traits de sa grandeur sont imprimés sur son visage, tout indique sa supériorité; son essence divine pénètre et anime son enveloppe, et la noblesse de sa démarche annonce le roi de l'univers. Ses pieds seuls touchent la terre, sa tête s'en éloigne; élevée au-dessus des plus grossières

vapeurs, elle contemple la lumière, et s'élance dans le ciel. Ses bras ne servent point d'appui à l'édifice de son corps, ils ont une destination plus noble; aidés de la main, ils manient successivement la charrue et l'épée, la lyre et le pinceau, ils sont les ministres de sa volonté, les instrumens de sa puissance. Une douce majesté réside sur son visage, il s'anime d'un feu divin, quand quelque trait de lumière vient éclairer son intelligence, ou quand son cœur, échauffé par quelqu'affection vertueuse, se livre avec transport aux sentimens généreux de l'amour, de la pitié, de la bienfaisance. Qui pourrait peindre la mobilité de ses traits, qui pourrait en fixer les nuances vives et délicates? Chacune de ses pensées, chacune de ses affections, ont des signes qui leur correspondent; leur langage énergique devance la parole, et lui donne la vie. L'animal ne connaît de douleur que celle que son corps éprouve: l'homme seul, s'unissant à la souffrance d'autrui, ressent des maux qui lui sont étrangers, et les diminue en les partageant. De tous les animaux, seul il répand des larmes, et la sensibilité, dont ses larmes sont le témoignage, est le plus doux sentiment de son cœur, le plus beau privilége de sa nature, celui dont il s'honore davantage.

C'est par ces observations, et d'autres semblables, qu'on apprendra à connaître l'homme, et à le peindre convenablement. Son être intellectuel modifiant son être physique, si l'on n'étudie son moral, jamais on n'exprimera bien les mouvemens de son ame et la pantomime de ses passions, jamais on ne prendra de sa forme l'idée élevée qu'il faut en avoir. La régularité est l'ame de cette forme; par-tout l'ordre y préside, et détermine sévèrement la proportion de ses membres dans l'ensemble et dans les détails. Les artistes délicats savent qu'on ne peut les représenter dans leur perfection, sans la précision la plus scrupuleuse; et les Grecs, qui ont eu de la forme humaine l'idée la plus exquise, ont déterminé le rapport des moindres parties au tout, avec un goût si parfait, que l'imagination ne peut aller au-delà, et qu'il ne nous reste qu'à les admirer et à les suivre.

Pour ne point trop prolonger cette leçon, nous remettrons aux suivantes à vous parler des proportions qui constituent la belle forme des membres. Cette étude se trouvera même mieux classée en son lieu, lorsque nous nous occuperons des moyens pratiques qui vous rendront plus facile la

représentation des objets en général, et principalement celle de l'homme.

Nous terminerons donc cette leçon, déjà un peu longue, par quelques considérations sur la beauté du visage, et sur celle des parties qui le composent.

L'homme étant souverainement doué d'intelligence, et devant réunir en lui toutes les vertus, doit en offrir l'empreinte sur sa forme extérieure; il doit la manifester par des traits qui le distinguent de tous les animaux. Aussi la forme de son visage est d'autant plus belle qu'elle est plus la sienne, qu'elle se rapproche moins d'aucune autre; elle est d'autant plus choquante, qu'elle rappelle plus sensiblement celle de quelque animal (1). Parmi cette grande variété que présente la face des animaux, ce qui distingue celle de l'homme, c'est la régularité de la sienne. Dans sa partie antérieure, elle forme un ovale exact, dont les parties se divisent régulièrement, et conservent entr'elles un rapport symétrique. C'est par cette partie antérieure que les animaux diffèrent entr'eux, et qu'ils diffèrent principalement de l'homme : car la partie postérieure du crâne, ou l'occiput, est à-peu-près la même dans tous les animaux. En faisant passer, par la racine des dents de la mâchoire supérieure et par la partie la plus avancée des os du front, une ligne qui viendrait croiser une autre ligne passant horizontalement sur toute la joue pour arriver de la racine du nez à l'extrémité inférieure de l'oreille, ou quelquefois même à son orifice, ces deux lignes formeraient, par leur réunion, un angle de quatre-vingts à quatre-vingt-dix degrés, et même plus (2).

Tous les autres animaux, à commencer par le singe, s'éloignent plus ou moins de cette forme, et leur instinct paraît d'autant plus borné, que la réunion de ces deux lignes forme un angle plus aigu; de sorte que l'observateur peut déjà reconnaître, à la vue simple, le degré d'instinct d'un animal, par la disposition des os de sa tête, la nature paraissant avoir établi

---

(1) *Voyez* planche Ire La figure 1.re et la 6.e représentent la face humaine dans sa beauté; les autres, jusques et compris la 11.e, la représentent altérée et s'approchant de celle de quelque animal.

(2) *Voyez* la Dissertation sur la différence des traits du visage, écrite en hollandais par *Camper*, et traduite en français par *Quatremère d'Isjonval*. *Voyez* aussi la planche Ire, figure 12.e et suivantes.

ce rapport visible entre sa forme extérieure et l'étendue de ses facultés. Ainsi les poissons qui, de tous les animaux, sont les plus obtus, sont aussi ceux dont la face offre, par la réunion de ces deux lignes, un angle plus aigu.

La tête humaine présente, comme nous venons de le dire, dans sa partie antérieure, la forme exacte d'un œuf, c'est-à-dire, d'un ovale plus évasé en haut qu'en bas. En divisant cet ovale en deux diamètres, le plus grand, marqué *A* et *B*, partagera en deux portions égales le front, le nez, la bouche et le menton. *Voyez planche II, fig. 1.ère*

Le plus petit partagera la tête en deux portions égales, à l'origine et à l'extrémité des sourcils, ou quelquefois au milieu des trous orbitaires. *Voyez, même figure*, la ligne marquée *C D*.

Ces deux parties, divisées encore en deux moitiés égales, donneront, l'une l'origine des cheveux, l'autre l'extrémité du nez.

La quatrième partie, divisée elle-même en trois, donnera la place de la bouche et l'origine du menton.

La base du nez forme, avec sa partie la plus saillante, un angle équilatéral, qui doit être de la grandeur de la bouche, ou de l'œil; il y aura entre les deux yeux une largeur d'œil, ou de nez. Le nez et le front ne seront séparés que par une légère inflexion presqu'insensible. La partie supérieure du front et celle inférieure du menton s'abaisseront un peu pour adoucir l'ovale et lui donner une forme plus régulière. C'est ce qu'on peut reconnaître dans le profil régulier tracé *planche II, figure 3*. Dans les suivantes, depuis *4* jusqu'à *8*, la beauté est altérée, parce que la face est construite sur une ligne trop convexe, ou concave, trop plate, trop longue, ou trop large. Les quatre profils restans sont des caricatures tirées de *Léonard de Vinci*.

Le front doit être droit dans sa ligne d'union avec le nez, mais il est légèrement arrondi dans ses parties supérieures et latérales. Un front rétréci déforme l'ovale, et donne de la dureté au visage. Quand il est ouvert et bien uni, il annonce la paix de l'ame; mais quand il est sillonné par des rides, il est un signe de vieillesse, ou il dénote le trouble des passions; il est l'empreinte de la tristesse et du malheur.

Il vaut mieux que les yeux soient plutôt grands que petits; ils ne doivent être ni trop enfoncés, ce qui diminue leur éclat; ni trop avancés,

ce qui nuit à la finesse et à la douceur du regard. De gros yeux, dans de certaines positions, déforment l'ovale de la tête, et paraissent l'effet d'une maladie ou d'un coup. Les yeux ronds sont moins beaux que les longs, et que ceux dont la forme ressemble à celle d'une amande. Les yeux ronds, en laissant paraître trop de blanc autour de la prunelle, donnent au regard l'air étonné, et altèrent la paix du visage. On dit que les Turcs aiment les yeux gros et saillans; mais les Grecs préféraient l'autre forme; et dans la *Vénus de Médicis*, quoique les yeux, en y comprenant les sourcils, occupent un grand espace dans l'ovale, cependant le globe n'est pas fort grand; il est d'ailleurs diminué par un léger mouvement de la paupière inférieure, qui, en s'approchant de la supérieure, donne au regard plus de tendresse et d'agrémens. Le sourcil doit être délié, grand, bien arqué; et, quelle que soit la couleur des yeux, il est plus beau de couleur brune, en ce qu'il fait un agréable contraste avec la couleur de la peau, et que d'ailleurs il s'aperçoit de plus loin.

Les yeux expriment plus particulièrement l'intelligence; mais c'est surtout la bouche qui exprime les sentimens du cœur, de manière pourtant que leurs effets se réunissent et se fortifient l'un par l'autre. C'est chez les femmes que cet organe se montre avec toutes ses grâces; il doit indiquer la sensibilité de leur ame, et les douces affections qui font son caractère. L'homme, doué d'une intelligence plus forte, la manifeste par le feu de ses regards; mais sa bouche est privée des grâces dont elle est ornée chez les femmes: d'ailleurs, destinée par la nature à être voilée par la barbe, ses mouvemens n'ont pas autant de charmes, ni ses couleurs d'aussi aimables constrastes. La bouche doit être petite, et seulement un peu plus grande que la largeur des narines; plus petite, ses mouvemens sont moins libres, elle est moins éloquente, moins propre à la tribune et au théâtre. La lèvre inférieure est plus forte, plus pleine que la supérieure; toutes deux sont partagées au milieu par des traits qui distinguent le côté gauche du droit; distinction qui se remarque non-seulement sur le front, le nez, le menton, mais sur le cou, entre les clavicules, et sur toute l'habitude du corps, par le sternum, la ligne blanche, et tous les muscles qui divisent le corps en deux parties égales. Puisque c'est autour de la bouche que se manifestent les plus douces affections de l'ame, les plus belles bouches seront

celles qui auront le plus d'aptitude à retracer cette apparence : or les lèvres épaisses et portées en avant, comme celles des nègres, donnant au visage l'air maussade et mécontent, ce ne peut être un trait de beauté, puisque ce trait correspond à un état de l'ame visiblement mauvais. D'ailleurs, quand ces bouches expriment le rire, retenant toujours un peu de leur disposition première, le rire ne se produit ni promptement, ni clairement; il n'a ni douceur, ni précision, et devient une grimace, une convulsion désagréable.

De même une grande bouche ne peut être un trait de beauté; elle n'est un avantage que pour recevoir plus facilement des alimens d'un plus gros volume, pour mieux saisir une proie et la retenir avec les dents, pour exécuter enfin des fonctions qui, étant étrangères à l'intelligence, établissent à l'égard de l'homme, des rapports honteux entre lui et les animaux, et lui donnent l'apparence de la férocité ou de la gourmandise.

Dans les images qu'ils tracent de la beauté, les poëtes ont mieux réussi à décrire les perfections des yeux et de la bouche, que celles du menton et du nez; sans doute parce qu'ils n'ont pas su se rendre assez bien compte de l'effet qu'ils produisent pour la laideur ou l'agrément du visage. Mais si ces deux parties ne servent guères à l'expression, elles sont tout pour la perfection de la forme et la régularité des traits. Le menton termine et soutient l'ovale, le profil lui doit en partie sa beauté; il est d'ailleurs un trait caractéristique de l'espèce humaine, puisqu'il ne se retrouve dans aucun autre animal. Quant au nez, quoiqu'il n'ait pas à manifester, comme les yeux, les traits de l'intelligence, et comme la bouche, les affections du cœur, il fait peut-être plus qu'eux pour la beauté de la physionomie, il est le trait le plus saillant du visage; par sa forme élancée, il en fait le caractère le plus distinct, il est le point fixe autour duquel s'assemblent et se composent toutes les autres parties du visage, il en est en quelque sorte le régulateur, et plusieurs célèbres artistes déterminaient d'après lui toutes les proportions de leurs figures. Pour servir à cet usage, sa forme doit être droite et simple, il doit faire avec sa base un angle saillant et bien prononcé; s'il est séparé du front par une cavité profonde, s'il est large, court et distant de la bouche, ne cherchez point ailleurs ce qui vous fait trouver un visage ignoble et

commun. Dans le désir passionné, dans la colère et la fureur, les narines s'enflent et s'élèvent; c'est le seul mouvement dont le nez soit susceptible; mais sa partie antérieure ne le partage point. Par son immobilité dans l'effet des passions, il marque de combien les autres traits s'altèrent, il fait sentir l'ouverture de la bouche dans les cris de la douleur et de l'effroi, et dans les diverses fonctions de cet organe si mobile; il marque aussi l'élévation des sourcils et leur abaissement; il concourt enfin à préciser tous les mouvemens produits par la joie, la tristesse, la crainte, l'admiration, la fureur, &c. On sait jusqu'à quel point la perte du nez défigure un visage, et c'est encore ce qui prouve combien il sert à la beauté. Pendant le sommeil, les yeux se ferment et leur expression devient nulle; ils peuvent être, ainsi que la bouche, défigurés par la douleur; mais ces différens changemens, qui modifient le visage, n'en altèrent pas la beauté; elle perd tout son effet par l'altération du nez; on ne peut se plaire à contempler une statue qui est privée de cette partie, tandis qu'on l'admire quoique ses yeux soient sans prunelle et ses lèvres sans couleur. En ployant un cheveu de manière à ce qu'il puisse, sans qu'on reconnaisse le moyen, élever ou baisser sensiblement la pointe du nez, on se prouvera combien l'altération de sa forme en apporte à celle du visage.

Les dents, pour être belles, doivent être petites, égales, rondes, et sur-tout blanches. Le visage en reçoit beaucoup de charme; elles embellissent le rire, la parole, l'expression des plus doux sentimens du cœur. Les dents sont les seuls os du corps qui soient à découvert; elles sont comme les échantillons des autres os, il faut donc qu'elles les fassent présumer sains et bien conformés.

L'oreille doit avoir une longueur de nez, ou quelquefois un peu plus; mais son extrémité inférieure doit toujours s'appuyer sur la ligne du nez, c'est-à-dire, se terminer à la troisième partie de la tête; son extrémité supérieure, à la deuxième ou un peu plus haut. Sa totalité se divise en trois parties égales, dont le lobe occupe la dernière, et la cavité occupe celle du milieu. Elle doit être construite sur une ligne un peu inclinée, en approchant vers la bouche, et non parallèle à la forme générale de la tête. Les Grecs estimaient les petites oreilles; elles sont plus jolies, mais on dit que les plus grandes entendent mieux.

Nous avons dit au commencement de cette séance, que des cinq sens, deux sur-tout paraissent avoir avec l'intelligence des rapports plus directs; savoir, la vue et l'ouïe. L'organe de la vue est à-la-fois actif et passif; actif quand il exprime au-dehors les mouvemens de l'ame; passif quand il reçoit l'impression des objets : mais l'organe de l'ouïe est seulement passif : lui dont les rapports avec l'ame sont si directs, qui l'émeut si vivement par les charmes de l'éloquence et de la poësie, qui l'agite si violemment par les accens de la douleur, les cris du désespoir; qui porte enfin jusque dans son sanctuaire le plus secret, des impressions si vives de plaisir et de peine : tant d'effets dont cet organe est le ministre, le laissent immobile, et rien de ce qu'il produit dans l'ame, n'agit sur lui extérieurement. L'homme diffère en cela des animaux : chez eux les oreilles agissent par des mouvemens très-prompts et très-variés qui servent à faire connaître leurs affections, leurs peines et leur plaisir.

Dans des physionomies toutes également belles, ce n'est que par des nuances presque imperceptibles que leur beauté se varie et se fait remarquer : le sourcil plus ou moins arqué, le nez plus ou moins arrondi ou saillant, les yeux plus ou moins ouverts, l'ovale plus ou moins alongé; enfin, la plus légère modification suffit pour exprimer toutes les nuances de la beauté, et faire distinguer des visages qui, pour être beaux, doivent être réguliers, et formés dans l'ensemble et les détails suivant les principes que nous avons posés.

D'après les légers croquis que nous avons tracés dans nos deux planches, on peut juger, à la vue simple, que la laideur augmente d'autant plus que le visage s'éloigne davantage de la forme régulière : nous considérerons dans une autre leçon la manière dont les passions se prononcent, et nous tâcherons d'exprimer les nuances vives et délicates par lesquelles elles manifestent leurs différences avec tant de promptitude et de précision. Cette importante partie de la peinture est celle qui demande de l'artiste le plus d'exercice et d'habileté, celle qui suppose les observations les plus fines, et donne l'opinion la plus avantageuse de la sensibilité de son ame et de la délicatesse de son esprit.

Il nous reste à examiner pourquoi des visages irréguliers, bizarres même dans leur forme, plaisent pourtant plus que d'autres qui sont beaux et bien conformés. La laideur peut-elle donc usurper les droits de la beauté? Cette

Cette dernière peut-elle être quelquefois sans pouvoir ? Que deviennent en ce cas les principes que nous avons posés en lui attribuant des droits si étendus, en lui supposant de si puissans effets ? Notre réponse à cette objection se déduit naturellement de ce que nous avons dit précédemment à l'égard de l'homme, et lui sert même de confirmation. Si la raison met sa gloire à triompher des charmes de la beauté, si le sage résiste à son empire, c'est quand il ne reconnaît pas entre elles l'esprit et la vertu, l'alliance qui doit les réunir. Inférieure à ses compagnes, mais plus prompte dans son effet, la beauté peut bien seule enchanter les yeux et surprendre les sens ; mais cet enchantement ne dure guères, l'habitude le détruit, chaque jour diminue sa puissance, et bientôt l'ame détrompée brise des liens trop faibles pour la retenir. Au contraire, les qualités de l'esprit et du cœur suppléent bien souvent à la beauté, et montrent d'autant mieux leur pouvoir, qu'elles la remplacent et se passent de son secours. C'est qu'alors ce qui se fait sans la beauté, s'obtient par un charme plus puissant que le sien, et dont le temps accroît l'effet au lieu de le détruire. On a même observé par l'expérience de tous les siècles, que les plus grandes passions ont été inspirées par des personnes médiocrement belles, parce qu'elles plaisent alors par des qualités plus estimables et moins fragiles que la beauté.

Au surplus, si l'homme délicat peut trouver dans les qualités de l'esprit de quoi suppléer les grâces du corps, c'est que la beauté vivante a, comme nous l'avons dit, des moyens de plaire bien plus étendus que ceux de l'art. Mais ces bornes si resserrées dans lesquelles l'art est circonscrit, rendent indispensable pour l'artiste la connaissance des moyens qui lui sont accordés ; il faut donc qu'il étudie les formes de la beauté, il faut qu'il les apprécie indépendamment de ce qui leur est étranger, puisque ses ouvrages lui devront tous leurs charmes ; puisque, de toutes les perfections qui la composent, il ne peut représenter que celle qui frappe les yeux ; puisque ne faisant juger de la réalité que par l'apparence, il ne pourra faire connaître la magnanimité, l'innocence, la bienfaisance, la justice, et toutes les vertus dont l'homme s'honore, que sous la forme de la beauté ; elle n'est point ces vertus, mais elle leur correspond par le rapport intime que la nature a mis entre l'intérieur et l'extérieur, entre la forme et le principe qui la modifie.

Après avoir précédemment essayé de prouver que la vraie destination des arts est d'influer sur l'esprit public, de servir la morale et la législation, je serai satisfait, si j'ai pu faire sentir que la beauté est une correspondance de la vertu, qu'elle en est l'image sensible, qu'elle est enfin une émanation de la perfection suprême. Par-là j'affermis son empire, et je justifierai mes semblables, qui, dans les adorations qu'ils lui prodiguent, séduits par la ressemblance, la prennent pour celle qu'elle représente, et qui devrait obtenir seule leurs hommages. Puissent-ils toujours, dans les écarts de leur raison, mériter d'être absous au nom de la nature ! puissent leurs nombreuses erreurs être souvent excusées par d'aussi douces illusions !

Dans la prochaine leçon, nous nous occuperons de l'apparence des corps, relativement aux couleurs.

NEVEU.

Notà. Ce quatrième numéro du Journal de l'École polytechnique terminant tout ce qui a été fait pour l'enseignement pendant la première année de son établissement, devrait aussi terminer le cours relatif aux arts de dessin, ce cours ayant été fait dans les trois premiers mois de son ouverture. Les cinq leçons qui restent à fournir, conformément au tableau annexé à la première, seront imprimées successivement dans les Journaux qui paraîtront, afin qu'ainsi divisées, elles n'occupent pas trop de place, et n'augmentent pas le volume ordinaire du Journal.

TABLE

Des principaux Articles contenus dans ce Cahier.

FIN DE LA TABLE.

pla. 1.



Gnd. del et incidit. —



page 720.

Gnd. del.t et incidit.

TABLE
DES MATIÈRES
CONTENUES
DANS LES QUATRE PREMIERS CAHIERS.

(Le chiffre romain indique le cahier, et le chiffre arabe indique la page.)

A.

E.

I.

L.

Q.

T.

V.

W.

Z.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

I.er Cahier.

Page 95, ligne 13, au lieu de $x = F(x)$, lisez $y = F(x)$.
Page 102, lig. 5, comme arbitraires; *lisez* arbitraires comme.
Page 112, lig. 19, M'; lisez M.
Page 156, lig. 30, au lieu de septentrional, *lisez* méridional.

II.e Cahier.

Pages 2 et 3. équations (4), (5) et (6), au lieu des coëfficiens

$$n, \frac{n.n-1}{1.2}, \text{ \&c. , lisez } m, \frac{m.m-1}{1.2}, \text{ \&c.}$$

Page 8. équation (4), $\Delta^x . N$; *lisez* $\Delta^n . N$.
Idem, *lig. 2.* $+$ &c. $\}^2$; *lisez* $+$ &c. $\}^n$.
Page 11, lig. 1. $\log. (y + \delta y) \log. y +$; *lisez* $\log. (y + \delta y) = \log. y + \ldots$
Page 14, lig. 4. Supplément du n.° 9; *lisez* numéro précédent.
Page 17, lig. 7. $- n 2.n. - 3$; *lisez* $- 2.n - 3$.
Idem, *lig. 9.* $n \sigma \gamma^{n-2}$; lisez $n \sigma \gamma^{n-1}$.
Page 19, lig. 8. $M^2 = N^2$; lisez $M^2 + N^2$.
Idem, *lig. 18.* $\cos.^{x-4} A$; *lisez* $\cos.^{n-4} A$.
Idem, *lig. antepénult.* $\cos.^{n-2} A$; *lisez* $\cos.^{n-4} A$.
Page 26, lig. 17, 18. N.os XVIII, XIX, XX et XXI; *lisez* N.os XX, XXI, XXII et XXIII.
Idem, *lig. 19, 20.* entreprendre de cet ouvrage; *lisez* entreprendre l'étude de cet ouvrage.
Page 43, lig. 12. au-dessus; *lisez* au-dessous.
Page 46, lig. 19. $\mu_{''}^{x} \varrho_{''}^{x}$; lisez $\mu_{''} \varrho_{''}^{x}$.
Page 52, lig. 1. 1,9027776; *lisez* $\bar{1}$,9027776.

III.e Cahier.

Page 217, lig. 3. $- \frac{1}{6} x^3 \Delta x^3 \frac{1}{42} x \Delta x^5$; *lisez* $- \frac{1}{6} x^3 \Delta x^3 + \frac{1}{42} x \Delta x^5$.
Page 218, lig. dern. $- \frac{1}{2} x \Delta x^3$; *lisez* $- \frac{1}{6} x^3 \Delta x^3$.
Page 221, lig. 9. $\frac{1}{(m = 1) \Delta x}$; *lisez* $\frac{1}{(m - 1) \Delta x}$.
Page 226, lig. 17. N.° XIV; *lisez* N.° XVI.

Page 232, *lig.* 12. N.° Ier; *lisez* N.° XIV.
Page 238, *lig.* 13. (1); *lisez* (8).
Page 259, *lig.* 14. supplément du N.° IX; *lisez* du N.° X.
Page 261, *lig.* 2. $A'z(x+1) = A''z(x+2)$; lisez $A'z(x+1) + A''z(x+2)$.
Page 288, *lig.* 31. de la fusion; *lisez* de l'affusion.
Page 427, *lig.* 19. au point déterminé; *lisez* au point de ténuité.
Page 429, *lig.* 24. caotchouc; *lisez* caoutchouc.
Page 278, *lig.* 3. d'elle; *lisez* de lui.
Page 435, *lig. dern.* incaudescent; *lisez* incandescent.
Page 440, *lig.* 3. anciennes; *lisez* curieuses.

IVe Cahier.

Page 469, *lig.* 22. z_0; lisez $z_{(x')}$.
Idem, *lig.* 23. z_0; lisez $z_{(2x')}$.
Page 475, *lig.* 6, 7. $\tau' \surd)(-1)$; *lisez* $\tau' \surd(-1)$.
Idem, *lig.* 7. $\psi = \psi'$; lisez $\psi - \psi'$.
Page 488, *lig.* 3. à la notion; *lisez* à la notation.
Page 495, *lig.* 19. substituez y; *lisez* substituez y.
Page 498, *lig.* 19. $y_1 = y$; lisez $y_1 - y$.
Idem, *lig.* 20. $-y_{(n-1)}$; lisez $-y_{(x-1)}$.
Page 500, *lig.* 11. $a\overset{2}{y}_{11}{}^{k}$, lisez $ay_{11}{}^{k}$.
Idem. . . . . $a^{1+k+\overset{2}{k}}y_0^{\overset{h3}{k}}$, lisez $a^{1+k+\overset{2}{k}}y_0^{\overset{3}{k}}$.
Idem, *lig.* 12. $a a^k a^{\overset{2}{k}} \overset{3}{y}$; lisez $a a^k a^{\overset{2}{k}} y_1^{\overset{3}{k}}$
Page 507, *lig.* 16. $z = \frac{A}{\Delta x} + B$; lisez $z = \frac{Ax}{\Delta x} + B$.
Page 508, *lig.* 21. $z = x$; lisez $z = \infty$.
Page 526, *lig.* 1, 2. Intégration en différences partielles de l'équation; *lisez* Intégration de l'équation en différences partielles.
Page 528, *lig.* 27. N.° XVI; *lisez* N.° XVIII.
Page 537, *lig.* 16. N.° XII; *lisez* N.° XIV.
Idem, *lig.* 27. N.° XIII; *lisez* N.° XV.
Page 538, *lig.* 1. donnés pour; *lisez* donnés par.
Idem, *lig.* 20. N.° XII; *lisez* N.° XIV.
Page 539, *lig.* 12. $\frac{1}{\Delta^{(3)} z^{(0)} + 3\Delta^{(1)} z^{(0)}\ 3\,\Delta^{(4)} z^{(0)} \ldots\ldots\ldots}$; *lisez*

$$\frac{1}{\Delta^{(3)} z^{(0)} + 3\,\Delta^{(2)} z^{(0)} + 3\Delta^{(1)} z^{(0)} + \ldots\ldots}.$$

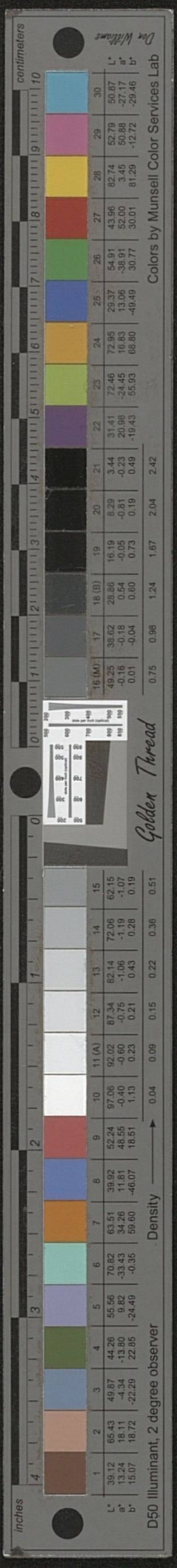
Page 539, *ligne* 14. N.° XIII; *lisez* N.° XV.

Page 543, *lig.* 2. N.° XII ; *lisez* N.° XIV.
Idem, *lig.* 16. N.° XVII ; *lisez* N.° XIX.
Page 546, *lig.* 17. $+ \frac{d^3 z}{1.2.3.dx^3}\{(\varepsilon^3 - 1) \pm 1\}$; *lisez* $\frac{d^3 z}{1.2.3\, dx^3}\{(\varepsilon^3 - 1)^n \pm 1\}$.
Page 558, *lig.* 24. impairs ; *lisez* impaires.
Page 560, *lig. antépénult.* ait un ; *lisez* n'ait pas un.
Page 562, *lig.* 13. $= (DM)^2$; lisez $= (OM)^2$.
Page 566, *lig.* 15. ou son égal V ; *lisez* ou son égal $V_{\prime\prime}$
Page 567, *lig.* 11. seuls ; *lisez* nuls.
Idem, *lig.* 13. toujours positive ; *lisez* respectivement positive ou négative.
Page 568, *lig.* 9. en déduit ; *lisez* s'en déduit.
Idem, *lig.* 21. par $s_{\prime}$, ajoutée à x ; *lisez* par $s_{\prime}$ prise avec un signe contraire et ajoutée à x.
Page 569, *lig.* 11. observez que si la première valeur ; *lisez* observez que si, après le changement de signe prescrit, la première valeur.
Idem, *lig. antépénult.* $\frac{y_{\prime}}{x_{\prime}}, \frac{y_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}}, \frac{y_{\prime\prime\prime}}{x_{\prime\prime\prime}}$, &c. ; *lisez* $\frac{y_{\prime}}{S_{\prime}}, \frac{y_{\prime\prime}}{S_{\prime\prime}}, \frac{y_{\prime\prime\prime}}{S_{\prime\prime\prime}}$, &c.
Page 628, *lig.* 5. *au lieu de* capillarogie, *lisez* capillarologie.
Page 626, *lig.* 10. *au lieu de* linéaire, *lisez* lintéaire.
Page 574, *lig.* 9, 10. *au lieu de* il s'est précipité dans le premier 0,150 grammes d'oxide de fer, et 0,010 grammes dans le second, *lisez* il s'est précipité dans le premier 0,010 grammes d'oxide de fer, et 0,150 dans le second.
Page 580, *lig.* 8. ce qui serait ; *lisez* ce qu'il serait.
Page 654, *lig.* 12. *au lieu de* et forment, *lisez* ils forment.
Page 687, *lig.* 17. *au lieu de* et l'état, *lisez* à l'état.

N. B. L'essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques, qui se trouve page 24 du second cahier, doit faire suite au n.° XXII, c'est-à-dire, être à la page 273 du troisième cahier.

Journal polytechnique

3e et 4e cahiers.


Golden Thread
Colors by Munsell Color Services Lab
D50 Illuminant, 2 degree observer
Density
inches
centimeters